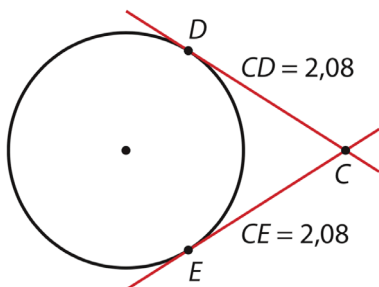


## 12.1

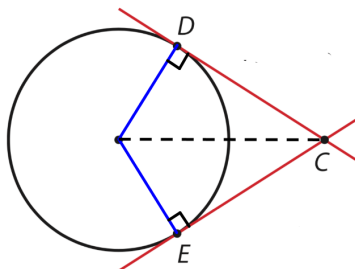
- a) Piirretään ympyrä, piste  $C$  ja pisteen  $C$  kautta kulkevat ympyrän tangentit.



Merkitään sivuamispisteet  $E$  ja  $D$ . Mitataan sivuamispisteiden  $E$  ja  $D$  etäisyydet pisteestä  $C$ .

Pisteen  $C$  etäisyys kummastakin sivuamispisteestä näyttää olevan aina yhtä suuri vaikka pistettä  $C$  siirtää.

- b) Täydennetään kuviota.



Yhdistetään piste  $C$  ja ympyrän keskipiste.

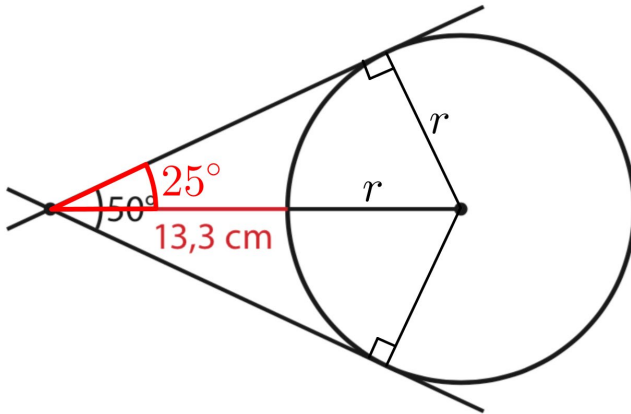
Piirretään säteet tangenttien ja ympyrän sivuamispisteisiin.

Muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota, joissa on yksi samanpituisen kateetti (ympyrän säde) ja yhteinen hypotenuusa. Pythagoraan lauseen perusteella toinenkin kateetti on kolmioissa yhtä pitkä. Siis  $CE = CD$ .

### Vastaus

- a) Pisteen  $C$  etäisyys kummastakin sivuamispisteestä näyttäisi olevan aina yhtä suuri.

## 12.2



Ympyrän keskipisteestä tangenttien leikkauspisteeseen piirretty jana puolittaa tangenttien välisen kulman:  $\frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$ .

Ratkaistaan ympyrän säde  $r$  suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 25^\circ = \frac{r}{r + 13,3}$$

$$r = 9,73\dots \\ \approx 9,7 \text{ (cm)}$$

Kulman sini on vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan.

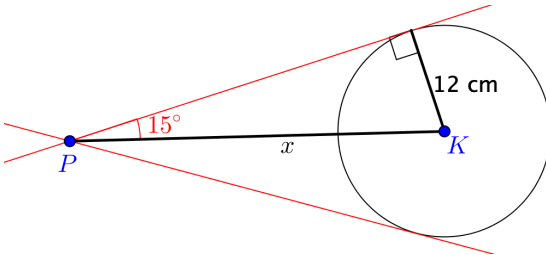
Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

**Vastaus**

9,7 cm

## 12.3

Piirretään mallikuva.



Ympyrän keskipisteestä  $K$  tangenttien leikkauspisteeseen  $P$  piirretty jana puolittaa tangenttien välisen kulman:  $\frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$ .

Ratkaistaan pisteiden  $P$  ja  $K$  välinen etäisyys  $x$  suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 15^\circ = \frac{12}{x}$$

$$x = 46,36\dots$$

$$\approx 46 \text{ (cm)}$$

Sini on vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan.

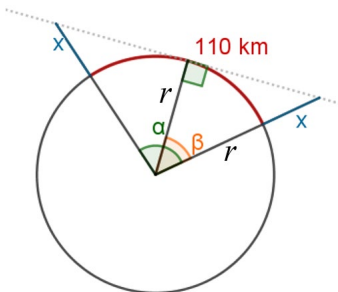
Ratkaistaan CAS-laskimella.

**Vastaus**

46 cm

## 12.4

Piirretään mallikuva. Merkitään linkkitornin korkeutta kirjaimella  $x$ . Linkkitornien huiput yhdistävä suora on ympyrän tangenti, kun linkkitornien korkeus on matalin mahdollinen.



Sektorin kaaren pituus on 110 km. Ratkaistaan sektorin keskuskulman  $\alpha$  suuruus.

$$110 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370$$

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r, \text{ missä } b = 110 \text{ ja } r = 6370.$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\alpha = 0,98940\dots^\circ$$

Kulman  $\beta$  suuruus on puolet tästä kulmasta:  $\beta = \frac{\alpha}{2} = 0,49470\dots^\circ$

Ratkaistaan linkkitornin korkeus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos 0,49740\dots^\circ = \frac{6370}{6370 + x}$$

Kosini on viereisen kateetin  
suhde hypotenuusaan.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 0,23744\dots$$

$$x \approx 0,240 \text{ (km)}$$

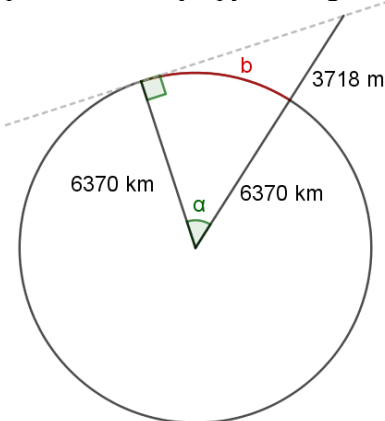
Linkkitornien korkeus tulee olla vähintään  $0,240 \text{ km} = 240 \text{ m}$ .

