18.1

a) Pisteen $A=(2,\ 7)$ paikkavektori on $\overline{OA}=2i+7j$.

Lasketaan vektorin $\overline{OA}$ pituus.

$$|\overline{OA}|=\sqrt{2^2+7^2}$$
$$=\sqrt{4+49}$$
$$=\sqrt{53}$$

$|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$, missä $a_x=2$ ja $a_y=7$.

b) Pisteen $B=(3,-5)$ paikkavektori on $\overline{OB}=3i-5j$.

Lasketaan vektorin $\overline{OB}$ pituus.

$$|\overline{OB}|=\sqrt{3^2+(-5)^2}$$
$$=\sqrt{9+25}$$
$$=\sqrt{34}$$

$|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$, missä $a_x=3$ ja $a_y=-5$.

c) Pisteen $C=(-9,\ 0)$ paikkavektori on $\overline{OC}=-9i+0j=-9i$.

Lasketaan vektorin $\overline{OC}$ pituus.

$$|\overline{OC}|=\sqrt{(-9)^2+0^2}$$
$$=\sqrt{81}$$
$$=9$$

$|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$, missä $a_x=-9$ ja $a_y=0$.

d) Pisteen $D = (\sqrt{5}, -2)$ paikkavektori on $\overline{OD} = \sqrt{5}i - 2j$.

Lasketaan vektorin $\overline{OD}$ pituus.

$$
\begin{aligned}
|\overline{OD}| &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2} \\
&= \sqrt{5+4} \\
&= \sqrt{9} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, missä

$a_x = \sqrt{5}$ ja $a_y = -2$.

Vastaus

a) $\overline{OA} = 2i + 7j$, $|\overline{OD}| = \sqrt{53}$

b) $\overline{OB} = 3i - 5j$, $|\overline{OB}| = \sqrt{34}$

c) $\overline{OC} = -9i$, $|\overline{OC}| = 9$

d) $\overline{OD} = \sqrt{5}i - 2j$, $|\overline{OD}| = 3$

18.2

Pisteen koordinaatit voidaan lukea sen paikkavektorin komponenttien kertoimista. Kun pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = x\overline{i} + y\overline{j}$, pisteen koordinaatit ovat (x, y).

a) Pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = 3\overline{i} - 8\overline{j}$, joten pisteen koordinaatit ovat $(3, -8)$.

b) Pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = 7\overline{j} = 0\overline{i} + 7\overline{j}$, joten pisteen koordinaatit ovat $(0,\ 7)$.

c) Pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = -\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j}$, joten pisteen koordinaatit ovat $(-1,\ \frac{2}{3})$.

Vastaus

a) $(3, -8)$

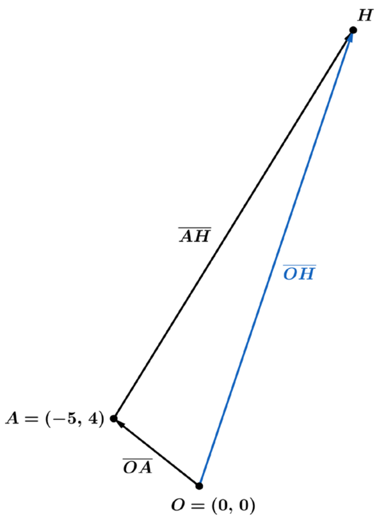
b) $(0,\ 7)$

c) $(-1,\ \frac{2}{3})$

18.3

Selvitetään pisteestä $A = (-5,\ 4)$ alkavan vektorin $9\overline{i} + 23\overline{j}$ loppupisteen H koordinaatit määrittämällä sen paikkavektori $\overline{OH}$.

Hahmotellaan mallikuva.



Määritetään pisteen H paikkavektori.

$$
\begin{aligned}
\overline{OH} &= \overline{OA} + \overline{AH} \\
&= -5\overline{i} + 4\overline{j} + 9\overline{i} + 23\overline{j} \\
&= 4\overline{i} + 27\overline{j}
\end{aligned}
$$

$$\overline{OA} = -5\overline{i} + 4\overline{j}$$
$$\overline{AH} = 9\overline{i} + 23\overline{j}$$

Piste $H = (4,\ 27)$.

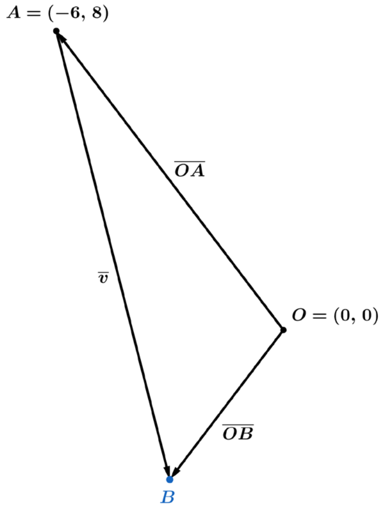
Vastaus
$H = (4,\ 27)$

18.4

Merkitään vektorin alkupistettä kirjaimella A ja loppupistettä kirjaimella B.

On selvitettävä loppupiste B kun lähdetään pisteestä A ja kuljetaan vektori $\overline{v}$.

Määritetään loppupisteen B paikkavektori pisteen A paikkavektorin $\overline{OA}$ ja vektorin $\overline{v}$ avulla.



$$\overline{OA} = -6\overline{i} + 8\overline{j}$$
$$\overline{v} = 3\overline{i} - 12\overline{j}$$

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{v} \\ &= -6\overline{i} + 8\overline{j} + 3\overline{i} - 12\overline{j} \\ &= -3\overline{i} - 4\overline{j}\end{aligned}$$

Loppupiste B on siis $(-3, -4)$.

Vastaus

$(-3, -4)$

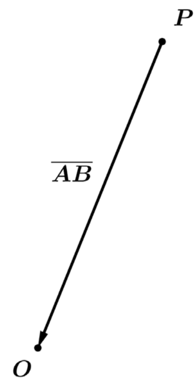
18.5

a) Määritetään vektori $\overline{AB}$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} \\ &= (5-9)\overline{i} + (3-13)\overline{j} \\ &= -4\overline{i} - 10\overline{j}\end{aligned}$$

$A = (x_1,\ y_1) = (9,\ 13)$
$B = (x_2,\ y_2) = (5,\ 3)$

b) Määritetään alkupisteen P paikkavektori. Pisteeseen P päästään origosta kulkemalla vektorin $\overline{AB}$ vastavektori $\overline{BA}$.



