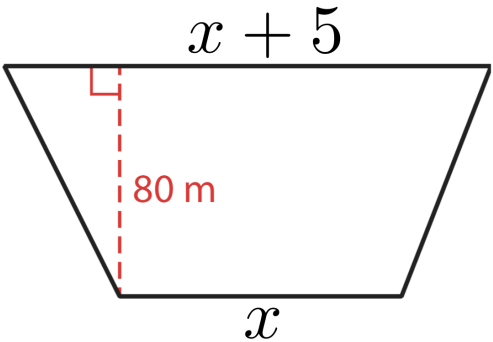
2.1

Merkitään lyhyemmän yhdensuuntaisen sivun pituutta metreinä kirjaimella x. Tällöin pidemmän yhdensuuntaisen sivun pituus on $x+5$.



Muunnetaan pinta-ala neliömetreiksi.

$A = 150 \text{ a} = 15\,000 \text{ m}^2$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan sivun pituus x.

$$A = \frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h \qquad A = 15\,000, a = x,\ b = x+5 \text{ ja } h = 80$$

$$15000 = \frac{1}{2}\cdot(x+x+5)\cdot 80 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

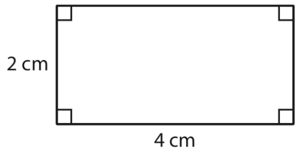
$$x = 185 \text{ (m)}$$

Lyhyempi sivu on 185 m ja pidempi sivu 185 m + 5 m = 190 m.

Vastaus
185 m ja 190 m

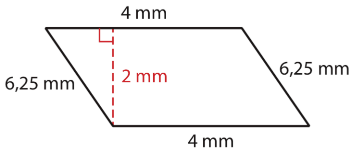
2.2

a) Monikulmio on suorakulmio. Lasketaan suorakulmion pinta-ala.



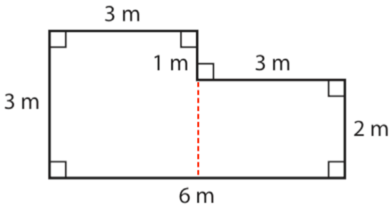
$A = 4 \cdot 2 = 8\ (\mathrm{cm}^2)$

b) Monikulmio on suunnikas. Lasketaan suunnikkaan pinta-ala.



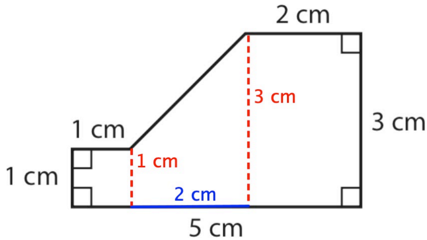
$A = 4 \cdot 2 = 8\ (\mathrm{mm}^2)$

c) Monikulmio koostuu kahdesta suorakulmiosta. Lasketaan monikulmion pinta-ala suorakulmioiden pinta-alojen summana.



$A = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 15\ (\mathrm{m}^2)$

d) Monikulmio koostuu neliöstä, puolisuunnikkaasta ja suorakulmiosta. Lasketaan monikulmion pinta-ala.



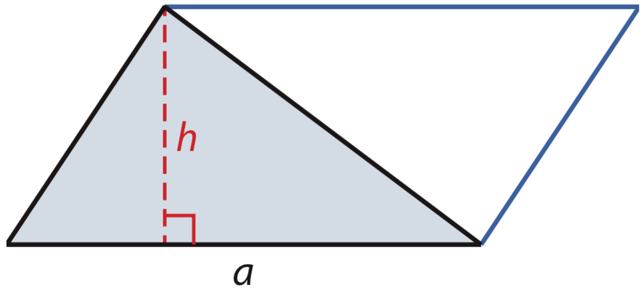
$A = 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + 3) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 11\ (\mathrm{cm}^2)$

Vastaus

a) $8\ \mathrm{cm}^2$ **b)** $8\ \mathrm{mm}^2$ **c)** $15\ \mathrm{m}^2$ **d)** $11\ \mathrm{cm}^2$

2.3

Piirretään kolmio. Merkitään kannan pituutta kirjaimella a ja korkeutta kirjaimella h. Täydennetään kolmio suunnikkaaksi.



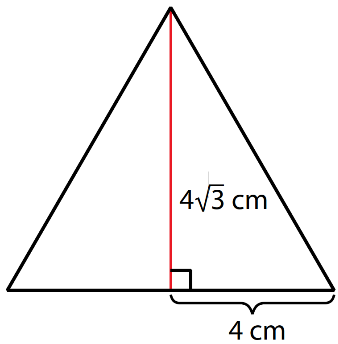
Koska suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät, on kuvion valkoisen kolmion kannan pituus a ja korkeus h. Täten väritetyn ja valkoisen kolmion pinta-alat ovat yhtä suuret ja puolet suunnikkaan pinta-alasta.