**Vastaus**

vähintään 240 m

## 12.5

Piirretään mallikuva. Merkitään Teiden ja Afrikan rannikon välimatkaa eli kaaren pituutta kirjaimella  $b$ . Maan etäisimmästä näkyvästä kohdasta Teiden huipulle saapuvat valonsäteet kulkevat pitkin maapallon poikkileikkausympyrän tangenttia.



Teiden korkeus on  $3718 \text{ m} = 3,718 \text{ km}$ .

Ratkaistaan kulman  $\alpha$  suuruus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{6370}{6370 + 3,718} \\ \alpha &= \cos^{-1} \left( \frac{6370}{6370 + 3,718} \right) \\ &= 1,9571...^\circ\end{aligned}$$

Lasketaan kaaren pituus  $b$ .

$$\begin{aligned}b &= \frac{1,9571...^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 \\ &= 217,58... \\ &\approx 220 \text{ (km)}\end{aligned}$$

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

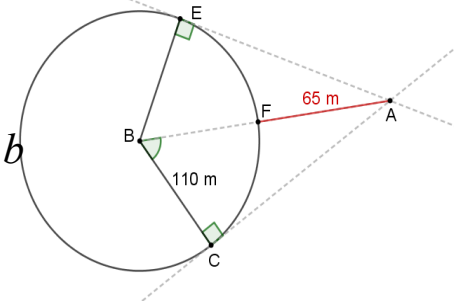
Teiden ja Afrikan välimatka on 220 km.

**Vastaus**

220 km

## 12.6

Piirretään mallikuva. Merkitään Otson paikkaa kirjaimella  $A$ . Piirretään pisteen  $A$  kautta kulkevat ympyrän tangentit ja sivuamispisteisiin  $E$  ja  $C$  ympyrän säteet. Lyhin kävelyreitti muodostuu janoista  $AC$  ja  $AE$  sekä kaaresta  $CE$ .



Ratkaistaan janan  $AC$  pituus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$AC^2 + 110^2 = (110 + 65)^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AC = -136,10\dots \quad \text{tai} \quad AC = 136,10\dots$$

Pituus on positiivinen luku, joten  $AC = 136,10\dots$  m.

Jana  $AE$  on yhtä pitkä kuin jana  $AC$ , joten myös  $AE = 136,10\dots$  m.

Ratkaistaan kulma  $CBA$  suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos(\sphericalangle CBA) = \frac{110}{110 + 65} = \frac{110}{175}$$

Kosini on viereisen kateetin suhde hypotenuusaan.

$$\begin{aligned}\sphericalangle CBA &= \cos^{-1}\left(\frac{110}{175}\right) \\ &= 51,055\dots^\circ\end{aligned}$$

Lasketaan kaarta  $CE$  vastaavan keskuskulman  $EBC$  suuruus.

$$\sphericalangle EBC = 360^\circ - 2 \cdot 51,055\dots^\circ = 257,88\dots^\circ$$

Lasketaan kaaren  $CDE$  pituus  $b$ .

$$b = \frac{257,88\dots^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 110$$

Kaaren pituus  $b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$ , missä  
 $\alpha = 257,88\dots^\circ$  ja  $r = 110$ .

$$= 495,11\dots(\text{m})$$

Lyhimmän mahdollisen kävelyreitän pituus on

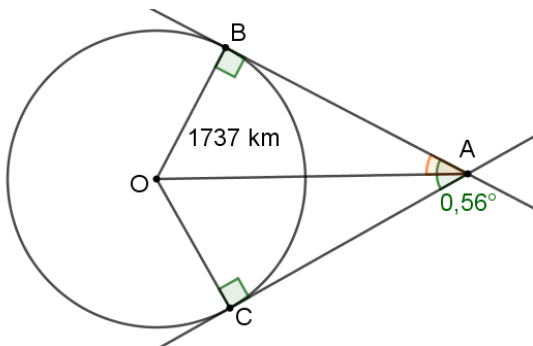
$$495,11\dots \text{ m} + 2 \cdot 136,10\dots \text{ m} = 767,32\dots \text{ m} \approx 770 \text{ m}$$

**Vastaus**

770 m

## 12.7

Piirretään mallikuva. Piste  $A$  on Maan pinnalla. Piste  $O$  on kuun keskipiste.



Kulman  $BAO$  suuruus on puolet tangenttien välisestä kulmasta:

$$\sphericalangle BAO = \frac{0,56^\circ}{2} = 0,28^\circ.$$

Ratkaistaan janan  $AO$  pituus suorakulmaisesta kolmiosta  $ABO$ .

$$\sin 0,28^\circ = \frac{1737}{AO}$$

Sini on vastaisen kateetin suhde  
hypotenuusaan.

Ratkaistaan muuttuja  $AO$  CAS-laskimella.

$$AO = 355439,8\dots \\ \approx 355\,400 \text{ (km)}$$

Kuun keskipisteen etäisyys Maan pinnalla seisovasta ihmisestä on 355 400 km.