$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{BA} \\ &= -\overline{AB} \\ &= -(-4\overline{i} - 10\overline{j}) \\ &= 4\overline{i} + 10\overline{j}\end{aligned}$$

$\overline{BA} = -\overline{AB}$
$\overline{AB} = -4\overline{i} - 10\overline{j}$

Loppupiste P on siis $P = (4,\ 10)$.

Vastaus

a) $\overline{AB} = -4\overline{i} - 10\overline{j}$

b) $P = (4,\ 10)$

18.6

a) Määritetään vektori $\overline{AB}$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} \\ &= (6-2)\overline{i} + (9-(-5))\overline{j} \\ &= 4\overline{i} + 14\overline{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= (x_1,\ y_1) = (2, -5) \\ B &= (x_2,\ y_2) = (6,\ 9)\end{aligned}$$

b) Määritetään vektori $\overline{AB}$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} \\ &= (2-6)\overline{i} + (5-9)\overline{j} \\ &= -4\overline{i} - 4\overline{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= (x_1,\ y_1) = (6,\ 9) \\ B &= (x_2,\ y_2) = (2,\ 5)\end{aligned}$$

c) Määritetään vektori $\overline{AB}$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} \\ &= (9-(-5))\overline{i} + (6-2)\overline{j} \\ &= 14\overline{i} + 4\overline{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= (x_1,\ y_1) = (-5,\ 2) \\ B &= (x_2,\ y_2) = (9,\ 6)\end{aligned}$$

d) Määritetään vektori $\overline{AB}$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} \\ &= (6-5)\overline{i} + (9-2)\overline{j} \\ &= \overline{i} + 7\overline{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= (x_1,\ y_1) = (5,\ 2) \\ B &= (x_2,\ y_2) = (6,\ 9)\end{aligned}$$

Vastaus
a–4, b–2, c–5, d–1

18.7

a) Muodostetaan vektori $\overline{AB}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (22-(-14))\overline{i} + (-43-34)\overline{j} \\ &= 36\overline{i} - 77\overline{j}\end{aligned}$$

Vektori pisteestä $A = (-14,\ 34)$ pisteeseen $B = (22, -43)$.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{36^2 + (-77)^2} = 85$$

b) Muodostetaan vektori $\overline{CD}$ ja lauseke sen pituudelle.

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= (4t-t)\overline{i} + (12-89)\overline{j} \\ &= 3\overline{i} - 77\overline{j}\end{aligned}$$

Vektori pisteestä $\mathrm{C} = (t,\ 89)$ pisteeseen $\mathrm{D} = (4t, 12)$.

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(3t)^2 + (-77)^2} = \sqrt{9t^2 + 5929}$$

Pituudet $|\overline{CD}|$ ja $|\overline{AB}|$ ovat yhtä suuret. Ratkaistaan t.

$$\begin{aligned}&|\overline{CD}| = |\overline{AB}| \\ &\sqrt{9t^2 + 5929} = 85 \\ &t = -12 \quad \text{tai} \quad t = 12\end{aligned}$$

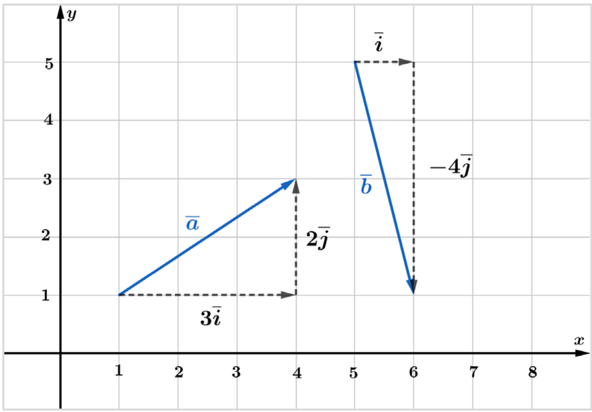
Ratkaistaan CAS-laskimella.

Vastaus

a) $|\overline{AB}| = 85$

b) $t = -12$ tai $t = 12$

18.8



a) Kuvasta nähdään, että $\overline{a} = 3i + 2j$.

Lasketaan vektorin $\overline{a}$ pituus.

$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

b) Kuvasta nähdään, että $\overline{b} = i - 4j$.

Lasketaan vektorin $\overline{b}$ pituus.

$|\overline{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

c) Määritetään summavektori $5\overline{a} - 2\overline{b}$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.

$$\begin{aligned} 5\overline{a} - 2\overline{b} &= 5(3\overline{i} + 2\overline{j}) - 2(\overline{i} - 4\overline{j}) \\ &= 15\overline{i} + 10\overline{j} - 2\overline{i} + 8\overline{j} \\ &= 13\overline{i} + 18\overline{j} \end{aligned}$$

$\overline{a} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$, $\overline{b} = \overline{i} - 4\overline{j}$

Lasketaan vektorin $5\overline{a} - 2\overline{b}$ pituus.

$$\begin{aligned} |5\overline{a} - 2\overline{b}| &= \sqrt{13^2 + 18^2} \\ &= \sqrt{493} \end{aligned}$$

$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, missä
$a_x = 13$ ja $a_y = 18$.

Vastaus

a) $\overline{a} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$, $|\overline{a}| = \sqrt{13}$

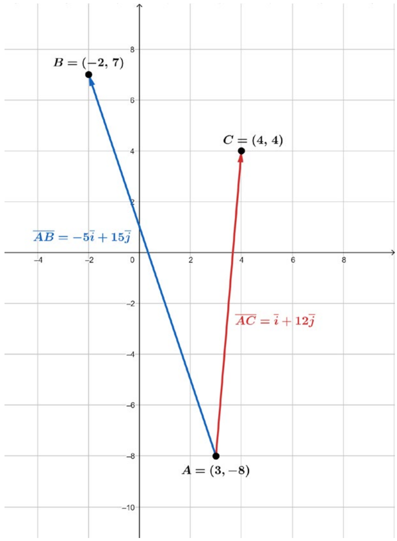
b) $\overline{b} = \overline{i} - 4\overline{j}$, $|\overline{b}| = \sqrt{17}$

c) $5\overline{a} - 2\overline{b} = 13\overline{i} + 18\overline{j}$, $|5\overline{a} - 2\overline{b}| = \sqrt{493}$

18.9

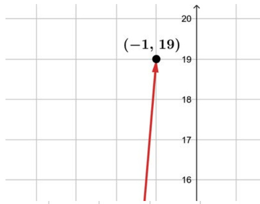
a) Merkitään koordinaatistoon pisteet
$A=(3,-8)$, $B=(-2,\ 7)$ ja
$C=(4,\ 4)$.