Koska suunnikkaan pinta-ala on ah, on kolmion pinta-ala $A = \frac{1}{2}ah$.

On osoitettu, että kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2}ah$, missä a on kannan pituus ja h korkeus. $\square$

2.4

Kolmio on tasasivuinen. Kolmion korkeusjana puolittaa kolmion kannan, joten kannan pituus on 8 cm.



Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 27{,}7128... \approx 28 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Kolmion pinta-ala on 28 cm^2.

Koska kolmio on tasasivuinen, kolmion jokainen sivu on yhtä pitkä eli 8 cm.

Lasketaan kolmion piiri.

$$p = 3 \cdot 8 = 24 \text{ (cm)}$$

Kolmion piiri on 24 cm.

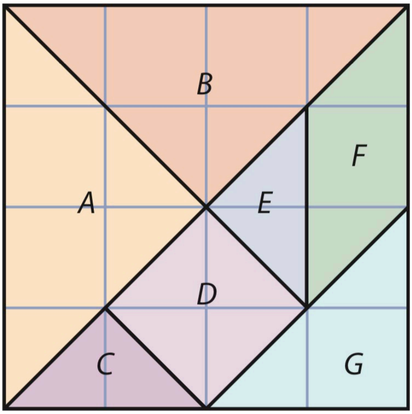
Vastaus

pinta-ala 28 cm^2 ja piiri 24 cm

2.5

Koko neliön sivun pituus on 10 cm. Lasketaan yhden pikkuruudun sivun pituus.

$$\frac{10\,\text{cm}}{4} = 2{,}5\ \text{cm}$$



Tunnistetaan osan muoto, luetaan mitat kuvasta ja lasketaan osan pinta-ala.

Osa $\boldsymbol{A}$ on kolmio, jonka kanta on 10 cm ja korkeus 5 cm.

$$A_A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25\ (\text{cm}^2)$$

Osa $\boldsymbol{B}$ on täsmälleen samanlainen kolmio kuin osa A. Pinta-ala on siis yhtä suuri.

$$A_B = A_A = 25\left(\text{cm}^2\right)$$

Osa ***C*** on kolmio, jonka kanta on 5 cm ja korkeus 2,5 cm.

$$A_C = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25 \ (\text{cm}^2)$$

Osa ***D*** on neliö, joka muodostuu neljästä kolmiosta, joiden kanta on 2,5 cm ja korkeus 2,5 cm.

$$A_D = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5 \ (\text{cm}^2)$$

Osa ***E*** on täsmälleen samanlainen kolmio kuin osa *C*. Pinta-ala on siis yhtä suuri.

$$A_E = A_C = 6{,}25 \ (\text{cm}^2)$$

Osa ***F*** on suunnikas, jonka kanta on 5 cm ja korkeus 2,5 cm.

$$A_F = 5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5 \ (\text{cm}^2)$$

Osa ***G*** on kolmio, jonka kanta on 5 cm ja korkeus 5 cm.

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12{,}5 \ (\text{cm}^2)$$

Vastaus

Osa A: 25 cm^2	Osa B: 25 cm^2	Osa C: 6,25 cm^2
Osa D: 6,25 cm^2	Osa E: 12,5 cm^2	Osa F: 12,5 cm^2
Osa G: 12,5 cm^2		

Huomaa, että vastauksen voi varmistaa laskemalla osien summan. Summan pitää olla yhtä suuri kuin koko neliön pinta-ala eli $10 \cdot 10 = 100 \ (\text{cm}^2)$.

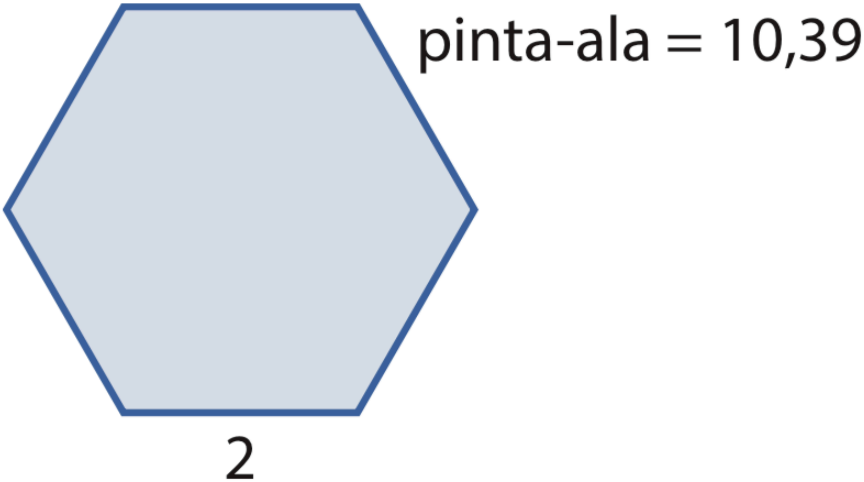
$$25 + 25 + 6{,}25 + 6{,}25 + 12{,}5 + 12{,}5 + 12{,}5 = 100 \ (\text{cm}^2)$$