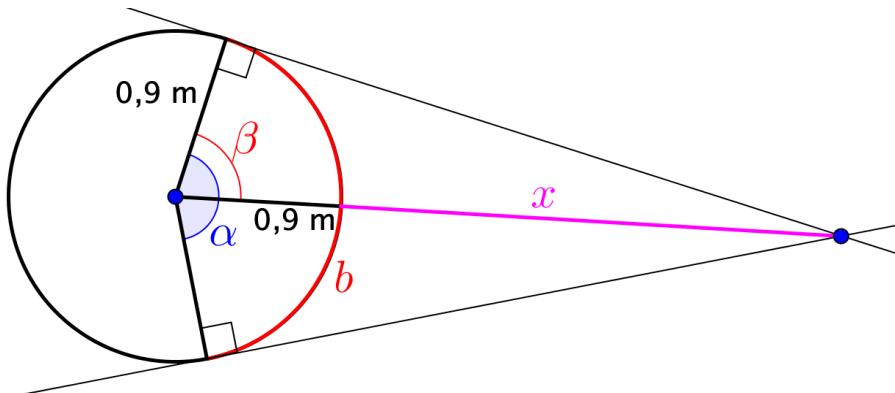
**Vastaus**

355 400 km

## 12.8

Piirretään mallikuva. Mainoksen leveys 2,6 m on kaaren pituus  $b$ .

Mainostelineen säde on  $\frac{1,8 \text{ m}}{2} = 0,9 \text{ m}$ . Merkitään kirjaimella  $x$  katsojan lyhintä etäisyyttä, josta hän voi nähdä koko mainoksen.



Ratkaistaan kaartaa vastaavan keskuskulman  $\alpha$  suuruus.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \quad \text{Sijoitetaan } b = 2,6 \text{ ja } r = 0,9.$$

$$2,6 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 0,9 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella}$$

$$\alpha = 165,52\dots^\circ$$

Jana tangenttien leikkauspisteestä ympyrän keskipisteeseen puolittaa

$$\text{keskuskulman: } \beta = \frac{165,52\dots^\circ}{2} = 82,760\dots^\circ.$$

Ratkaistaan katsojan etäisyys  $x$  mainostolpasta.

$$\cos(82,760\dots^\circ) = \frac{0,9}{0,9 + x} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 6,24\dots \text{ (m)}$$

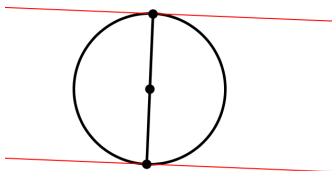
Julisteen näkee kokonaan noin 6,2 metrin etäisyydeltä, joten sitä ei voi nähdä kokonaan 4 metrin etäisyydeltä.

### Vastaus

Ei voi.

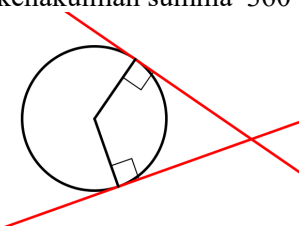
## 12.9

- a) Jos tangentit on piirretty halkaisijan päätyypisteisiin, ne eivät leikkaa toisiaan. Väite on epätosi.

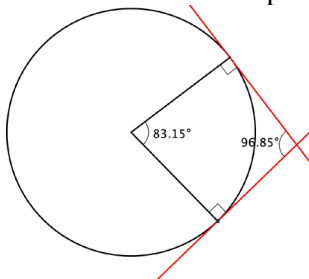


- b) Ympyrän tangentti on aina kohtisuorassa sivuamipisteeseen piirrettyä sädettä vastaan. Täten tangentti on sivuamipisteeseen piirretyn säteen normaali. Väite on tosi.

- c) Tangenttikulman ja sitä vastaava keskuskulma on kaksi kulmaa nelikulmiossa, jossa kaksi muuta kulmaa ovat  $90^\circ$ . Koska nelikulmion kulmien summa on aina  $360^\circ$ , on tangenttikulman ja sitä vastaavan kehäkulman summa  $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ . Väite on tosi.



- d) Jos keskuskulma on pienempi kuin  $90^\circ$ , tangenttikulma on keskuskulmaa suurempi. Väite on epätosi.

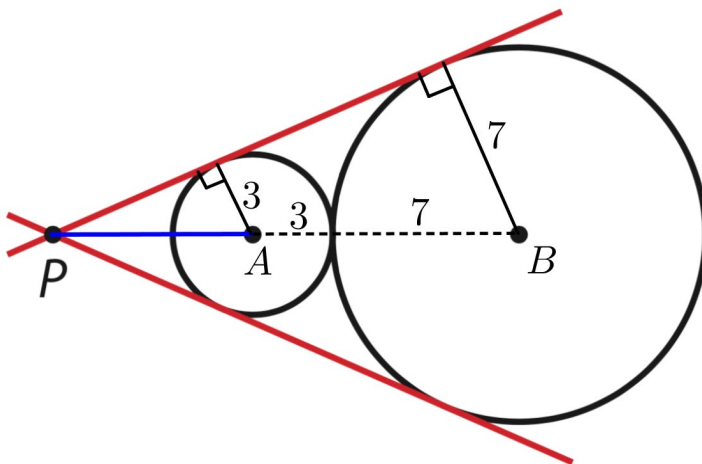


### Vastaus

- a) epätosi      b) tosi  
c) tosi          d) epätosi

## 12.10

Piirretään mallikuva.



Kuvan kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella:

- Kolmioilla on yhteinen kulma.
- Molemmissa kolmioissa on suora kulma.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan  $PA$  pituus.

$$\frac{PA}{PA + 3 + 7} = \frac{3}{7} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$PA = \frac{15}{2} = 7,5$$

Pisteen  $P$  etäisyys pienemmän ympyrän keskipisteestä on  $PA = 7,5$ .