Piirretään vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.



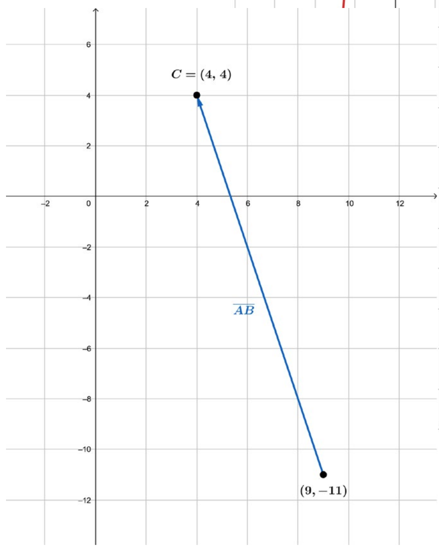
Vektoreiksi saadaan
$\overline{AB}=-5\overline{i}+15\overline{j}$ ja
$\overline{AC}=\overline{i}+12\overline{j}$.

b) Kopioidaan vektori $\overline{AC}$ ja siirretään se alkamaan pisteestä B.



Päädytään pisteeseen $(-1,\ 19)$.

c) Kopioidaan vektori $\overline{AB}$ ja siirretään sitä niin, että se loppuu pisteeseen C.



Vektori alkaa pisteestä $(9, -11)$.

Vastaus

a) $\overline{AB} = 3 - 5\overline{i} + 15\overline{j}$, $\overline{AC} = \overline{i} + 12\overline{j}$

b) $(-1,\ 19)$

c) $(9, -11)$

18.10

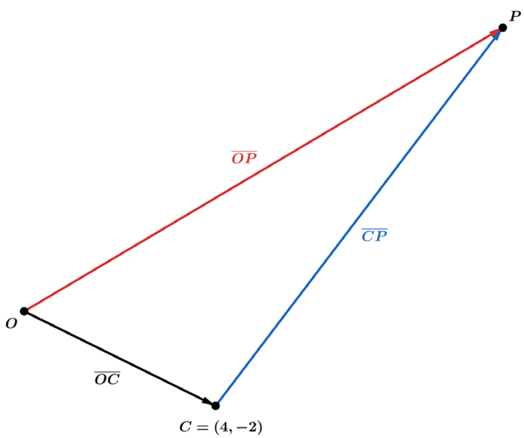
a) Pisteiden $A=(2,\ 3)$, $B=(0,\ 7)$ ja $C=(4,-2)$ paikkavektorit ovat $\overline{OA}=2\overline{i}+3\overline{j}$, $\overline{OB}=0\overline{i}+7\overline{j}=7\overline{j}$ ja $\overline{OC}=4\overline{i}-2\overline{j}$.

Paikkavektorien summa on

$$\begin{aligned}\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}&=2\overline{i}+3\overline{j}+7\overline{j}+4\overline{i}-2\overline{j}\\&=6\overline{i}+8\overline{j}\end{aligned}$$

b) On selvitettävä loppupiste P, kun lähdetään pisteestä $C=(4,-2)$ ja kuljetaan summavektori $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=6\overline{i}+8\overline{j}$. Kutsutaan tätä vektoria nimellä $\overline{CP}$.

Hahmotellaan mallikuva.



Määritetään pisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP} \qquad \overline{OC} = 4\overline{i} - 2\overline{j} \text{ ja } \overline{CP} = 6\overline{i} + 8\overline{j}$$
$$= 4\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{i} + 8\overline{j}$$
$$= 10\overline{i} + 6\overline{j}$$

Loppupiste $P = (10,\ 6)$.

Vastaus

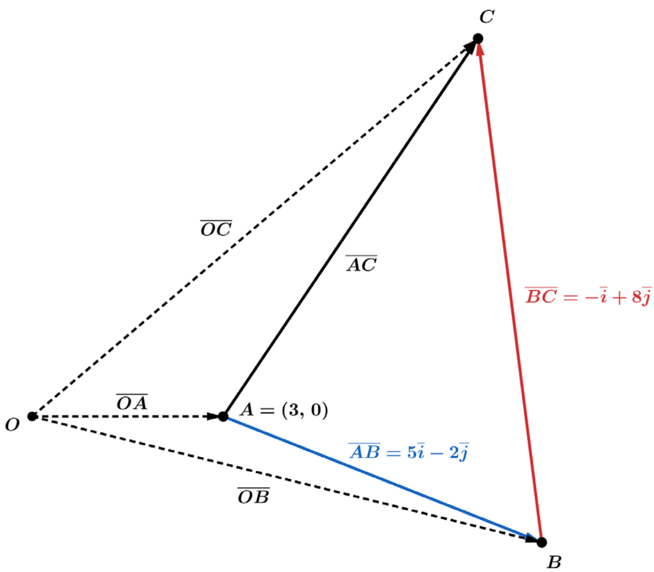
a) $6\overline{i} + 8\overline{j}$

b) $P = (10,\ 6)$

18.11

a) Kolmion kärkien B ja C koordinaatit saadaan selville määrittämällä niiden paikkavektorit $\overline{OB}$ ja $\overline{OC}$.

Hahmotellaan mallikuva.



Pisteen $A = (3,\ 0)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 3\overline{i}$.

Määritetään pisteen B paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &= 3\overline{i} + 5\overline{i} - 2\overline{j} \\ &= 8\overline{i} - 2\overline{j}\end{aligned}$$

$\overline{OA} = 3\overline{i}$, $\overline{AB} = 5\overline{i} - 2\overline{j}$

Kärki B on siis $B = (8, -2)$.
Määritetään pisteen C paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OB} + \overline{BC} \\ &= 8\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{i} + 8\overline{j} \\ &= 7\overline{i} + 6\overline{j}\end{aligned}$$

$\overline{OB} = 8\overline{i} - 2\overline{j},\ \overline{BC} = -\overline{i} + 8\overline{j}$

Kärki C on siis $C = (7,6)$.

b) Jos kolmio on suorakulmainen, sen sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen.

