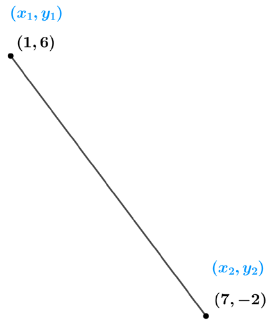
4.1

a) Lasketaan janan keskipisteen koordinaatit.

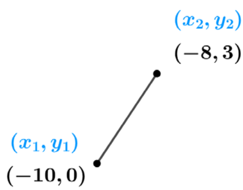


$$(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2})$$
$$= (\frac{1+7}{2},\ \frac{6+(-2)}{2})$$
$$= (\frac{8}{2},\ \frac{4}{2})$$
$$= (4,\ 2)$$

Lasketaan janan pituus.

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(7-1)^2 + (-2-6)^2}$$
$$= \sqrt{6^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{36+64}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$

b) Lasketaan janan keskipisteen koordinaatit.



$$(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2})$$
$$= (\frac{-10+(-8)}{2},\ \frac{0+3}{2})$$
$$= (\frac{-18}{2},\ \frac{3}{2})$$
$$= (-9,\ \frac{3}{2})$$

Lasketaan janan pituus.

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(-8-(-10))^2+(3-0)^2}$$
$$=\sqrt{2^2+3^2}$$
$$=\sqrt{4+9}$$
$$=\sqrt{13}$$

c) Lasketaan janan keskipisteen koordinaatit.

$$(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2})$$
$$=(\frac{-5+2}{2},\ \frac{9+9}{2})$$
$$=(\frac{-3}{2},\ \frac{18}{2})$$
$$=(-\frac{3}{2},\ 9)$$

Lasketaan janan pituus.

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(2-(-5))^2+(9-9)^2}$$
$$=\sqrt{7^2+0^2}$$
$$=\sqrt{49}$$
$$=7$$

Vastaus

a) keskipiste $(4,\ 2)$, pituus 10

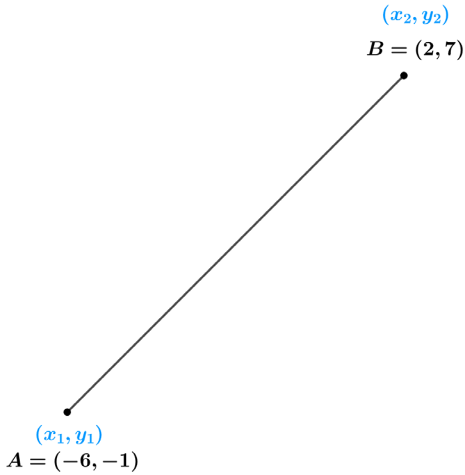
b) keskipiste $(-9,\ \frac{3}{2})$, pituus $\sqrt{13}$

c) keskipiste $(-\frac{3}{2},\ 9)$, pituus 7

4.2

Lasketaan janan AB keskipisteen koordinaatit.

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{-6+2}{2},\ \frac{-1+7}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{-4}{2},\ \frac{6}{2}\right)$$
$$=(-2,\ 3)$$



Lasketaan janan AB keskipisteen $(-2,\ 3)$ ja origon $(0,\ 0)$ välinen etäisyys (kahden pisteen välinen etäisyys on pisteiden välisen janan pituus).

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(-2-0)^2+(3-0)^2}$$
$$=\sqrt{(-2)^2+3^2}$$
$$=\sqrt{4+9}$$
$$=\sqrt{13}$$

Vastaus

$\sqrt{13}$

4.3

Janan toinen päätepiste on origossa eli $(0,\ 0)$. Merkitään toista päätepistettä $(x,\ y)$. Janan keskipiste on tällöin

$$\left(\frac{0+x}{2},\ \frac{0+y}{2}\right)=\left(\frac{x}{2},\ \frac{y}{2}\right).$$

Toisaalta keskipiste on $(12,-5)$.

Muodostetaan yhtälöt ja ratkaistaan x ja y.

$$\frac{x}{2}=12 \quad |\cdot 2 \qquad\qquad \frac{y}{2}=-5 \ |\cdot 2$$
$$x=24 \qquad\qquad y=-10$$

Janan toinen päätepiste on $(24,-10)$.

Lasketaan janan pituus.

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(24-0)^2+(-10-0)^2}$$
$$=26$$

Sievennetään CAS-laskimella.