Pisteen  $P$  etäisyys isomman ympyrän keskipisteestä on

$$PB = 7,5 + 3 + 7 = 17,5.$$

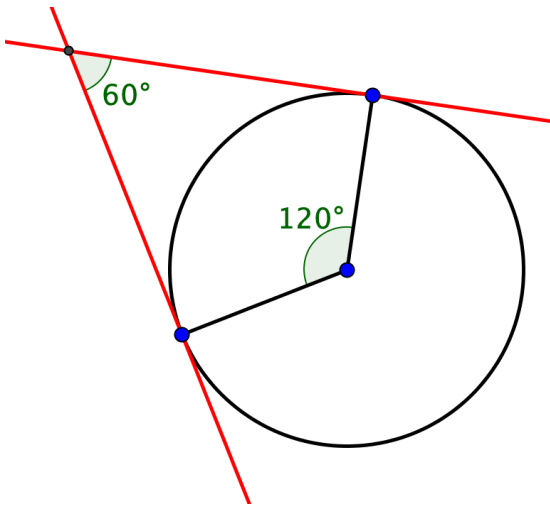
**Vastaus**

7,5 ja 17,5

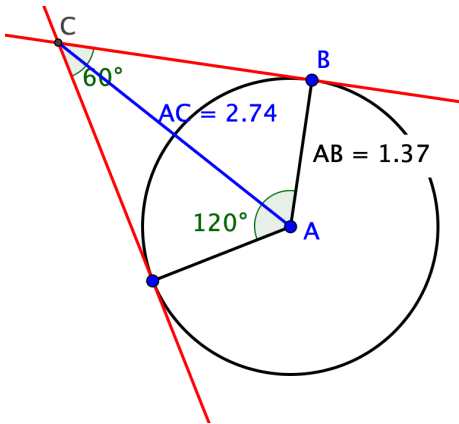
## 12.11

- a) Tangentit ja sivuamispisteisiin piirretyt säteet muodostavat nelikulmion, jossa on kaksi suoraa kulmaa. Keskuskulman ja tangenttikulman summa on siis  $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ . Koska tangenttikulman tulee olla  $60^\circ$ , keskuskulma on  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Piirretään ympyrä ja siihen keskuskulma, jonka suuruus on  $120^\circ$ . Piirretään keskuskulmaa vastaavan kaaren päätepisteisiin tangentit. Mitataan tangenttikulman ja keskuskulman suuruus, jotta varmistutaan piirroksen oikeellisuudesta.



Mitataan säteen pituus ja ympyrän keskipisteestä tangenttien leikkauspisteeseen piirretyn janan pituus.



Lasketaan kysytty suhde.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1,37}{2,74} = 0,5$$

Siis pituuksien suhde on  $AB : AC = 1 : 2$ .

Vaikuttaa, että suhde on aina sama, vaikka ympyrän kokoa muuttaisi.

b) Jana  $AC$  puolittaa tangenttikulman  $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ .

Suorakulmaisesta kolmiosta  $ABC$  saadaan:

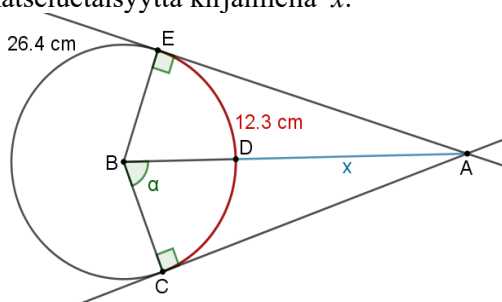
$$\begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \sin 30^\circ && \text{Vastaisen kateetin suhde} \\ &&& \text{hypotenuusaan on kulman sini.} \\ &= \frac{1}{2} && \text{Lasketaan laskimella } \sin 30^\circ. \end{aligned}$$

On osoitettu, että kysytty suhde on aina  $1 : 2$ .

**Vastaus a)** Kysytty suhde vaikuttaa olevan aina  $1 : 2$ .

## 12.12

Piirretään mallikuva. Etiketti näkyy pisteestä  $A$ , jos tangenttien rajoittaman kaaren pituus on vähintään etiketin leveys 12,3 cm. Merkitään katseluetäisyyttä kirjaimella  $x$ .



Pullon ympärysmitta on 26,4 cm. Ratkaistaan pullon säde  $r$ .

$$p = 2\pi r$$

Sijoitetaan  $p = 26,4$ .

$$26,4 = 2\pi \cdot r$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = 4,2016... \text{ (cm)}$$

Etiketin leveys on 12,3 cm. Kuvan merkinnöillä kaarta vastaava keskuskulma on  $2\alpha$ . Ratkaistaan kulman  $\alpha$  suuruus.

$$12,3 = \frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 4,2016... \quad b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\alpha = 83,8636...^\circ$$

Ratkaistaan etäisyys  $x$  suorakulmaisesta kolmiosta  $ABC$ .

$$\cos 83,8636...^\circ = \frac{4,2016...}{4,2016... + x}$$

Kosini on viereisen kateetin suhde hypotenuusaan.  
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 35,10... \approx 35,1 \text{ (cm)}$$

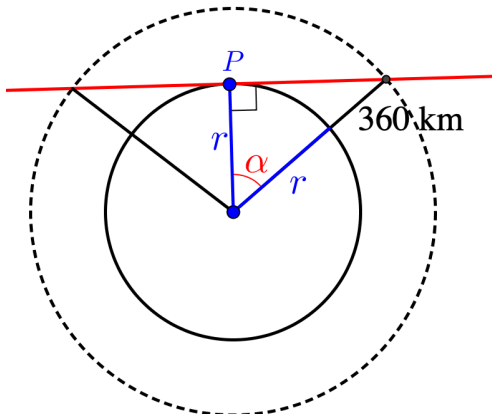
Pullon tulee olla vähintään 35,1 cm:n etäisyydellä silmästä.

### Vastaus

35,1 cm:n etäisyydellä

## 12.13

Piirretään mallikuva. Avaruusasema on horisontin yläpuolella, kun se on pisteeseen  $P$  piirretyn tangentin yläpuolella.



Ratkaistaan maapallon säde  $r$ .

$$p = 2\pi r$$

Sijoitetaan  $p = 40\,000$ .

$$40\,000 = 2\pi \cdot r$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = 6366,19... \text{ (km)}$$

Ratkaistaan kulma  $\alpha$  suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos \alpha = \frac{6366,19...}{6366,19... + 360}$$

Kosini on viereisen kateetin suhde hypotenuusaan.