Lasketaan saadun kolmion sivujen pituudet ja tutkitaan, toteuttavatko ne Pythagoraan lauseen.

Sivun AB pituus on sama kuin vektorin $\overline{AB} = 5\overline{i} - 2\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

Sivun BC pituus on sama kuin vektorin $\overline{BC} = -\overline{i} + 8\overline{j}$ pituus.

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 8^2} = \sqrt{1 + 64} = \sqrt{65}$$

Sivun AC pituus on sama kuin vektorin $\overline{AC}$ pituus. Määritetään vektori $\overline{AC}$ vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ avulla ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 5\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{i} + 8\overline{j} = 4\overline{i} + 6\overline{j}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

Nähdään, että sivuista pisin on BC. Tutkitaan, toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

$$
\begin{aligned}
|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 &= |\overline{BC}|^2 \\
29 + 52 &= 65 \\
81 &= 65 \\
&\text{epätosi}
\end{aligned}
$$

Kolmion sivujen pituudet eivät toteuta Pythagoraan lausetta, joten kolmio ei ole suorakulmainen.

Vastaus

a) $B = (8, -2),\ \ C = (7,\ 6)$

b) ei ole

18.12

a) Pisteen $A=(-7,\ 1)$ paikkavektori on $\overline{OA}=-7\overline{i}+\overline{j}$.

b) Pisteen B paikkavektori on $\overline{OB}=6\overline{i}-8\overline{j}$, joten pisteen koordinaatit ovat $(6,-8)$.

c) Lasketaan vektorien $\overline{OA}$ ja $\overline{OB}$ pituudet.

$$\begin{aligned}|\overline{OA}|&=\sqrt{(-7)^2+1^2}\\&=\sqrt{49+1}\\&=\sqrt{50}\\&=\sqrt{25\cdot 2}\\&=5\sqrt{2}\end{aligned}$$

$|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$, missä

$a_x=-7$ ja $a_y=1$

$$\begin{aligned}|\overline{OB}|&=\sqrt{6^2+(-8)^2}\\&=\sqrt{36+64}\\&=\sqrt{100}\\&=10\end{aligned}$$

$|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$, missä

$a_x=6$ ja $a_y=-8$

Vastaus

a) $\overline{OA}=-7\overline{i}+\overline{j}$

b) $B=(6,-8)$

c) $|\overline{OA}|=5\sqrt{2}$ ja $|\overline{OB}|=10$

18.13

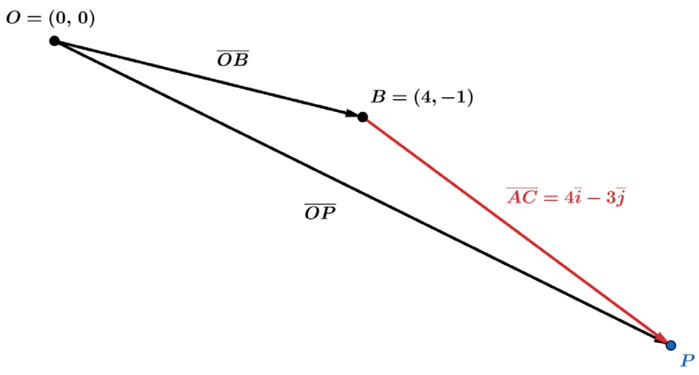
a) Määritetään vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$, kun $A=(-2,-3)$, $B=(4,-1)$ ja $C=(2,-6)$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (x_2-x_1)\overline{i}+(y_2-y_1)\overline{j} && \color{blue}{A=(x_1,y_1)=(-2,-3)}\\ &= (4-(-2))\overline{i}+(-1-(-3))\overline{j} && \color{blue}{B=(x_2,y_2)=(4,-1)}\\ &= 6\overline{i}+2\overline{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (x_2-x_1)\overline{i}+(y_2-y_1)\overline{j} && \color{blue}{A=(x_1,y_1)=(-2,-3)}\\ &= (2-(-2))\overline{i}+(-6-(-3))\overline{j} && \color{blue}{C=(x_2,y_2)=(2,-6)}\\ &= 4\overline{i}-3\overline{j}\end{aligned}$$

b) Kutsutaan pisteestä B alkavan vektorin $\overline{AC}$ loppupistettä pisteeksi P. Pisteen koordinaatit saadaan selville määrittämällä sen paikkavektori.

Hahmotellaan mallikuva



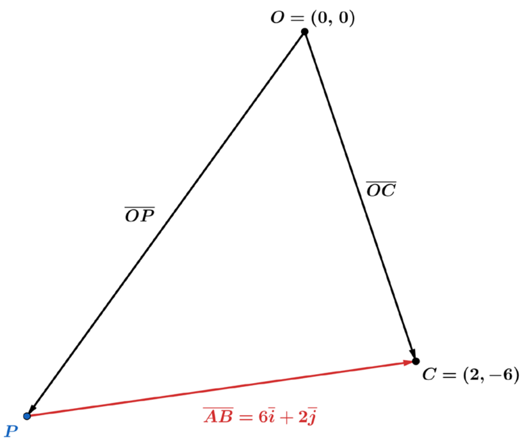
Määritetään pisteen P paikkavektori.

$$\overline{OP} = \overline{OB} + \overline{BP} \qquad \overline{BP} = \overline{AC}$$
$$= \overline{OB} + \overline{AC} \qquad \overline{OB} = 4\overline{i} - \overline{j},\ \overline{AC} = 4\overline{i} - 3\overline{j}$$
$$= 4\overline{i} - \overline{j} + 4\overline{i} - 3\overline{j}$$
$$= 8\overline{i} - 4\overline{j}$$

Päädytään siis pisteeseen $(8, -4)$.

c) Kutsutaan pisteeseen C päättyvän vektorin $\overline{AB}$ alkupistettä pisteeksi P. Pisteen koordinaatit saadaan selville määrittämällä sen paikkavektori.

Hahmotellaan mallikuva.