Vastaus
päätepiste $(24,-10)$, pituus 26

4.4

Janan x-akselilla olevan päätepisteen y-koordinaatti on $0.$ Merkitään tätä päätepistettä $(x,\ 0).$

Janan y-akselilla olevan päätepisteen x-koordinaatti on $0.$ Merkitään tätä päätepistettä $(0,\ y).$

Janan keskipiste on tällöin

$$(\frac{x+0}{2},\ \frac{0+y}{2}) = (\frac{x}{2},\ \frac{y}{2}).$$

Toisaalta keskipiste on $(-8,\ 3).$

Muodostetaan yhtälöt ja ratkaistaan x ja $y.$

$$\frac{x}{2} = -8 \quad |\cdot 2 \qquad\qquad \frac{y}{2} = 3 \quad |\cdot 2$$
$$x = -16 \qquad\qquad y = 6$$

Janan päätepisteet ovat siis $(-16,\ 0)$ ja $(0,\ 6).$

Vastaus
$(-16,\ 0)$ ja $(0,\ 6)$

4.5

a) Appletilla nähdään, että x-akselin pisteiden $(-1,\ 0)$ ja $(5,\ 0)$ etäisyys pisteestä $(2,-4)$ on 5.

b) Merkitään x-akselilla olevaa pistettä $(x,\ 0)$.

Pisteen $(x,\ 0)$ etäisyys pisteestä $(2,-4)$ on 5. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$\sqrt{(x-2)^2+(0-(-4))^2}=5$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x=-1$ tai $x=5$

Pisteet ovat $(-1,\ 0)$ ja $(5,\ 0)$.

Vastaus

a) $(-1,\ 0)$ ja $(5,\ 0)$

b) $(-1,\ 0)$ ja $(5,\ 0)$

4.6

a) Merkitään x-akselilla olevaa pistettä $(x,\ 0)$.

Pisteen $(x,\ 0)$ etäisyys pisteestä $(7,\ 6)$ on 10. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$\sqrt{(x-7)^2+(0-6)^2}=10$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x=-1$ tai $x=15$

Pisteet ovat $(-1,\ 0)$ ja $(15,\ 0)$.

b) Merkitään y-akselilla olevaa pistettä $(0,\ y)$.

Pisteen $(0,\ y)$ etäisyys pisteestä $(7,\ 6)$ on 10. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan y.

$\sqrt{(0-7)^2+(y-6)^2}=10$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$y=6-\sqrt{51}$ tai $y=6+\sqrt{51}$

Pisteet ovat $(0,\ 6-\sqrt{51})$ ja $(0,\ 6+\sqrt{51})$.

Vastaus

a) $(-1,\ 0)$ ja $(15,\ 0)$

b) $(0,\ 6-\sqrt{51})$ ja $(0,\ 6+\sqrt{51})$

4.7

Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

$$AB = \sqrt{(14-0)^2 + (-3-(-5)^2} = 10\sqrt{2}$$ Sievennetään CAS-laskimella.

$$AC = \sqrt{(6-0)^2 + (3-(-5))^2} = 10$$ Sievennetään CAS-laskimella.

$$BC = \sqrt{(6-14)^2 + (3-(-3))^2} = 10$$ Sievennetään CAS-laskimella.

Tutkitaan kolmion ABC suorakulmaisuutta kokeilemalla, toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen. Jos kolmio ABC on suorakulmainen, pisin sivu $AB = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ on sen hypotenuusa.

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ (10\sqrt{2})^2 &= 10^2 + 10^2 \\ 100 \cdot 2 &= 100 + 100 \\ 200 &= 200 \\ &\text{tosi} \end{aligned}$$

Koska kolmion ABC sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen, kolmio ABC on suorakulmainen.

Vastaus

$AB = 10\sqrt{2}$, $AC = 10$ ja $BC = 10$

Kolmio on suorakulmainen, koska sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen.

4.8

Kolmion ABC kärjestä B piirretyn keskijanan toinen päätepiste on janan AC keskipiste.

Lasketaan janan AC keskipiste.

$$(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2})$$
$$= (\frac{1 + (-4)}{2},\ \frac{2 + 2}{2})$$
$$= (\frac{-3}{2},\ \frac{4}{2})$$
$$= (-\frac{3}{2},\ 2)$$

Lasketaan keskijanan eli pisteiden $B = (-3,\ 5)$ ja $(-\frac{3}{2},\ 2)$ välisen janan pituus.

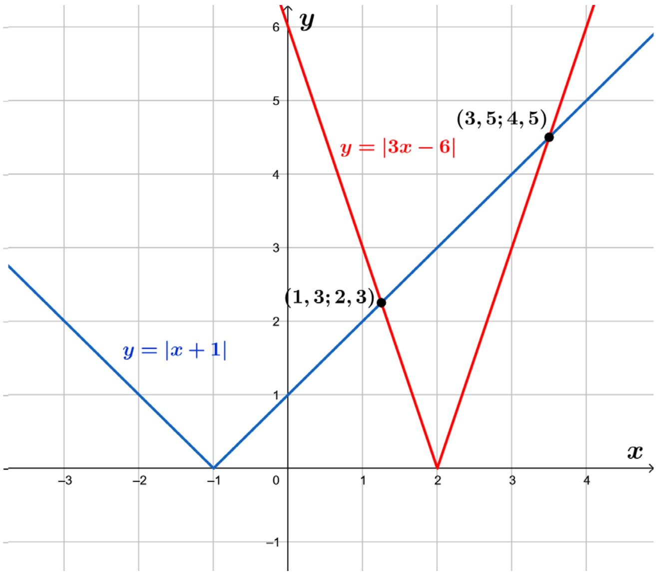
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - (-3)\right)^2 + (2 - 5)^2}$$ Sievennetään CAS-laskimella.
$$= \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Vastaus

$$\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

4.9

a) Piirretään käyrät $y = |x+1|$ ja $y = |3x-6|$.