2.6

Piirretään jana kiinteällä pituudella 2.

Piirretään säännöllinen kuusikulmio, jonka yhdeksi sivuksi valitaan piirretty jana.

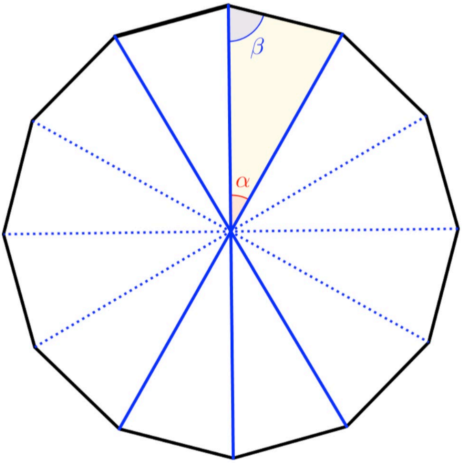
Mitataan kuusikulmion pinta-ala kahden desimaalin tarkkuudella.



Kuusikulmion pinta-ala on 10,39.

Vastaus
10,39

2.7



Säännöllinen 12-kulmio koostuu kahdestatoista yhtenevästä tasakylkisestä kolmiosta.

Kolmioiden huippukulmat α muodostavat täyden kulman. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan huippukulman α suuruus.

$$12\alpha = 360^\circ$$
$$\alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

Kolmion kulmien summa on 180°. Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kantakulman β suuruus.

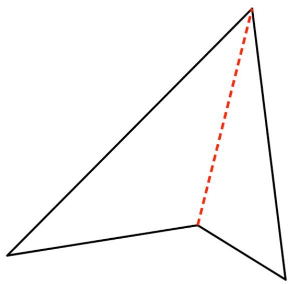
$$\alpha + 2\beta = 180^\circ$$
$$30^\circ + 2\beta = 180^\circ$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.
$$\beta = 75^\circ$$

Vastaus
$\alpha = 30^\circ$ ja $\beta = 75^\circ$

2.8

a) Kulmien summa näyttäisi olevan aina 360°, vaikka nelikulmion kärkiä siirtäisi.

b) Nelikulmio voidaan aina jakaa lävistäjällä kahdeksi kolmioksi.



Koska kolmion kulmien summa on aina 180°, nelikulmion kulmien summa on

$$2 \cdot 180^{\circ} = 360^{\circ}.$$

2.9

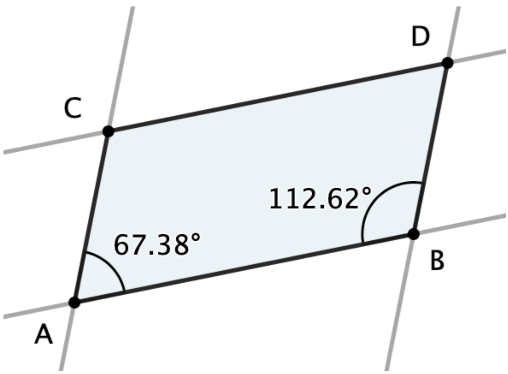
Piirretään suora AB.

Piirretään suoran AB ulkopuolisen pisteen C kautta kulkeva suoran AB kanssa **yhdensuuntainen** suora

Piirretään suora AC ja suoran AC kanssa **yhdensuuntainen** suora pisteen B kautta.

Merkitään neljäs **leikkauspiste** pisteeksi D.

Piirretään **monikulmio**-työkalulla suunnikas $ABDC$.



Mitataan vierekkäiset kulmat.

Lasketaan kulmien summa.