Määritetään pisteen P paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OC} + \overline{CP} \\ &= \overline{OC} - \overline{AB} \\ &= 2\overline{i} - 6\overline{j} - (6\overline{i} + 2\overline{j}) \\ &= 2\overline{i} - 6\overline{j} - 6\overline{i} - 2\overline{j} \\ &= -4\overline{i} - 8\overline{j}\end{aligned}$$

$\overline{CP} = -\overline{AB}$

$\overline{OC} = 2\overline{i} - 6\overline{j}, \ \overline{AB} = 6\overline{i} + 2\overline{j}$

Vektorin alkupiste $P = (-4, -8)$.

Vastaus

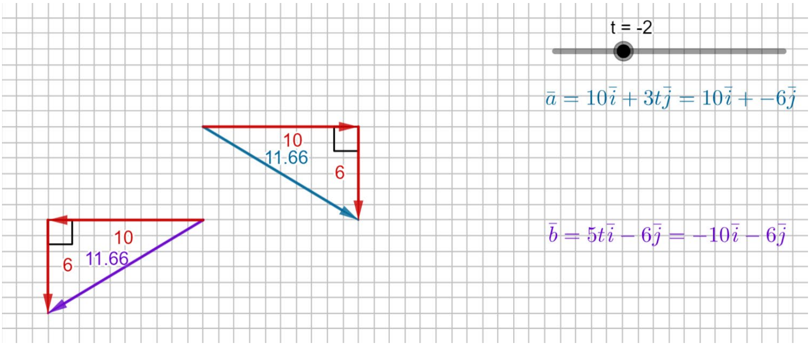
a) $\overline{AB} = 6\overline{i} + 2\overline{j}, \ \overline{AC} = 4\overline{i} - 3\overline{j}$

b) $(8, -4)$

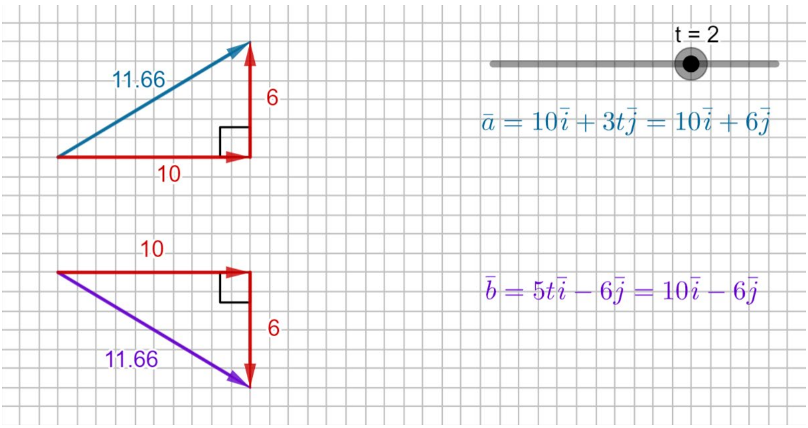
c) $(-4, -8)$

18.14

a) Määritetään vakion t arvot appletilla. Löydetään kaksi arvoa.



Kun $t = -2$, kummankin vektorin pituus on $11,66$.



Kun $t = 2$, kummankin vektorin pituus on $11,66$.

b) Muodostetaan vektorin $\overline{a} = 10\overline{i} + 3t\overline{j}$ pituuden lauseke.

$$|\overline{a}| = \sqrt{10^2 + (3t)^2} = \sqrt{100 + 9t^2}$$

Muodostetaan vektorin $\overline{b} = 5t\overline{i} - 6\overline{j}$ pituuden lauseke.

$$|\overline{b}| = \sqrt{(5t)^2 + (-6)^2} = \sqrt{25t^2 + 36}$$

Pituudet $|\overline{a}|$ ja $|\overline{b}|$ ovat yhtä suuret. Ratkaistaan t.

$$\begin{aligned} |\overline{a}| &= |\overline{b}| \\ \sqrt{100 + 9t^2} &= \sqrt{25t^2 + 36} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ t = -2 \ \text{ tai } \ t &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus

$t = -2$ tai $t = 2$

18.15

Muodostetaan vektorin $\frac{1}{3}\overline{u}-5\overline{v}$ lauseke vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ avulla.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\overline{u}-5\overline{v}&=\frac{1}{3}(6\overline{i}-12\overline{j})-5(-\overline{i}+4\overline{j}) \qquad \overline{u}=6\overline{i}-12\overline{j},\ \overline{v}=-\overline{i}+4\overline{j}\\&=2\overline{i}-4\overline{j}+5\overline{i}-20\overline{j}\\&=7\overline{i}-24\overline{j}\end{aligned}$$

Lasketaan vektorin $\frac{1}{3}\overline{u}-5\overline{v}$ pituus.

$$\left|\frac{1}{3}\overline{u}-5\overline{v}\right|=\sqrt{7^2+(-24)^2}=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25$$

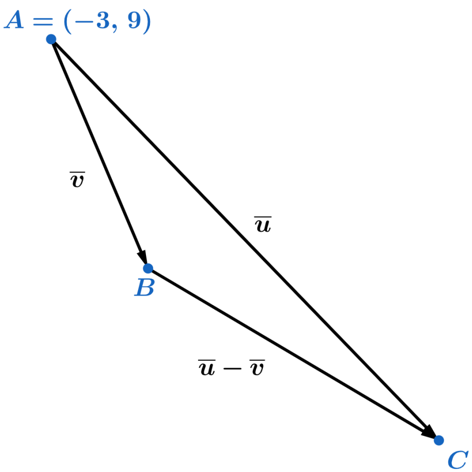
Vastaus

25

18.16

Merkitään vektorin $\overline{v} = 5\overline{i} - 12\overline{j}$ loppupistettä kirjaimella B ja vektorin $\overline{u} = 20\overline{i} - 21\overline{j}$ loppupistettä kirjaimella C.

Hahmotellaan mallikuva.



Kolmion kolmannen sivun BC määrää vektori $-\overline{v} + \overline{u} = \overline{u} - \overline{v}$.