b) Yhtälön $|x+1| = |3x-6|$ ratkaisuja ovat käyrien $y = |x+1|$ ja $y = |3x-6|$ leikkauspisteiden x-koordinaatit, eli $x \approx 1{,}3$ tai $x \approx 3{,}5$.

c) Ratkaistaan yhtälö $|x+1| = |3x-6|$ laskemalla.

$$|x+1| = |3x-6|$$

$$
\begin{array}{llcll}
x+1 = 3x-6 & |-1 & \text{tai} & x+1 = -(3x-6) & \\
x = 3x-7 & |-3x & & x+1 = -3x+6 & |-1 \\
-2x = -7 & |:(-2) & & x = -3x+5 & |+3x \\
x = \dfrac{7}{2} & & & 4x = 5 & |:4 \\
 & & & x = \dfrac{5}{4} &
\end{array}
$$

Vastaus

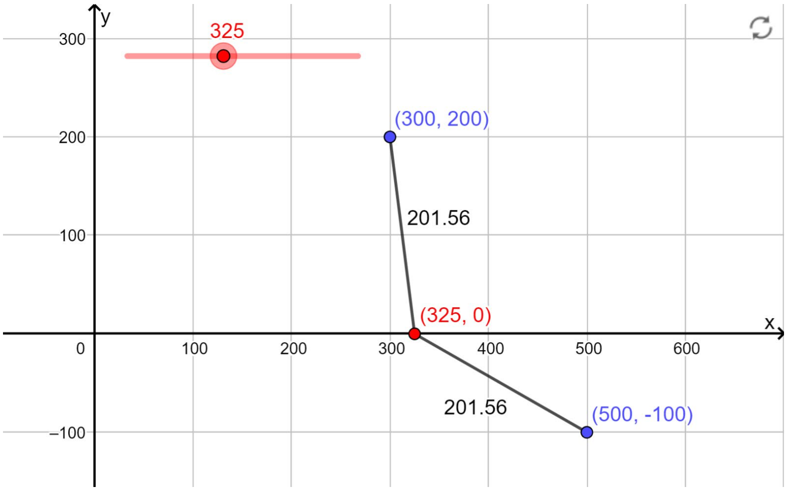
a) ks. kuva

b) $x \approx 1{,}3$ tai $x \approx 3{,}5$

c) $x = \dfrac{5}{4}$ tai $x = \dfrac{7}{2}$

4.10

a) Etsitään appletilla se x-akselilla oleva piste, joka on yhtä kaukana Sadun sekä Sagan kodeista.



Appletin perusteella Satu ja Saga eroavat pisteessä $(325,\ 0)$.

b) Merkitään x-akselilla olevaa Sadun ja Sagan eroamispistettä $(x,\ 0)$.

Eroamispisteen etäisyys Sadun kodista on $\sqrt{(300-x)^2+(200-0)^2}$.

Eroamispisteen etäisyys Sagan kodista on $\sqrt{(500-x)^2+(-100-0)^2}$.

Eroamispisteen etäisyys molempien kodeista on yhtä suuri.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\sqrt{(300-x)^2+(200-0)^2}=\sqrt{(500-x)^2+(-100-0)^2}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x=325$$

Eroamispiste on siis $(325,\ 0)$.

Vastaus
$(325,\ 0)$

4.11

a) Lasketaan janan keskipisteen koordinaatit.

$$(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2})$$
$$= (\frac{-2+4}{2},\ \frac{7+(-1)}{2})$$
$$= (\frac{2}{2},\ \frac{6}{2})$$
$$= (1,\ 3)$$

Lasketaan janan pituus.

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(4-(-2))^2 + (-1-7)^2}$$
$$= \sqrt{6^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{36+64}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$

b) Lasketaan janan keskipisteen koordinaatit.

$$(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2})$$
$$= (\frac{-9+(-12)}{2},\ \frac{11+7}{2})$$
$$= (\frac{-21}{2},\ \frac{18}{2})$$
$$= (-10\frac{1}{2},\ 9)$$

Lasketaan janan pituus.

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(-12-(-9))^2+(7-11)^2}$$
$$=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$$
$$=\sqrt{9+16}$$
$$=\sqrt{25}$$
$$=5$$

c) Määritetään janan keskipisteen koordinaatit.

$$(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2})$$
$$=(\frac{0+a}{2},\ \frac{0+b}{2})$$
$$=(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2})$$

Määritetään janan pituus.