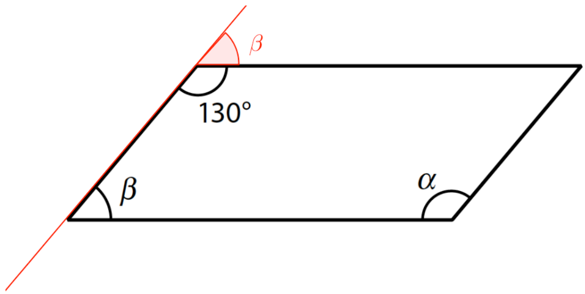
$67,38° + 112,62° = 180°$

Vaikka suunnikkaan muotoa muutetaan ja toistetaan kulmien summan laskeminen, summa vaikuttaisi aina olevan $180°$.

2.10

a) Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, joten .

Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, joten samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.



$\alpha = 130°$

Kulmat β ja $130°$ ovat siis vieruskulmia. Lasketaan kulman β suuruus.

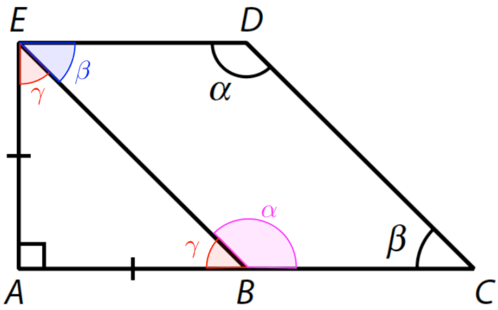
$\beta = 180° - 130° = 50°$

Huomaa, että kulman β suuruus voidaan ratkaista myös sen perusteella, että nelikulmion kulmien summa on $180°$.

$2 \cdot 130° + 2\beta = 360°$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$\beta = 50°$

b) Suunnikkaan $BCDE$ vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.
Tasakylkisen kolmion ABC kantakulmat E ja B ovat yhtä suuret.



Lasketaan ensin kolmion tasakylkisen kolmion ABE kantakulman suuruus kolmion kulmien summan perusteella.

$$\begin{aligned} 2\gamma + 90^\circ &= 180^\circ \quad && \big| -90^\circ \\ 2\gamma &= 90^\circ && \big| : 2 \\ \gamma &= 45^\circ \end{aligned}$$

Kulma α on kulman γ vieruskulma: $\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

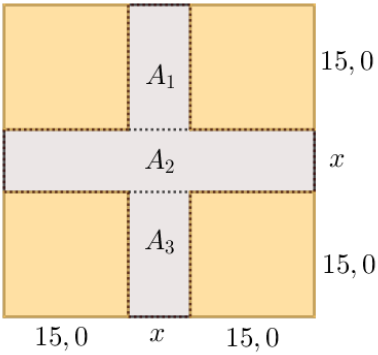
Koska $ACDE$ on puolisuunnikas, sivut BC ja ED ovat yhdensuuntaiset. Täten samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret eli $\sphericalangle AED = \sphericalangle CAE = 90^\circ$.

Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 90^\circ - \gamma = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

Vastaus
a) $\alpha = 130^\circ$ ja $\beta = 50^\circ$
b) $\alpha = 135^\circ$ ja $\beta = 45^\circ$

2.11



Merkitään raidan leveyttä kirjaimella x. Lasketaan raitojen pinta-alat.

$A_1 = A_3 = 15x$

$A_2 = x \cdot (15 + x + 15) = x(x + 30)$

Raitojen pinta-ala on yhtä suuri kuin keltaisten laattojen yhteenlaskettu pinta-ala.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan raidan leveys x.

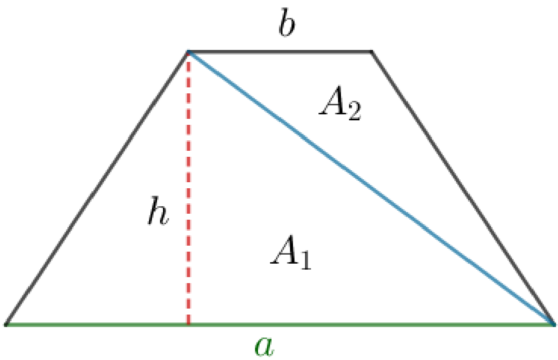
$$A_1 + A_2 + A_3 = 4 \cdot 15^2$$
$$2 \cdot 15x + x(x + 30) = 900 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = -72{,}42... \text{ tai } x = 12{,}42...$$

Raidan leveys on positiivinen luku, joten $x \approx 12{,}4$ cm.

Vastaus
12,4 cm

2.12

Piirretään mallikuva.