Määritetään vektori $\overline{u} - \overline{v}$.

$$\begin{aligned} \overline{u} - \overline{v} &= 20\overline{i} - 21\overline{j} - (5\overline{i} - 12\overline{j}) \qquad \overline{u} = 20\overline{i} - 21\overline{j},\ \overline{v} = 5\overline{i} - 12\overline{j} \\ &= 20\overline{i} - 21\overline{j} - 5\overline{i} + 12\overline{j} \\ &= 15\overline{i} - 9\overline{j} \end{aligned}$$

a) Lasketaan kolmion sivujen pituudet vektorien $\overline{v} = 5\overline{i} - 12\overline{j}$, $\overline{u} = 20\overline{i} - 21\overline{j}$ ja $\overline{u} - \overline{v} = 15\overline{i} - 9\overline{j}$ avulla.

$$AB = |\overline{v}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$AC = |\overline{u}| = \sqrt{20^2 + (-21)^2} = \sqrt{400 + 441} = \sqrt{841} = 29$$

$$BC = |\overline{u} - \overline{v}| = \sqrt{15^2 + (-9)^2} = \sqrt{225 + 81} = \sqrt{306} \approx 17{,}5$$

Nähdään, että kolmion lyhin sivu on AB ja sen pituus on 13.

b) Kolmion kärkipisteet B ja C saadaan selville määrittämällä niiden paikkavektorit.

Pisteen $A = (-3,\ 9)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -3\overline{i} + 9\overline{j}$.

Määritetään pisteen B paikkavektori.

$$\begin{aligned} \overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} && \overline{AB} = \overline{v} \\ &= \overline{OA} + \overline{v} && \overline{OA} = -3\overline{i} + 9\overline{j},\ \overline{v} = 5\overline{i} - 12\overline{j} \\ &= -3\overline{i} + 9\overline{j} + 5\overline{i} - 12\overline{j} \\ &= 2\overline{i} - 3\overline{j} \end{aligned}$$

Kärkipiste $B = (2, -3)$.

Määritetään sitten pisteen C paikkavektori.

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \overline{OA} + \overline{AC} && \overline{AC} = \overline{u} \\ &= \overline{OA} + \overline{u} && \overline{OA} = -3\overline{i} + 9\overline{j},\ \overline{u} = 20\overline{i} - 21\overline{j} \\ &= -3\overline{i} + 9\overline{j} + 20\overline{i} - 21\overline{j} \\ &= 17\overline{i} - 12\overline{j} \end{aligned}$$

Kärkipiste $C = (17, -12)$.

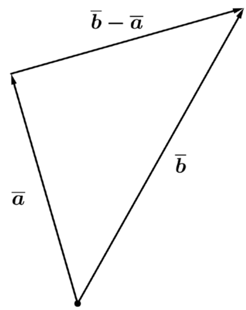
Vastaus

a) $AB = 13$

b) $B = (2, -3)$ ja $C = (17, -12)$

18.17

Kolmion sivut määräytyvät vektoreista
$\overline{a} = -2\overline{i} + 7\overline{j}$, $\overline{b} = 5\overline{i} + 9\overline{j}$ ja näiden
erotusvektorista



$$\begin{aligned}\overline{b} - \overline{a} &= 5\overline{i} + 9\overline{j} - (-2\overline{i} + 7\overline{j}) \\ &= 5\overline{i} + 9\overline{j} + 2\overline{i} - 7\overline{j} \\ &= 7\overline{i} + 2\overline{j}.\end{aligned}$$

Jos kolmio on suorakulmainen, sen sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen. Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

$$|\overline{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$

$$|\overline{b} - \overline{a}| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$$

Nähdään, että kolmion pisimmän sivun määrää vektori $\overline{b}$. Tarkistetaan, toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen.

$$\begin{aligned}|\overline{a}|^2 + |\overline{b} - \overline{a}|^2 &= |\overline{b}|^2 \\ (\sqrt{53})^2 + (\sqrt{53})^2 &= (\sqrt{106})^2 \\ 53 + 53 &= 106 \\ 106 &= 106 \\ &\text{tosi}\end{aligned}$$

Pythagoraan lause toteutuu, joten kolmio on suorakulmainen.

Vastaus
on

18.18

Vektorin $\overline{a} = 7t\overline{i} - 24t\overline{j}$ pituuden lauseke on

$$\begin{aligned} |\overline{a}| &= \sqrt{(7t)^2 + (-24t)^2} \\ &= \sqrt{49t^2 + 576t^2} \\ &= \sqrt{625t^2} \\ &= 25\sqrt{t^2} \\ &= 25|t| \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö $|\overline{a}| = 1$ ja ratkaistaan vakion t arvo.

$$\begin{aligned} 25|t| &= 1 \\ |t| &= \frac{1}{25} \end{aligned}$$

$$t = \frac{1}{25} \quad \text{tai} \quad \mathrm{t} = -\frac{1}{25}$$

Muodostetaan vektorin $\overline{a}$ lausekkeet.

Kun $t = \frac{1}{25}$, niin

$$\overline{a} = 7t\overline{i} - 24t\overline{j} = 7 \cdot \frac{1}{25}\overline{i} - 24 \cdot \frac{1}{25}\overline{j} = \frac{7}{25}\overline{i} - \frac{24}{25}\overline{j}.$$

Kun $t = -\frac{1}{25}$, niin

$$\overline{a} = 7t\overline{i} - 24t\overline{j} = 7 \cdot \left(-\frac{1}{25}\right)\overline{i} - 24 \cdot \left(-\frac{1}{25}\right)\overline{j} = -\frac{7}{25}\overline{i} + \frac{24}{25}\overline{j}.$$

Vastaus

Kun $t = -\frac{1}{25}$, niin $\overline{a} = -\frac{7}{25}\overline{i} + \frac{24}{25}\overline{j}$.

Kun $t = \frac{1}{25}$, niin $\overline{a} = \frac{7}{25}\overline{i} - \frac{24}{25}\overline{j}$.

18.19

Kärkipisteiden $A=(-3,\ 7)$ ja $B=(4,-5)$ paikkavektorit ovat $\overline{OA}=-3\overline{i}+7\overline{j}$ ja $\overline{OB}=4\overline{i}-5\overline{j}$. Kärkipisteen C paikkavektori on $\overline{OC}$.

Kärkipisteiden paikkavektorien summa on nollavektori. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan paikkavektori $\overline{OC}$.