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos^{-1} \left( \frac{6366,19...}{6366,19... + 360} \right) \\ &= 18,83...^\circ \end{aligned}$$

Tangentin yläpuolella olevaa lentoradan kaartaa vastaava keskuskulma on  $2\alpha$ . Koko kierrosta vastaa täysi kulma  $360^\circ$ . Kiertoaika maapallon ympäri on 92 minuuttia.

Lasketaan aika, jonka satelliitti on horisontin yläpuolella.

$$\frac{2 \cdot 18,83...^\circ}{360^\circ} \cdot 92 \text{ min} = 9,62... \text{ min} \approx 9,6 \text{ min}$$

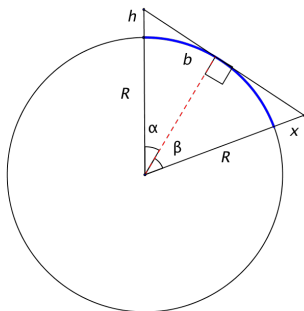
**Vastaus**

9,6 min

## 12.14

Piirretään mallikuva.

Merkitään kysyttyä linkkitornin korkeutta kirjaimella  $x$ .



$$R = 6370 \text{ km}$$

$$h = 190 \text{ m} = 0,19 \text{ km}$$

$$b = 110 \text{ km}$$

Ratkaistaan kaarta  $b$  vastaavan keskuskulman suuruus  $\gamma (= \alpha + \beta)$ .

$$110 = \frac{\gamma}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 \quad b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\gamma = 0,98940\dots^\circ$$

Ratkaistaan kulman  $\alpha$  suuruus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos \alpha = \frac{6370}{6370 + 0,19} = \frac{6370}{6370,190} \quad \begin{array}{l} \text{Kosini on viereisen kateetin} \\ \text{suhde hypotenuusaan.} \end{array}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{6370}{6370,190}\right)$$

$$= 0,44252\dots^\circ$$

Lasketaan kulman  $\beta$  suuruus.

$$\beta = 0,98940\dots^\circ - 0,44252\dots^\circ = 0,54688\dots^\circ$$

Ratkaistaan linkkitornin korkeus  $x$  suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos 0,54688\dots^\circ = \frac{6370}{6370 + x} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 0,29018\dots \text{ (km)}$$

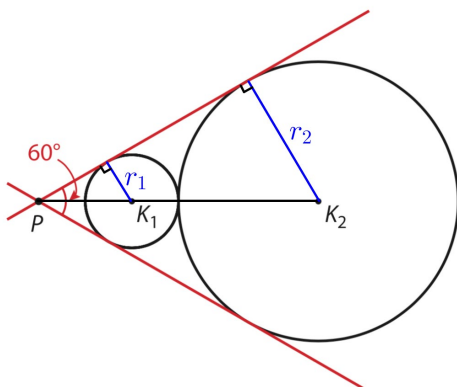
Linkkitornin korkeus pitää olla vähintään  $0,290 \text{ km} = 290 \text{ m}$ .

**Vastaus**

290 m

## 12.15

Piirretään mallikuva.



Muodostuneet suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Yhteinen terävä kulma.
- Kummassakin on suora kulma.

Ympyröiden keskipisteiden kautta kulkeva suora puolittaa tangenttien välisen kulman:  $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ .

Ratkaistaan pienemmän ympyrän säde suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 30^\circ = \frac{r_1}{PK_1} \quad \text{Sijoitetaan } PK_1 = 10.$$

$$\sin 30^\circ = \frac{r_1}{10} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r_1 = 5$$

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan suuremman ympyrän säde.

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{PK_2}{PK_1} \quad \text{Sijoitetaan } PK_2 = 10 + 5 + r_2$$

$$\text{ja } PK_1 = 10.$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{10 + 5 + r_2}{10} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

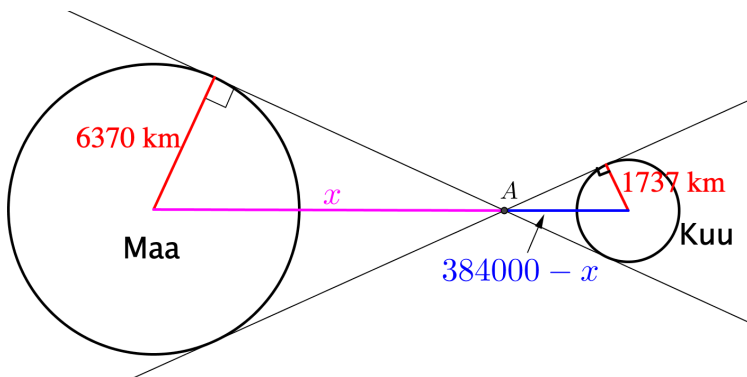
$$r_2 = 15$$

**Vastaus**

5 ja 15

## 12.16

Piirretään mallikuva.



Merkitään avaruusaluksen etäisyyttä Maan keskipisteestä kirjaimella  $x$  (km). Tällöin avaruusaluksen etäisyys Kuun keskipisteestä on  $384\,000 - x$  (km).

Piirretyt kolmiot ovat yhdenmuotoiset ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$\frac{6370}{1737} = \frac{x}{384000 - x} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 301724,43\dots \text{ (km)}$$

Lasketaan avaruusaluksen etäisyys Maan pinnalta.

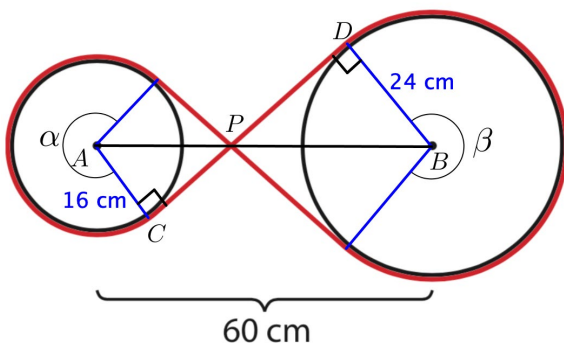
$$301\,724,43\dots \text{ km} - 6370 \text{ km} = 295\,354,4\dots \text{ km} \approx 295\,000 \text{ km}$$

**Vastaus**

295 000 km

## 12.17

Piirretään mallikuva.