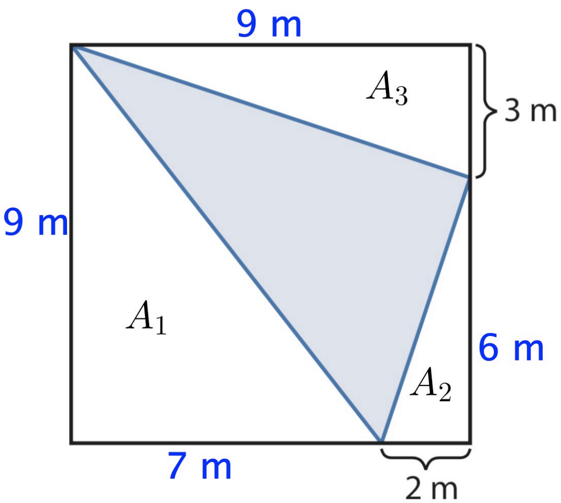
Puolisuunnikkas voidaan jakaa kahteen kolmioon, joilla on sama korkeus h. Puolisuunnikkaan pinta-ala on näiden kolmioiden pinta-alojen summa.

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
&= \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh && \text{Erotetaan yhteiset tekijät } \tfrac{1}{2} \text{ ja } h. \\
&= \frac{1}{2}(a+b)h
\end{aligned}
$$

On osoitettu, että puolisuunnikkaan pinta-ala on $A = \frac{1}{2}(a+b)h$, missä a ja b ovat yhdensuuntaisten sivujen pituudet ja h korkeus. $\square$

2.13

Neliö koostuu neljästä kolmiosta. Väritetyn kolmion pinta-ala voidaan laskea vähentämällä neliön pinta-alasta valkoisten suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat. Määritetään valkoisten kolmioiden kohtisuorien sivujen pituudet.



Lasketaan väritetyn kolmion pinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A &= A_{neliö} - A_1 - A_2 - A_3 \\
&= 9 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 \\
&= 30\ (\mathrm{m}^2)
\end{aligned}
$$

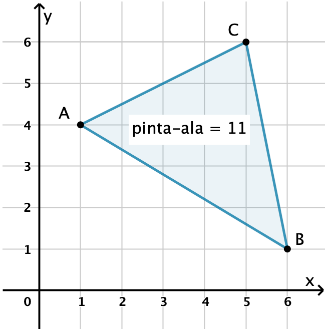
Väritetyn kolmion pinta-ala on $30\ \mathrm{m}^2$.

Vastaus

$30\ \mathrm{m}^2$

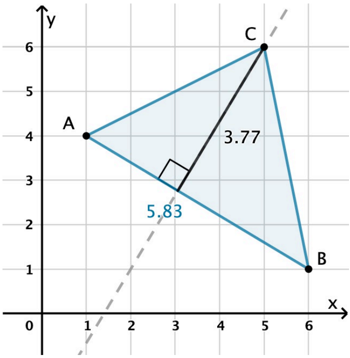
2.14

a) Piirretään tehtävänannon mukainen kuva.



Kolmion pinta-ala on 11.

b)



Piirretään kolmion yhdelle sivulle (esimerkiksi AB) vastaisen kärkipisteen kautta kulkeva normaali ja merkitään leikkauspiste.
Mitataan kolmion kannan pituus ja korkeus.
Kolmion kannan pituus $AB \approx 5{,}8$ ja kolmion korkeus $3{,}8$.
Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ah \\ &\approx \frac{1}{2} \cdot 5{,}8 \cdot 3{,}8 \\ &= 11{,}02 \\ &\approx 11 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $A = 11$ **b)** $A \approx 11$

2.15

Lasketaan alkuperäisen suunnikkaan pinta-ala.

$$A = ah = 7 \cdot 4 = 28 \ (\text{cm}^2)$$

a) Suunnikkaan korkeus kasvaa $50\ \%$, joten uusi korkeus on $1{,}50 \cdot 4 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$. $\quad 100\ \% + 50\ \% = 150\ \% = 1{,}50$

Merkitään uutta kannan pituutta kirjaimella x. Muodostetaan pinta-alasta yhtälö ja ratkaistaan x.

$$x \cdot 6 = 28 \qquad \text{kanta} \cdot \text{korkeus} = \text{pinta-ala}$$

$$x = \frac{28}{6} = \frac{14}{3} \ (\text{cm})$$

Verrataan kannan uutta pituutta alkuperäiseen pituuteen.

$$\frac{\frac{14}{3} \text{ cm}}{7 \text{ cm}} = 0{,}666... = 66{,}66...\ \%$$

Kanta lyheni $100\ \% - 66{,}66...\ \% = 33{,}33...\ \% \approx 33\ \%$.

b) Suunnikkaan korkeus pienenee $50\ \%$, joten uusi korkeus on $0{,}50 \cdot 4 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$. $\quad 100\ \% - 50\ \% = 50\ \% = 0{,}50$

Merkitään uutta kannan pituutta kirjaimella x. Muodostetaan pinta-alasta yhtälö ja ratkaistaan x.

$$x \cdot 2 = 28 \qquad \text{kanta} \cdot \text{korkeus} = \text{pinta-ala}$$

$$x = \frac{28}{2} = 14 \ (\text{cm})$$

Verrataan kannan uutta pituutta alkuperäiseen pituuteen.

$$\frac{14}{7} = 2 = 200\ \%$$

Kannan pituus kasvoi $200\ \% - 100\ \% = 100\ \%$.