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}$$

Vastaus

a) keskipiste $(1,\ 3)$, pituus 10

b) keskipiste $(-10\frac{1}{2},\ 9)$, pituus 5

c) keskipiste $(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2})$, pituus $\sqrt{a^2+b^2}$

4.12

Janan keskipisteen x-koordinaatin laskemisessa on tapahtunut merkkivirhe. Oikea keskipisteen x-koordinaatti on

$$x = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Janan pituutta laskettaessa on käynyt merkkivirhe sekä x-koordinaattien että y-koordinaattien erotuksessa. Oikea janan pituus on

$$\sqrt{(6-(-3))^2+(-2-1)^2} = \sqrt{9^2+(-3)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

4.13

Janan x-akselilla olevan päätepisteen y-koordinaatti on $0.$ Merkitään tätä päätepistettä $(x,\ 0).$

Janan y-akselilla olevan päätepisteen x-koordinaatti on $0.$ Merkitään tätä päätepistettä $(0,\ y).$

Janan keskipiste on tällöin

$$(\frac{x+0}{2},\ \frac{0+y}{2})=(\frac{x}{2},\ \frac{y}{2}).$$

Toisaalta keskipiste on $(a,\ b).$

Muodostetaan yhtälöt ja ratkaistaan x ja $y.$

$$\frac{x}{2}=a \quad |\cdot 2 \qquad\qquad \frac{y}{2}=b \quad |\cdot 2$$
$$x=2a \qquad\qquad y=2b$$

Janan päätepisteet ovat siis $(2a,\ 0)$ ja $(0,\ 2b).$

Vastaus
$(2a,\ 0)$ ja $(0,\ 2b)$

4.14

Janan toinen päätepiste on $(-6,\ 7)$. Merkitään toista päätepistettä $(x,\ y)$.

Janan keskipiste on tällöin $(\frac{-6+x}{2},\ \frac{7+y}{2})$.

Toisaalta keskipiste on $(4,\ 2)$.

Muodostetaan yhtälöt ja ratkaistaan x ja y.

$$\frac{-6+x}{2}=4 \qquad\qquad \frac{7+y}{2}=2$$

$$x=14 \qquad\qquad y=-3$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Janan toinen päätepiste on $(14,-3)$.

Lasketaan janan pituus.

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(14-(-6))^2+(-3-7)^2}$$
$$=10\sqrt{5}$$

Sievennetään CAS-laskimella.

Vastaus
päätepiste $(14,-3)$, pituus $10\sqrt{5}$

4.15

a) Merkitään x-akselilla olevaa pistettä $(x,\ 0)$.

Pisteen $(x,\ 0)$ etäisyys pisteestä $(-8,\ 5)$ on 13. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$\sqrt{(x-(-8))^2+(0-5)^2}=13$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x=-20$ tai $x=4$

Pisteet ovat $(-20,\ 0)$ ja $(4,\ 0)$.

b) Merkitään y-akselilla olevaa pistettä $(0,\ y)$.

Pisteen $(0,\ y)$ etäisyys pisteestä $(-8,\ 5)$ on 13. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan y.

$\sqrt{(0-(-8))^2+(y-5)^2}=13$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$y=5-\sqrt{105}$ tai $y=5+\sqrt{105}$

Pisteet ovat $(0,\ 5-\sqrt{105})$ ja $(0,\ 5+\sqrt{105})$.

Vastaus

a) $(-20,\ 0)$ ja $(4,\ 0)$

b) $(0,\ 5-\sqrt{105})$ ja $(0,\ 5+\sqrt{105})$

4.16

Olkoon pisteen Q molemmat koordinaatit a. Pisteen $Q=(a,\ a)$ etäisyys pisteestä $(2,\ 0)$ on 10. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$\sqrt{(2-a)^2+(0-a)^2}=10$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$a=-6$ tai $a=8$

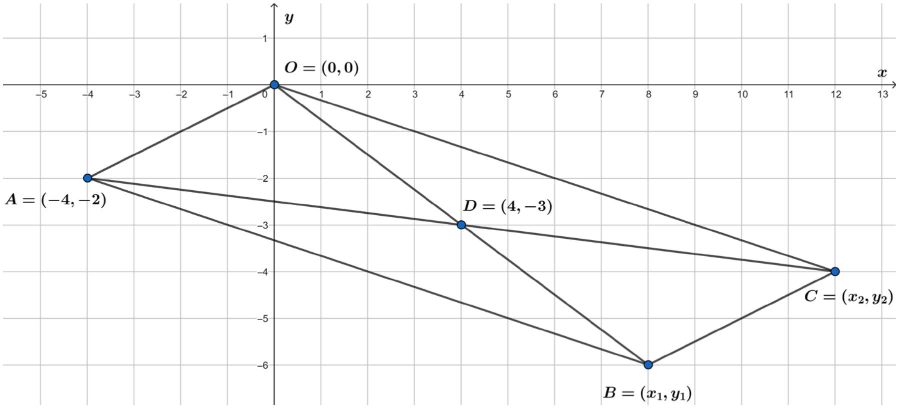
Siis $Q=(-6,-6)$ tai $Q=(8,\ 8)$.