Kolmiot  $ACP$  ja  $BDP$  ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kummassakin suora kulma.
- Ristikulmat ovat yhtä suuret.

Mudostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan  $PB$  pituus.

$$\frac{AC}{DB} = \frac{AP}{BP}$$

$$\frac{16}{24} = \frac{AP}{60 - AP} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AP = 24$$

Ratkaistaan seuraavaksi hinnan osan  $PC$  pituus Pythagoraan lauseella.

$$16^2 + PC^2 = 24^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$PC = -17,88\dots \text{ tai } PC = 17,88\dots$$

Pituus on positiivinen luku, joten  $PC = 17,88\dots$  cm.

Ratkaistaan sitten hinnan osan  $PD$  pituus.

$$24^2 + PD^2 = (60 - 24)^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$PD = -26,83\dots \text{ tai } PD = 26,83\dots$$

Pituus on positiivinen luku, joten  $PD = 26,83\dots$  cm.

Ratkaistaan kulman  $PAC$  suuruus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos(\sphericalangle PAC) = \frac{16}{24} \quad \text{Kosini on viereisen kateetin} \\ \text{suhde hypotenuusaan.}$$

$$\sphericalangle PAC = \cos^{-1}\left(\frac{16}{24}\right) \\ = 48,18\dots^\circ$$

$$\text{Täten } \alpha = 360^\circ - 2 \cdot 48,18\dots^\circ = 263,62\dots^\circ.$$

Lasketaan pienemmän ympyrän kehällä olevan hinnan pituus.

$$b_A = \frac{263,62\dots^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 16 \\ = 73,61\dots \text{ (cm)}$$

Koska kolmiot ovat yhdenmuotoiset, myös  $\beta = 263,62\dots^\circ$ .

Lasketaan suuremman ympyrän kehällä olevan hinnan pituus.

$$b_B = \frac{263,62\dots^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 24 \\ = 110,42\dots \text{ (cm)}$$

Lasketaan hinnan pituus.

$$2 \cdot AP + 2 \cdot DP + b_A + b_B = 273,48\dots \approx 270 \text{ (cm)}$$

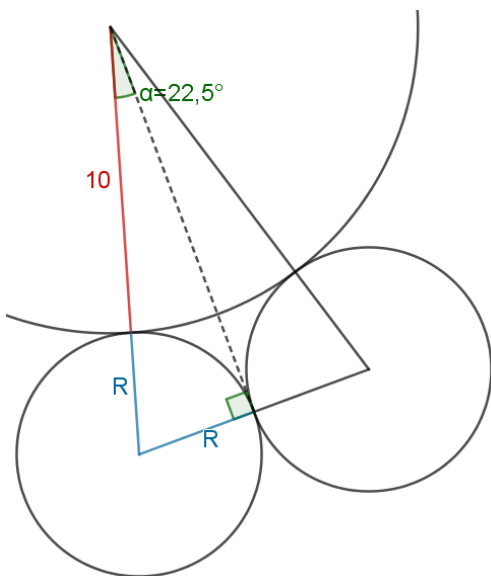
Hinnan pituus on 270 cm.

**Vastaus**

270 cm

## 12.18

Piirretään keskimäinen ympyrä ja ympärillä olevista kahdeksasta ympyrästä kaksi.



Ympärillä on kahdeksan ympyrää, joten ison ympyrän keskipisteestä pienten ympyröiden keskipisteisiin piirretyt janat jakavat täyden kulman  $360^\circ$  kahdeksaan yhtä suureen osaan:  $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ .

Kuvaan merkitty kulma on puolet tästä kulmasta:  $\alpha = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$ .

Ratkaistaan pienemmän ympyrän säde  $R$  suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 22,5^\circ = \frac{R}{10 + R} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$R = 6,19914\dots$$

$$\approx 6,20 \text{ (cm)}$$

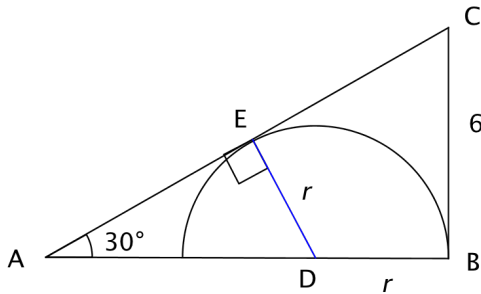
Ympäröivien ympyröiden säde on 6,20 cm.

**Vastaus**

6,20 cm

## 12.19

Piirretään mallikuva.



Suorakulmaisesta kolmiosta  $ADE$  voidaan ratkaista sivun  $AD$  pituus ympyrän säteen  $r$  lausekkeena.

$$\sin 30^\circ = \frac{r}{AD}$$

$$AD = \frac{r}{\sin 30^\circ} = 2r$$

Kolmion  $ABC$  pidempi kateetti on tällöin

$$AB = AD + DB = 2r + r = 3r.$$

Ratkaistaan säde  $r$  suorakulmaisesta kolmiosta  $ABC$ .

$$\tan 30^\circ = \frac{6}{3r} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r = 2\sqrt{3}$$

Lasketaan puoliympyrän pinta-ala.