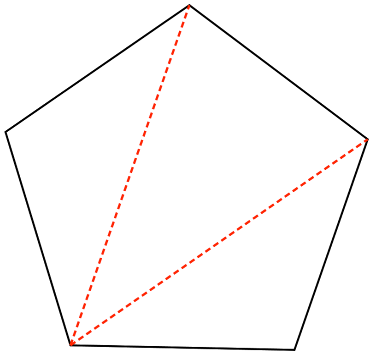
Vastaus

a) pienenee $33\ \%$

b) kasvaa $100\ \%$

2.16

a) Säännöllinen viisikulmio voidaan jakaa yhdestä kärjestä lähtevillä lävistäjillä kolmeksi kolmioksi.



Viisikulmion kulmat muodostuvat näiden kolmion kulmista. Koska kolmion kulmien summa on aina $180°$, on säännöllisen viisikulmion kulmien summa

$$3 \cdot 180° = 540°.$$

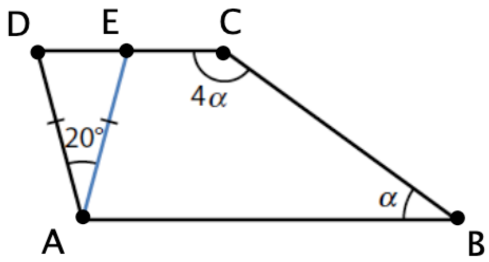
b) Säännöllisen viisikulmion jokainen kulma on yhtä suuri. Yhden kulman suuruus on siis

$$\frac{540°}{5} = 108°.$$

Vastaus
a) $540°$
b) $108°$

2.17

Käytetään kuvan merkintöjä.



Kolmio AED on tasakylkinen. Huippukulma on $20°$. Lasketaan kantakulman ($\sphericalangle ADE = \sphericalangle DEA$) suuruus.

$$\frac{180° - 20°}{2} = 80°$$

Koska $ABCD$ on puolisuunnikas, janat DC ja AB ovat yhdensuuntaiset. Täten samankohtaiset kulmat DEA ja BAE ovat yhtä suuret.

Siis $\sphericalangle BAE = 80°$ ja $\sphericalangle AEC = 180° - 80° = 100°$.

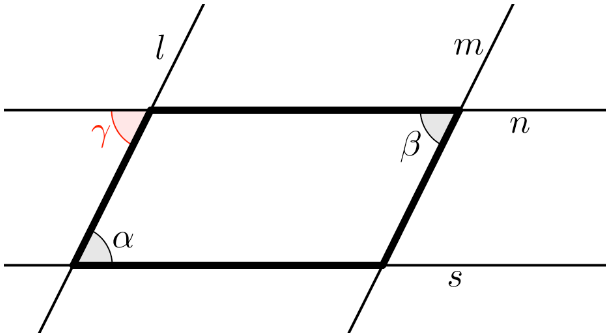
Nelikulmion kulmien summa on $360°$. Muodostetaan nelikulmion $ABCE$ yhtälö ja ratkaistaan kulman α suuruus.

$$\sphericalangle BAE + \sphericalangle AEC + 4\alpha + \alpha = 360°$$
$$100° + 80° + 5\alpha = 360° \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$\alpha = 36°$$

Vastaus

$\alpha = 36°$

2.18



Suunnikkaan määritelmän mukaan suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

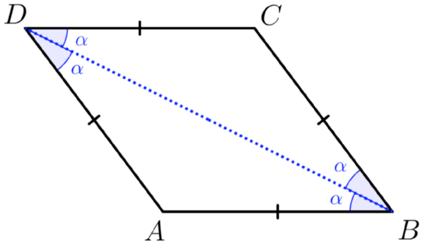
Koska suorat s ja n ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat α ja γ ovat yhtä suuret, $\alpha = \gamma$.

Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat β ja γ ovat yhtä suuret, $\beta = \gamma$.