Vastaus

$Q=(-6,-6)$ tai $Q=(8,\ 8)$

4.17

Merkitään tuntemattomia pisteitä $B=(x_1,\, y_1)$ ja $C=(x_2,\, y_2)$.



Suunnikkaan lävistäjien OB ja AC leikkauspiste on $D=(4,-3)$.
Tiedetään, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa, eli piste D on myös lävistäjien keskipiste.

Toisaalta lävistäjän OB keskipiste on $(\frac{0+x_1}{2},\ \frac{0+y_1}{2})=(\frac{x_1}{2},\ \frac{y_1}{2})$.

Muodostetaan yhtälöt ja ratkaistaan x_1 ja y_1.

$$\frac{x_1}{2}=4 \quad |\cdot 2 \qquad\qquad \frac{y_1}{2}=-3 \ |\cdot 2$$

$$x_1=8 \qquad\qquad y_1=-6$$

Siis $B=(8,-6)$.

Ratkaistaan vastaavasti pisteen $C=(x_2,\, y_2)$ koordinaatit.

Lävistäjän AC keskipiste on $(\frac{-4+x_2}{2},\frac{-2+y_2}{2})$.

Muodostetaan yhtälöt ja ratkaistaan x_2 ja y_2.

$$\frac{-4+x_2}{2}=4 \qquad \frac{-2+y_2}{2}=-3$$
$$x_2=12 \qquad y=-4$$

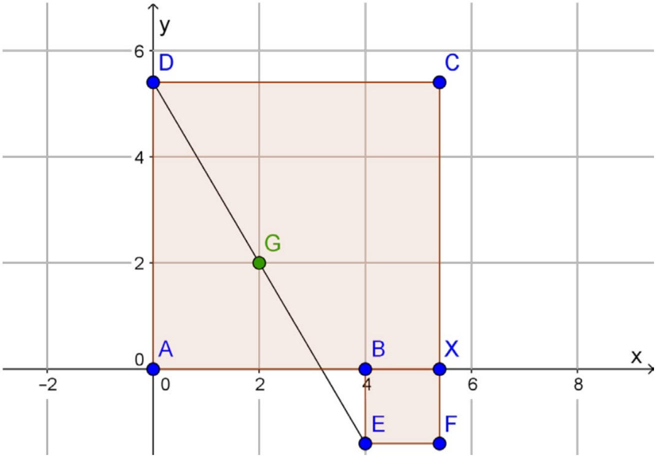
Ratkaistaan CAS-laskimella.

Siis $C=(12,-4)$.

Vastaus
$B=(8,-6)$ ja $C=(12,-4)$

4.18

Kuvassa esimerkki tilanteesta arvolla $x = 5,4.$



a) Koska neliön $AXCD$ kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, jokaisen sivun pituus on $x.$ Koska neliön sivut ovat kohtisuorassa, niin $D = (0,\ x).$

Lasketaan x-akselin alapuolisen neliön $XBEF$ sivun BX pituus. Tiedetään, että $B = (4,\ 0)$ ja $X = (x,\ 0).$

$$BX = \sqrt{(x-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2} = x-4$$

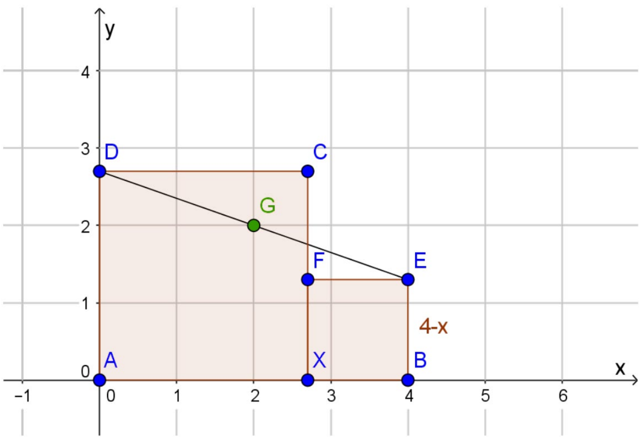
Siis neliön $XBEF$ jokaisen sivun pituus on $x - 4.$ Tällöin $E = (4, -(x-4)) = (4,\ 4-x).$

b) Lasketaan janan DE keskipiste G.

$$G = (\frac{0+4}{2},\ \frac{x+4-x}{2})$$
$$= (\frac{4}{2},\ \frac{4}{2})$$
$$= (2,\ 2)$$

Huomataan, että janan DE keskipisteen G arvo ei riipu muuttujasta x.

c) Kuvassa esimerkki tilanteesta arvolla $x = 2{,}7$.