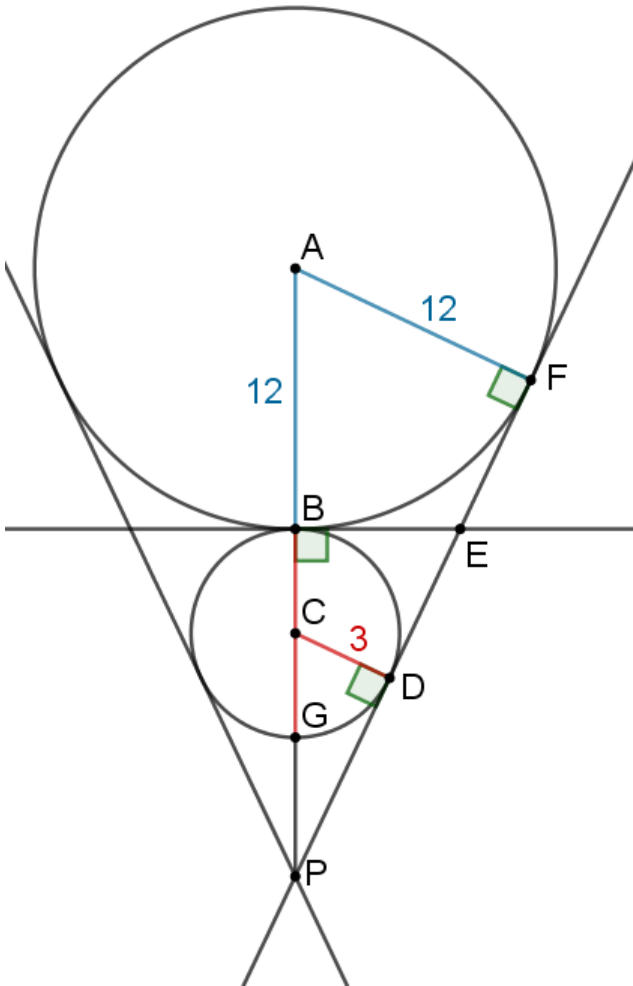
$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 6\pi$$

**Vastaus**

$$6\pi$$

## 12.20

Piirretään mallikuva.



Kolmiot  $PDC$ ,  $PFA$  ja  $PBE$  ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella: yhteinen kulma  $P$  ja kaikissa suora kulma.

Selvitetään janan  $BE$  pituus, jolloin kolmion kannaksi voidaan valita  $2BE$ . Tällöin kolmion korkeus on  $PB$ .

Lasketaan ensin janan  $PC$  pituus, josta saadaan korkeus  $PB$ .  
Muodostetaan verrantoyhtälö kolmiosta  $PDC$  ja  $PFA$ .

$$\frac{CD}{AF} = \frac{PC}{PA}$$

$$CD = 3, AF = 12$$

$$PA = PC + 3 + 12$$

$$\frac{3}{12} = \frac{PC}{PC + 3 + 12}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$PC = 5$$

Kolmion korkeus on  $PB = 5 + 3 = 8$ .

Lasketaan ensin jana  $DP$  pituus, jonka jälkeen voidaan laskea kolmion kannan pituus  $2BE$ . Ratkaistaan janan  $DP$  pituus suorakulmaisesta kolmiosta  $PDC$  Pythagoraan lauseella.

$$PD^2 + 3^2 = 5^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$PD = -4 \text{ tai } PD = 4$$

Pituus on positiivinen luku, joten  $PD = 4$ .

Muodostetaan verrantoyhtälö kolmioista  $PDC$  ja  $PBE$ , ja ratkaistaan janan  $BE$  pituus.

$$\frac{CD}{BE} = \frac{PD}{PB}$$

$$CD = 3$$

$$PD = 4, PB = 8$$

$$\frac{3}{BE} = \frac{4}{8}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$BE = 6$$

Kolmion kannan pituus on  $2BE = 2 \cdot 6 = 12$  ja korkeus  $PB = 8$ . Lasketaan kolmion pinta-ala.

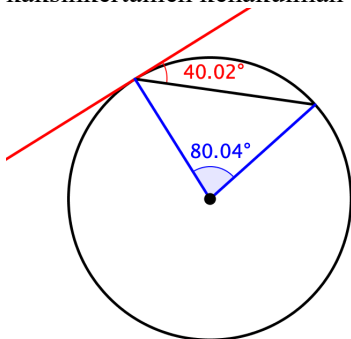
$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$$

**Vastaus**

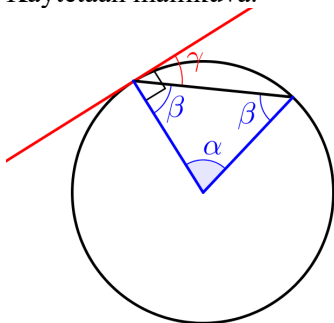
48

## 12.21

- a) Appletin perusteella kehäkulmalause näyttäisi pätevän myös tässä tapauksessa: keskuskulman suuruus näyttäisi aina olevan kaksinkertainen kehäkulman suuruuteen verrattuna.



- b) Käytetään mallikuva.



Olkoon jännettä vastaava keskuskulma on  $\alpha$ .

Jänteen ja säteiden muodostaman tasakylkisen kolmion kantakulma on

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Koska säde ja tangentti ovat kohtisuorassa, kehäkulma on

$$\gamma = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

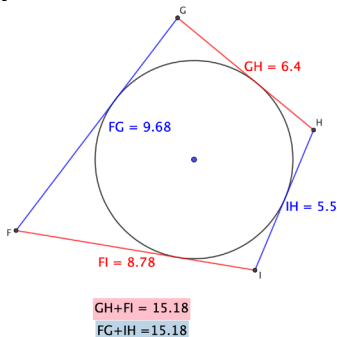
On osoitettu, että kehäkulman suuruus on puolet keskuskulman  $\alpha$  suuruudesta.  $\square$

### Vastaus

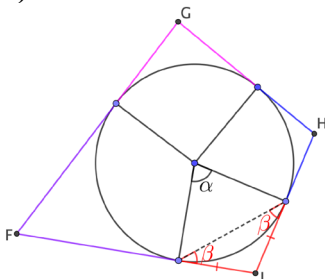
- a) Kehäkulmalause näyttäisi pätevän myös tässä tapauksessa.