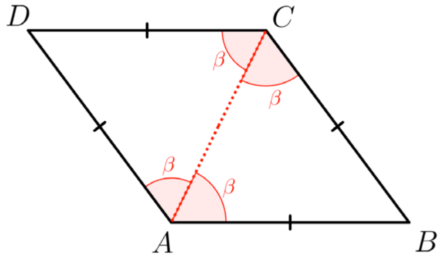
On siis osoitettu, että $\alpha = \beta$. $\square$

2.19

Lävistäjä BD jakaa neljäkkään kahteen tasakylkiseen kolmioon. Koska suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, niin kolmioiden huippukulmat A ja C ovat yhtä suuret. Täten myös kolmioiden ABD ja BCD kantakulmat ovat yhtä suuret.

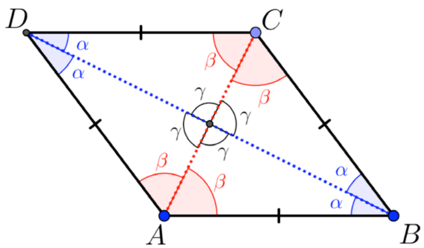


Vastaavasti lävistäjä AC jakaa neljäkkään kahteen tasakylkiseen kolmioon, joiden kantakulmat ovat yhtä suuret.



Molemmat lävistäjät jakavat neljäkkään neljään kolmioon. Jokaisessa näistä kolmiossa on kulmat α ja β. Täten kunkin kolmion kolmas kulma on yhtä suuri ($\gamma = 180° - \alpha - \beta$). Koska kyseiset kulmat muodostavat täyden kulman, niin yhden kulman suuruus on

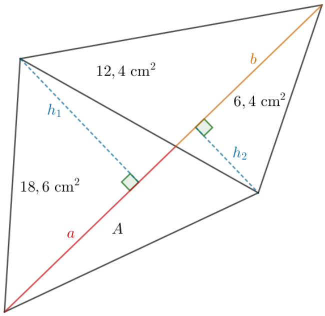
$$\gamma = \frac{360°}{4} = 90°.$$



On siis osoitettu, että neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. $\square$

2.20

Piirretään mallikuva. Käytetään kuvan merkintöjä.



Kahden ylimmän kolmion korkeus on h_1. Muodostetaan pinta-aloista yhtälöt. $\frac{1}{2}ah_1 = 18{,}6$ ja $\frac{1}{2}bh_1 = 12{,}4$ Jaetaan yhtälöt puolittain.

$$\frac{\cancel{\frac{1}{2}}a\cancel{h_1}}{\cancel{\frac{1}{2}}b\cancel{h_1}} = \frac{18{,}6}{12{,}4}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{18{,}6}{12{,}4}$$

Kahden alimman kolmion korkeus on h_2. Muodostetaan pinta-aloista yhtälöt. $\frac{1}{2}ah_2 = A$ ja $\frac{1}{2}bh_2 = 6{,}4$ Jaetaan yhtälöt puolittain.

$$\frac{\cancel{\frac{1}{2}}a\cancel{h_2}}{\cancel{\frac{1}{2}}b\cancel{h_2}} = \frac{A}{6{,}4}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{6{,}4}$$

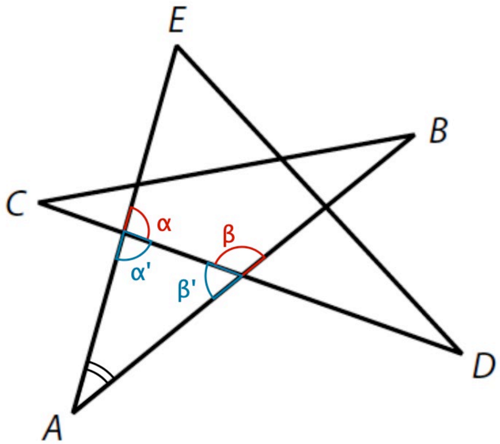
Saadaan siis $\frac{a}{b} = \frac{18{,}6}{12{,}4}$ ja $\frac{a}{b} = \frac{A}{6{,}4}$ eli $\frac{18{,}6}{12{,}4} = \frac{A}{6{,}4}$. Ratkaistaan yhtälöstä pinta-ala A.

$$\frac{18{,}6}{12{,}4} = \frac{A}{6{,}4}$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$A = 9{,}6 \ (\mathrm{cm}^2)$$

Vastaus 9,6 cm²

2.21



Tarkastellaan ensin kulmaa A. Käytetään kuvan merkintöjä.