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{0}$$

$$\overline{OC}=-\overline{OA}-\overline{OB}$$

$\overline{OA}=-3\overline{i}+7\overline{j}$
$\overline{OB}=4\overline{i}-5\overline{j}$

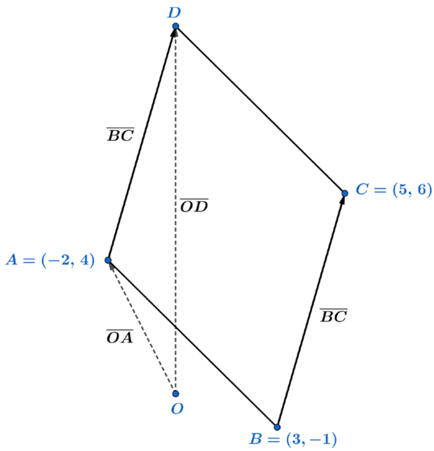
$$\begin{aligned}&=-(-3\overline{i}+7\overline{j})-(4\overline{i}-5\overline{j})\\&=3\overline{i}-7\overline{j}-4\overline{i}+5\overline{j}\\&=-\overline{i}-2\overline{j}\end{aligned}$$

Kärkipiste C on siis $C=(-1,-2)$.

Vastaus
$C=(-1,-2)$

18.20

Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Kärkipisteeseen D päästään esimerkiksi lähtemällä kärkipisteestä A ja kulkemalla vektori $\overline{BC}$.



Määritetään pisteiden $B = (3,-1)$ ja $C = (5,\ 6)$ välinen vektori $\overline{BC}$.

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j}\\ &= (5-3)\overline{i} + (6-(-1))\overline{j}\\ &= 2i + 7\overline{j}\end{aligned}$$

$B = (x_1, y_1) = (3,-1)$

$C = (x_2, y_2) = (5,\ 6)$

Muodostetaan kärkipisteen D paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OD} &= \overline{OA} + \overline{BC}\\ &= -2\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{i} + 7\overline{j}\\ &= 0\overline{i} + 11\overline{j}\end{aligned}$$

$\overline{OA} = -2\overline{i} + 4\overline{j}$

$\overline{BC} = 2\overline{i} + 7\overline{j}$

Neljäs kärkipiste on siis $D = (0,\ 11)$.

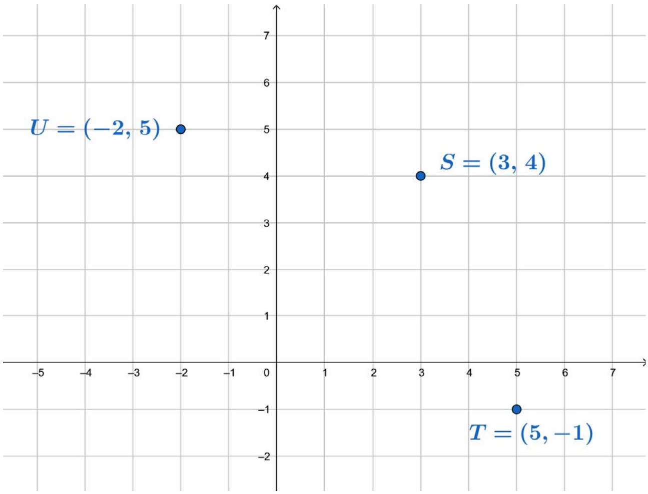
Vastaus

$D = (0,\ 11)$

18.21

Merkitään annettuja kärkipisteitä $S=(3,\ 4)$, $T=(5,-1)$ ja $U=(-2,\ 5)$.

Pisteiden sijaintia havainnollistaa oheinen kuva.



Olkoon neljäs kärkipiste V. Koska kärkipisteiden järjestystä ei ole kiinnitetty, voi neljäs kärkipiste sijaita useassa eri paikassa. Kaikki mahdolliset suunnikkaat ovat $SUVT$, $SUTV$ ja $SVUT$.

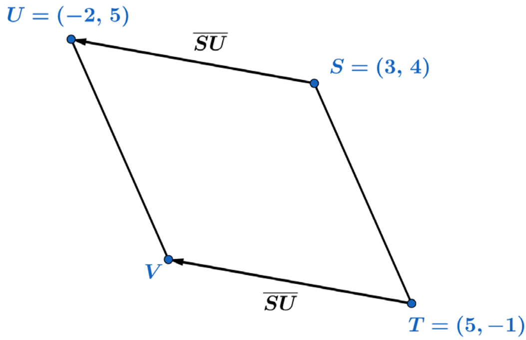
Käsitellään jokainen tapaus erikseen. Pisteen koordinaatit saadaan selville määrittämällä sen paikkavektori.

Suunnikas $SUVT$:

Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät.

Kärkipisteeseen V päästään esimerkiksi lähtemällä kärkipisteestä T ja kulkemalla vektori $\overline{SU}$.

Hahmotellaan mallikuva.



Määritetään vektorin $\overline{SU}$ lauseke.

$$\overline{SU} = (-2-3)\overline{i} + (5-4)\overline{j}$$

$$= -5\overline{i} + \overline{j}$$

Vektori pisteestä S $= (3,\ 4)$ pisteeseen $U = (-2,\ 5)$.

Muodostetaan kärkipisteen V paikkavektori.

$$\overline{OV} = \overline{OT} + \overline{SU}$$

$$= 5\overline{i} - \overline{j} - 5\overline{i} + \overline{j}$$

$$= 0\overline{i} + 0\overline{j}$$

$\overline{OT} = 5\overline{i} - \overline{j}$

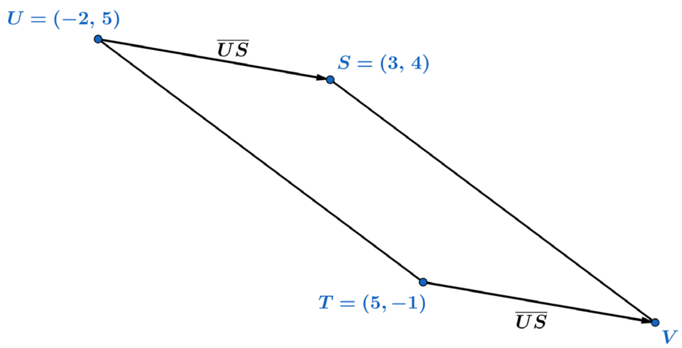
$\overline{SU} = -5\overline{i} + \overline{j}$

Suunnikkaan $SUVT$ neljäs kärkipiste on siis $V = (0,\ 0)$.