## 12.22

- a) Appletin perusteella vastakkaisten sivujen pituuksien summat näyttäisivät oleva aina keskenään yhtä suuret.



- b) Piirretään mallikuva.



Piirretään ympyrän säteen nelikulmion sivujen ja ympyrän sivuamispisteisiin. Nelikulmion sivut ovat ympyrän tangentteja. Tehtävässä 12.21 todistetun lauseen nojalla kehäkulman  $\beta$  suuruus on puolet samaa jännettä vastaavaan keskuskulman  $\alpha$  suuruudesta. Täten kuvaan merkityt kehäkulmat  $\beta$  ovat keskenään yhtä suuret (molempia vastaava keskuskulma on  $\alpha$ ).

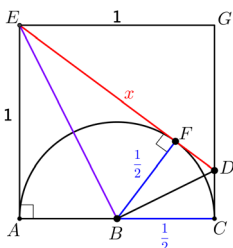
Kuvaan piirretty kolmio on siis tasakylkinen ja pisteestä  $I$  piirretyt punaiset tangenttijanat ovat yhtä pitkät.

Vastaavalla tavalla voidaan perustella, että muistakin kärkipisteistä piirretyt tangenttijanat ovat keskenään yhtä suuret.

Molemmat vastakkaiset sivut muodostuvat neljästä tangenttijanasta (punainen pisteestä  $I$ , sininen pisteestä  $H$ , pinkki pisteestä  $G$  ja violetti pisteestä  $F$ ). Täten vastakkaisten sivujen pituuksien summat ovat keskenään aina yhtä suuret.  $\square$

## 12.23

Piirretään mallikuva. Koska puoliympyrän halkaisija on 1, sen säde on  $\frac{1}{2}$ .



Selvitetään ensin janan  $EF$  pituus.

Kolmio  $ABC$  on suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 1 ja  $\frac{1}{2}$  sekä hypotenuusa  $EB$ .

Kolmio  $BFE$  on suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on  $\frac{1}{2}$  ja hypotenuusa on  $EB$ .

Koska suorakulmaisissa kolmioissa  $ABC$  on toinen kateetti yhtä pitkä ja hypotenuusa yhtä pitkä (sama jana), Pythagoraan lauseen nojalla on myös toinen kateetti yhtä pitkä. Siis  $EF = 1$ .

Selvitetään seuraavaksi janan  $FD$  pituus. Suorakulmaisissa kolmioissa  $BDF$  ja  $BDC$  on molemmissa toisen kateetin pituus  $\frac{1}{2}$  ja hypotenuusa on yhteinen (jana  $BD$ ). Pythagoraan lauseen nojalla myös toinen kateetti kolmioissa on yhtä pitkä. Siis  $FD = CD$ .

Ratkaistaan janan  $FD$  pituus suorakulmaisesta kolmiosta  $EGD$ .

$$\begin{aligned} EG^2 + GD^2 &= ED^2 & EG &= 1, \\ & & GD &= 1 - CD = 1 - FD \\ & & ED &= EF + FD = 1 + FD \end{aligned}$$

$$1^2 + (1 - FD)^2 = (1 + FD)^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$FD = \frac{1}{4}$$

Lasketaan janan  $x$  pituus.

$$x = EF + FD = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

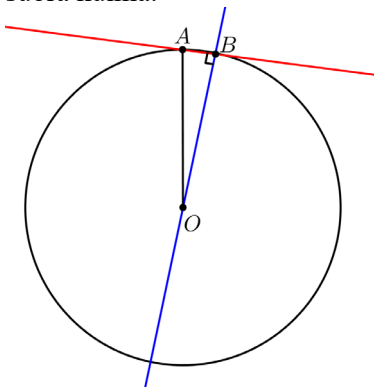
**Vastaus**

$$x = \frac{5}{4}$$

## 12.24

Pitää osoittaa, että ympyrän tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.

Oletetaan vastoin väitettä, että tangentin ja sivuamispisteeseen piirretyn säteen välinen kulma ei ole  $90^\circ$ . Tällöin tangentille voidaan piirtää ympyrän keskipisteen  $O$  kautta normaali, joka ei kulje sivuamispisteen  $A$  kautta. Tangentin ja normaalin leikkauspisteeseen  $B$  muodostuisi tällöin suora kulma.



Pisteen etäisyys suorasta tarkoittaa pisteen kohtisuoraa etäisyyttä suorasta. Siis kuvan tangentin ja ympyrän keskipisteen etäisyys on janan  $OB$  pituus. Koska piste  $B$  ei ole ympyrän ja tangentin sivuamispiste, piste  $B$  ei ole ympyrällä. Täten janan  $OB$  pituus ei ole yhtä suuri kuin ympyrän säde.

Toisaalta tangentti sivuaa ympyrää yhdessä pisteessä. Koska tangentti kulkee ympyrän jonkin kehäpisteen kautta, ei tangentin etäisyys ympyrän keskipisteestä voi olla suurempi kuin ympyrän säde. Toisaalta, koska tangentilla ja ympyrällä on täsmälleen yksi yhteinen piste, ei tangentti voi kulkea ympyrän sisäpuolella. Täten tangentin etäisyys ympyrän keskipisteestä ei voi olla pienempi kuin ympyrän säde. Näin ollen tangentin etäisyys ympyrän keskipisteestä täytyy olla yhtä suuri kuin ympyrän säde.

On päädytty ristiriitaan. Jos tangentti ja sivuamispisteeseen piirretty säde eivät olisi kohtisuorassa, tangentin etäisyys ympyrän keskipisteestä ei olisi yhtä suuri kuin ympyrän säde.. Koska olettamalla vastoin väitettä päädyttiin ristiriitaan, täytyy väitteen olla tosi.

On osoitettu, että ympyrän tangentti ja sivuamispisteeseen piirretty säde ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.  $\square$