Kun $0 < x < 4$, niin $D = (x,\ 0)$ ja $E = (4,\ 4-x)$, kuten a-kohdassakin. Siis $G = (2,\ 2)$ kuten b-kohdassakin, joten sen arvo ei riipu muuttujasta x.

Vastaus

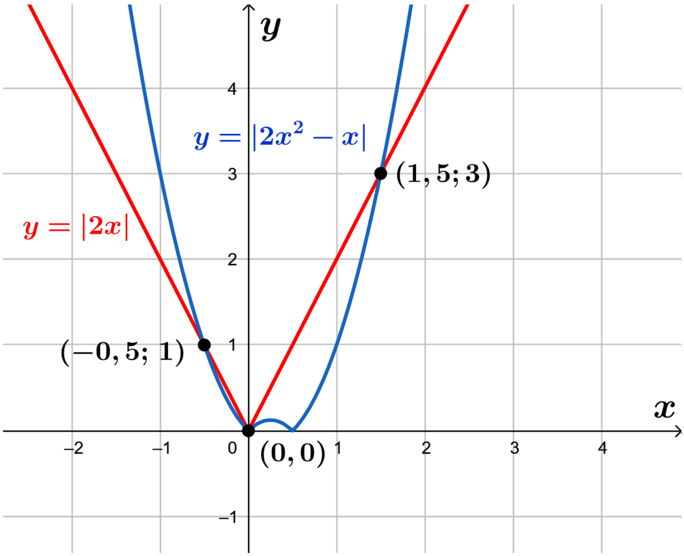
a) $D = (0,\ x)$ ja $E = (4,\ 4-x)$

b) Keskipiste on $(2,\ 2)$.

c) Ei vaikuta, janan keskipiste on tässäkin tapauksessa $(2,\ 2)$.

4.19

a) Piirretään käyrät $y = \left|2x^2 - x\right|$ ja $y = \left|2x\right|$.



b) Yhtälön $\left|2x^2 - x\right| = \left|2x\right|$ ratkaisuja ovat käyrien $y = \left|2x^2 - x\right|$ ja $y = \left|2x\right|$ leikkauspisteiden x-koordinaatit, eli $x \approx -0,5$, $x \approx 0$ tai $x \approx 1,5$.

c) Ratkaistaan yhtälö $\left|2x^2 - x\right| = |2x|$ laskemalla.

$$\left|2x^2 - x\right| = |2x|$$

$2x^2 - x = 2x \quad |-2x$ tai $2x^2 - x = -2x \quad |+2x$

$2x^2 - 3x = 0$ $\qquad$ $2x^2 + x = 0$

$x(2x-3) = 0$ $\qquad$ $x(2x+1) = 0$

$x = 0$ tai $2x - 3 = 0 \quad |+3$ $\qquad$ $x = 0$ tai $2x + 1 =$

$2x = 3 \quad |:2$ $\qquad$ $2x = -1 \quad |:2$

$x = \dfrac{3}{2}$ $\qquad$ $x = -\dfrac{1}{2}$

Vastaus

b) $x \approx -0{,}5, \quad x \approx 0$ tai $x \approx 1{,}5$

c) $x = -\dfrac{1}{2}, \quad x = 0$ tai $x = \dfrac{3}{2}$

4.20

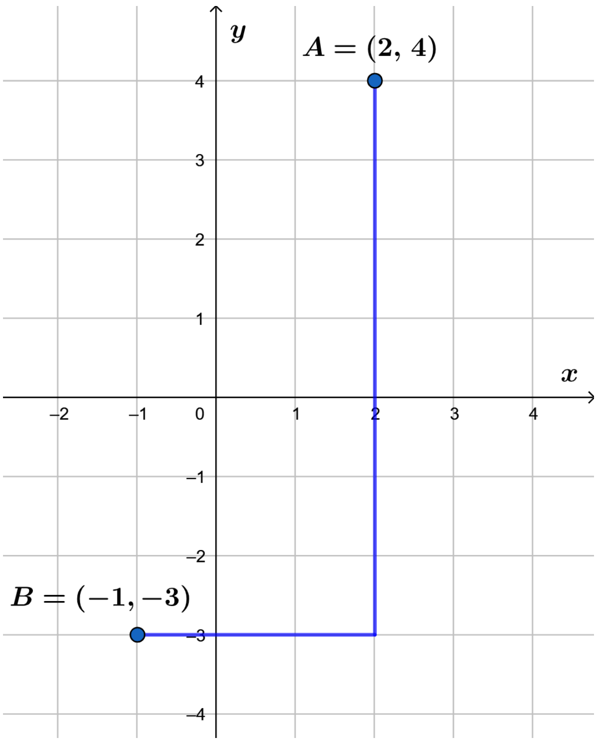
a) Lasketaan pisteiden $(-3,\ 1)$ ja $(7,-9)$ taksinkuljettajan etäisyys.