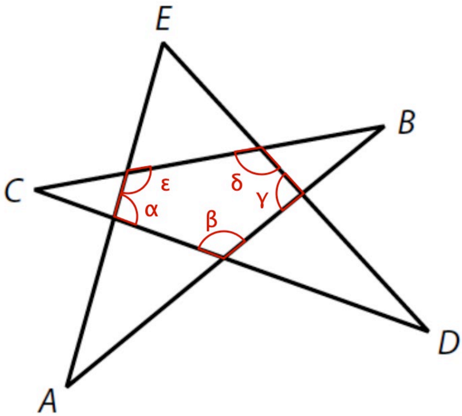
Kulmien α ja β vieruskulmat ovat

$$\alpha' = 180° - \alpha$$
$$\beta' = 180° - \beta.$$

Kolmion kulmien summa on $180°$, joten

$$\begin{aligned} \sphericalangle A + \alpha' + \beta' &= 180° && \alpha' = 180° - \alpha,\ \beta' = 180° - \beta \\ \sphericalangle A + 180° - \alpha + 180° - \beta &= 180° && \\ \sphericalangle A + 360° - \alpha - \beta &= 180° && \Big| -360° + \alpha + \beta \\ \sphericalangle A &= \alpha + \beta - 180° && \end{aligned}$$

Nimetään myös loput kuvion keskellä olevan viisikulmion kulmat ja ilmaistaan myös kulmat B, C, D ja E niiden avulla.



$$\sphericalangle A = \alpha + \beta - 180^\circ$$
$$\sphericalangle B = \gamma + \delta - 180^\circ$$
$$\sphericalangle C = \alpha + \varepsilon - 180^\circ$$
$$\sphericalangle D = \gamma + \beta - 180^\circ$$
$$\sphericalangle E = \varepsilon + \delta - 180^\circ$$

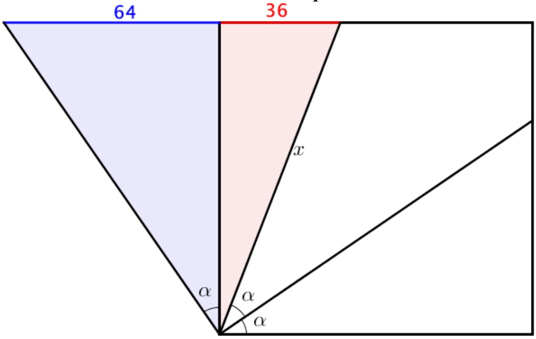
Lasketaan kulmien A, B, C, D ja E summa ja käytetään tietoa, että viisikulmion kulmien summa on 540° eli $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^\circ$.

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E \\
&= \alpha + \beta - 180^\circ + \gamma + \delta - 180^\circ + \alpha + \varepsilon - 180^\circ + \gamma + \beta - 180^\circ + \varepsilon + \delta - 180^\circ \\
&= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta + 2\varepsilon - 5 \cdot 180^\circ \\
&= 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) - 5 \cdot 180^\circ \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^\circ \\
&= 2 \cdot 540^\circ - 5 \cdot 180^\circ \\
&= 180^\circ
\end{aligned}$$

On siis osoitettu, että kulmien A, B, C, D ja E summa on 180° eli oikokulma. $\square$

2.22

Kierretään sininen kolmio punaisen kolmion viereen kuvan mukaisesti.



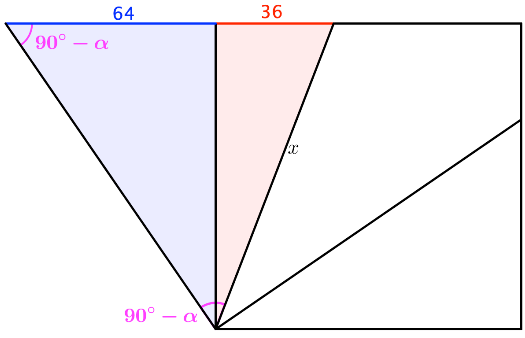
Koska neliön kaikki kulmat ovat $90°$, on punaisen kolmion alin kulma $90° - \alpha - \alpha = 90° - 2\alpha$.

Väritetyt kolmiot muodostavat yhdessä kolmion, jonka alin kulma on $\alpha + 90° - 2\alpha = 90° - \alpha$.

Koska sininen kolmio on suorakulmainen, on tutkittavan kolmion vasemmassa yläkulmassa oleva kulma

$180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$.

Merkitään lasketut kulmat kuvioon.



Tutkittavassa kolmiossa on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten kolmio on tasakylkinen. Kolmion kyljet ovat sivut, joiden pituudet ovat x ja $64 + 36 = 100$.

Siis $x = 100$.

Vastaus

$x = 100$