Suunnikas $SUTV$:

Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Kärkipisteeseen V päästään esimerkiksi lähtemällä kärkipisteestä T ja kulkemalla vektori $\overline{US}$.

Hahmotellaan mallikuva.



Vektori $\overline{US}$ on vektorin $\overline{SU}$ vastavektori, eli

$$\overline{US} = -\overline{SU} = -(-5\overline{i} + \overline{j}) = 5\overline{i} - \overline{j}.$$

Muodostetaan kärkipisteen V paikkavektori.

$$\begin{aligned} \overline{OV} &= \overline{OT} + \overline{US} \\ &= 5\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{i} - \overline{j} \\ &= 10\overline{i} - 2\overline{j} \end{aligned}$$

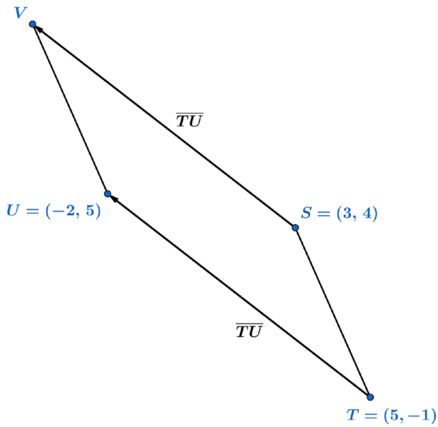
$$\overline{OT} = 5\overline{i} - \overline{j}$$
$$\overline{US} = 5\overline{i} - \overline{j}$$

Suunnikkaan $SUTV$ neljäs kärkipiste on siis $V = (10, -2)$.

Suunnikas $SVUT$:

Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät.
Kärkipisteeseen V päästään esimerkiksi lähtemällä kärkipisteestä S ja kulkemalla vektori $\overline{TU}$.

Hahmotellaan mallikuva.



Määritetään vektorin $\overline{TU}$ lauseke.

$$\overline{TU} = (-2-5)\overline{i} + (5-(-1))\overline{j}$$

$$= -7\overline{i} + 6\overline{j}$$

Vektori pisteestä $T = (5, -1)$ pisteeseen $U = (-2,\ 5)$.

Muodostetaan kärkipisteen V paikkavektori.

$$\overline{OV} = \overline{OS} + \overline{TU}$$

$$= 3\overline{i} + 4\overline{j} - 7\overline{i} + 6\overline{j}$$
$$= -4\overline{i} + 10\overline{j}$$

$\overline{OS} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$
$\overline{TU} = -7\overline{i} + 6\overline{j}$

Suunnikkaan $SVUT$ neljäs kärkipiste on siis $V = (-4,\ 10)$.

Vastaus
$(0,\ 0)$, $(10, -2)$ ja $(-4,\ 10)$

18.22

Vektori $\overline{AB}$ voidaan ilmaista pisteiden $A=(x_1,\,y_1)$ ja $B=(x_2,\,\mathrm{y}_2)$ paikkavektoreiden avulla muodossa $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}.$

Määritetään paikkavektorit $\overline{OB}$ ja $\overline{OA}.$

$$\overline{OB}=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}$$

$$\overline{OA}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}$$

Muodostetaan vektorin $\overline{AB}$ lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\overline{OB}-\overline{OA}\\&=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}-(x_1\overline{i}+y_1\overline{j})\\&=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}-x_1\overline{i}-y_1\overline{j}\\&=(x_2-x_1)\overline{i}+(y_2-y_1)\overline{j}\end{aligned}$$

On osoitettu, että jos $A=(x_1,\,y_1)$ ja $B=(x_2,\,\mathrm{y}_2),$ niin vektori $\overline{AB}=(x_2-x_1)\overline{i}+(y_2-y_1)\overline{j}.$

□

18.23

Vektori $\overline{c}=t\overline{a}+(1-t)\overline{b}$ voidaan ilmaista vektorien $\overline{a}=3\overline{i}-2\overline{j}$ ja $\overline{b}=\overline{i}-4\overline{j}$ avulla muodossa

$$\begin{aligned}\overline{c}&=t\overline{a}+(1-t)\overline{b}\\&=t(3\overline{i}-2\overline{j})+(1-t)(\overline{i}-4\overline{j})\\&=3t\overline{i}-2t\overline{j}+i-4\overline{j}-t\overline{i}+4t\overline{j}\\&=(3t+1-t)\overline{i}+(-2t-4+4t)\overline{j}\\&=(2t+1)\overline{i}+(2t-4)\overline{j}\end{aligned}$$

Muodostetaan vektorin $\bar{c}$ pituuden lauseke.

$$
\begin{aligned}
|\bar{c}| &= \sqrt{(2t+1)^2+(2t-4)^2} \\
&= \sqrt{4t^2+4t+1+4t^2-16t+16} \\
&= \sqrt{8t^2-12t+17}
\end{aligned}
$$

Juurrettava lauseke $8t^2-12t+17$ on ylöspäin aukeava paraabeli. Näin ollen se saa pienimmän arvonsa huippunsa kohdalla.

Merkitään $y=8t^2-12t+17.$ Muokataan yhtälö huippumuotoon $y-y_0=a(t-t_0)^2.$

Täydennetään yhtälön oikea puoli neliöksi CAS-laskimella.

$$y=8t^2-12t+17$$

$$y=8\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{2} \quad \Big| -\frac{25}{2}$$

$$y-\frac{25}{2}=8\left(t-\frac{3}{4}\right)^2$$

Huippumuotoisesta yhtälöstä nähdään, että paraabelin huippu on $(\frac{3}{4}, \frac{25}{2})$.

Juurrettava lauseke saa siis pienimmän arvonsa parametrin t arvolla $\frac{3}{4}$.

Lasketaan vektorin $\bar{c}$ pituus.

$$
\begin{aligned}
|\bar{c}| &= \sqrt{8t^2-12t+17} \\
&= \sqrt{8\left(\frac{3}{4}\right)^2-12\cdot\frac{3}{4}+17} \\
&= \frac{5\sqrt{2}}{2} \left(=\frac{5}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Vastaus

$t=\frac{3}{4},\ |\bar{c}|=\frac{5\sqrt{2}}{2} \left(=\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$