$$\begin{aligned}
&|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\
&= |7-(-3)| + |-9-1| \\
&= |10| + |-10| \\
&= 10 + 10 \\
&= 20
\end{aligned}$$

b) Lasketaan pisteiden $(2,\ 4)$ ja $(-1,-3)$ taksinkuljettajan etäisyys.

$$\begin{aligned}
&|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\
&= |-1-2| + |-3-4| \\
&= |-3| + |-7| \\
&= 3 + 7 \\
&= 10
\end{aligned}$$

Pisteitä $(2,\ 4)$ ja $(-1,-3)$ yhdistävä reitti, jonka pituus on taksinkuljettajan etäisyys, voidaan piirtää yhdistämällä pisteet x-akselin ja y-akselin suuntaisilla janoilla. Esimerkiksi:

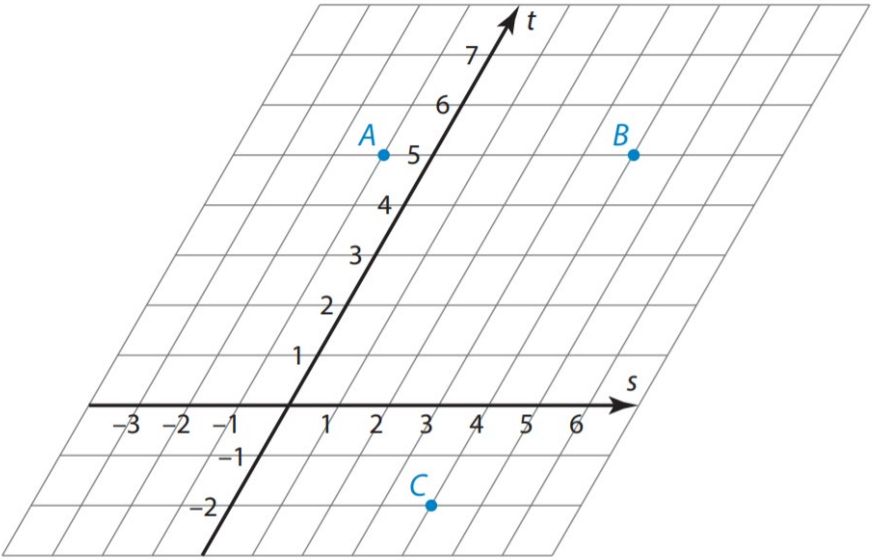


Vastaus

a) taksinkuljettajan etäisyys on 20

b) taksinkuljettajan etäisyys on 10

4.21



a) Jana AB on s -akselin suuntainen, jolloin sen pituus $AB = 5$ voidaan laskea ruutuina kuvasta.

Vastaavasti jana BC on t -akselin suuntainen, jolloin sen pituus $BC = 7$ voidaan laskea ruutuina kuvasta.

Ratkaistaan janan AC pituus kosinilauseella.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 60°$$

$$AC^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 60°$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$AC = \sqrt{39} \approx 6{,}2$$

b) Lasketaan kolmion ABC pinta-ala sinikaavalla.

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{35\sqrt{3}}{4} \approx 15,2 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $AB = 5$, $BC = 7$ ja $AC = \sqrt{39} \approx 6,2$

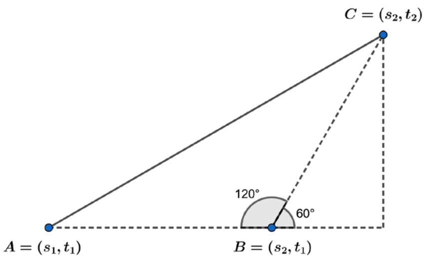
b) $\frac{35\sqrt{3}}{4} \approx 15,2$

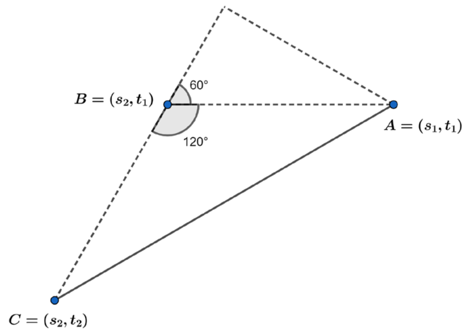
4.22

a) Pisteet $A = (s_1,\ t_1)$, $B = (s_2,\ t_1)$ ja $C = (s_2,\ t_2)$ määräävät kolmion ABC, jonka avulla voidaan laskea kysytyn sivun AC pituus. Käydään läpi eri tapaukset.

Tapaukset 1 ja 2.

$s_1 < s_2$ ja $t_1 < t_2$ tai $s_2 < s_1$ ja $t_2 < t_1$





Jana AB on s -akselin suuntainen, joten sen pituus on $AB = |s_2 - s_1|$.

Vastaavasti jana BC on t -akselin suuntainen, joten sen pituus on $BC = |t_2 - t_1|$.

Ratkaistaan kysytty etäisyys AC kosinilauseella.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ$$

$$AC^2 = \left(\left|s_2 - s_1\right|\right)^2 + \left(\left|t_2 - t_1\right|\right)^2 - 2 \cdot \left|s_2 - s_1\right| \cdot \left|t_2 - t_1\right| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$AC^2 = (s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2 + \left|s_2 - s_1\right|\left|t_2 - t_1\right|$$

$$AC = \sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2 + \left|s_2 - s_1\right|\left|t_2 - t_1\right|}$$

Sievennetään vielä termi $\left|s_2 - s_1\right|\left|t_2 - t_1\right|$.

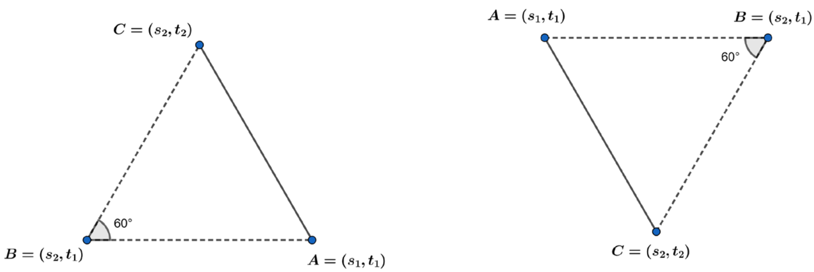
Tapauksessa 1 $s_1 < s_2$ ja $t_1 < t_2$, jolloin
$\left|s_2 - s_1\right|\left|t_2 - t_1\right| = (s_2 - s_1)(t_2 - t_1)$.

Tapauksessa 2 $s_2 < s_1$ ja $t_2 < t_1$, jolloin
$\left|s_2 - s_1\right|\left|t_2 - t_1\right| = -(s_2 - s_1) \cdot (-(t_2 - t_1)) = (s_2 - s_1)(t_2 - t_1)$.

Siis tapauksissa 1 ja 2 kysytty etäisyys on
$AC = \sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2 + (s_2 - s_1)(t_2 - t_1)}$.

Tapaukset 3 ja 4.

$s_2 < s_1$ ja $t_1 < t_2$ tai $s_1 < s_2$ ja $t_2 < t_1$



Vastaavasti kuten tapauksissa 1 ja 2, $AB = \left|s_2 - s_1\right|$ ja
$BC = \left|t_2 - t_1\right|$.

Ratkaistaan kysytty etäisyys AC kosinilauseella.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 60°$$
$$AC^2 = \left(|s_2 - s_1|\right)^2 + \left(|t_2 - t_1|\right)^2 - 2 \cdot |s_2 - s_1| \cdot |t_2 - t_1| \cdot \frac{1}{2}$$
$$AC^2 = (s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2 - |s_2 - s_1||t_2 - t_1|$$
$$AC = \sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2 - |s_2 - s_1||t_2 - t_1|}$$

Sievennetään vielä termi $|s_2 - s_1||t_2 - t_1|$.

Tapauksessa 3 $s_2 < s_1$ ja $t_1 < t_2$, jolloin
$|s_2 - s_1||t_2 - t_1| = -(s_2 - s_1)(t_2 - t_1)$.

Tapauksessa 4 $s_1 < s_2$ ja $t_2 < t_1$, jolloin
$|s_2 - s_1||t_2 - t_1| = (s_2 - s_1) \cdot (-(t_2 - t_1)) = -(s_2 - s_1)(t_2 - t_1)$.

Siis tapauksissa 3 ja 4 kysytty etäisyys on
$$AC = \sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2 - (-(s_2 - s_1)(t_2 - t_1))}$$
$$= \sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2 + (s_2 - s_1)(t_2 - t_1)}.$$

Näin ollen kaikissa tapauksissa pisteiden (s_1, s_2) ja (t_1, t_2) välinen etäisyys on $\sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2 + (s_2 - s_1)(t_2 - t_1)}$.

b) Sijoitetaan a-kohdan kaavaan $(s_1, s_2) = (0, 0)$ ja $(s_2, t_2) = (s, t)$.
$$\sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2 + (s_2 - s_1)(t_2 - t_1)}$$
$$= \sqrt{(s-0)^2 + (t-0)^2 + (s-0)(t-0)}$$
$$= \sqrt{s^2 + t^2 + st}$$

Vastaus

a) $\sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2 + (s_2 - s_1)(t_2 - t_1)}$

b) $\sqrt{s^2 + t^2 + st}$