

3.1

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla x .

$$\begin{aligned} F'(x) &= D(3x^2 - 5x + 13) & D(f + g) &= Df + Dg \\ &= D3x^2 - D5x + D13 \\ &= 6x - 5 + 0 \\ &= 6x - 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. \square

3.2

a) $F(x) = (2x - 3)^2$ ja $f(x) = 8x - 12$.

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla x .

$$\begin{aligned} F'(x) &= D(\underbrace{(2x - 3)^2}_{u(s(x))}) & Du(s(x)) &= u'(s(x)) \cdot s'(x) \\ &= \underbrace{2(2x - 3)}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{2}_{s'(x)} & u(x) &= x^2 & s(x) &= 2x - 3 \\ &= (4x - 6) \cdot 2 & u'(x) &= 2x & s'(x) &= 2 \\ &= 8x - 12 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. \square

b) Funktiot $F(x) = \ln x - \sin x + 7$ ja $f(x) = \frac{1}{x} - \cos x$ ovat molemmat määriteltyjä, kun $x > 0$.

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x > 0$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= D(\ln x - \sin x + 7) & D(f + g) &= Df + Dg \\ &= D \ln x - D \sin x + D7 & D \ln x &= \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} - \cos x + 0 & D \sin x &= \cos x \\ &= \frac{1}{x} - \cos x & Dk &= 0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. \square

3.3

Tutkitaan, onko $F'(x) = f(x)$ kaikilla x .

a) $F(x) = 16x^2 - 16x$

$$\begin{aligned} F'(x) &= D(16x^2 - 16x) & D(f + g) &= Df + Dg \\ &= D16x^2 - D16x \\ &= 32x - 16 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Funktio F on siis funktion f integraalifunktio.

b) $F(x) = (4x - 2)^2$

$$\begin{aligned} F'(x) &= D((4x - 2)^2) & Df^n &= nf^{n-1}Df \\ &= 2(4x - 2) \cdot 4 \\ &= (8x - 4) \cdot 4 \\ &= 32x - 16 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Funktio F on siis funktion f integraalifunktio.

c) $F(x) = (2x - 4)^2 + 12x^2$

$$\begin{aligned} F'(x) &= D((2x - 4)^2 + 12x^2) & D(f + g) &= Df + Dg \\ &= D((2x - 4)^2) + D12x^2 & Df^n &= nf^{n-1}Df \\ &= 2(2x - 4) \cdot 2 + 24x \\ &= 8x - 16 + 24x \\ &= 32x - 16 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Funktio F on siis funktion f integraalifunktio.

Vastaus

a) on

b) on

c) on

3.4

Tutkitaan, onko $F'(x) = f(x)$ kaikilla x .

a) $F(x) = \sin 2x + \cos 3x + 4$

$$F'(x) = D(\sin 2x + \cos 3x + 4)$$

$$= D \sin 2x + D \cos 3x + D4$$

$=0$

$$= \cos 2x \cdot 2 - \sin 3x \cdot 3 + 0$$

$$= 2 \cos 2x - 3 \sin 3x$$

$$\neq f(x)$$

$$Du(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

$$D \sin x = \cos x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

$$f(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$$

Funktio F ei ole funktion f integraalifunktio.

Esimerkiksi $F'(\pi) = 2$ ja $f'(\pi) = -2 \neq F'(\pi)$.

b) $F(x) = \sin^2 x + \cos^3 x + 9$

$$F'(x) = D(\sin^2 x + \cos^3 x + 9)$$

$$= D \sin^2 x + D \cos^3 x + D9$$

$=0$

$$= D((\sin x)^2) + D((\cos x)^3)$$

$$Du(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x + 3(\cos x)^2 \cdot (-\sin x)$$

$$= 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x \sin x$$

$$f(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$$

$$\neq f(x)$$

Funktio F ei ole funktion f integraalifunktio.

Esimerkiksi $F'(\pi) = 0$ ja $f'(\pi) = -2 \neq F'(\pi)$.

c) $F(x) = 2\sin x + 3\cos x + 5$

$$F'(x) = D(2\sin x + 3\cos x + 5)$$

$$= D2\sin x + D3\cos x + D5$$

$$= 2D\sin x + 3D\cos x$$

$$= 2 \cdot \cos x + 3 \cdot (-\sin x)$$

$$= 2\cos x - 3\sin x$$

$$= f(x)$$

$$Dkf = kDf$$

$$D\sin x = \cos x$$

$$D\cos x = -\sin x$$

Funktio F on siis funktion f integraalifunktio.

Vastaus

- a) ei
- b) ei
- c) on

3.5

$$F(x) = -x^4 + 2x + C \quad \text{ja} \quad f(x) = -4x^3 + 2.$$

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla x .

$$\begin{aligned} F'(x) &= D(-x^4 + 2x + C) \\ &= -4x^3 + 2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Derivoidaan CAS-laskimella.

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. \square

a) Määritetään vakion C arvo niin, että integraalifunktion

$$F(x) = -x^4 + 2x + C \quad \text{kuvaaja kulkee pisteen } (1, 3) \text{ kautta.}$$

Lisätään piirtoalueelle liikusäädin C . Määritetään minimiarvoksi esimerkiksi -10 , maksimiarvoksi 10 ja animaatioaskeleeksi $0,1$.

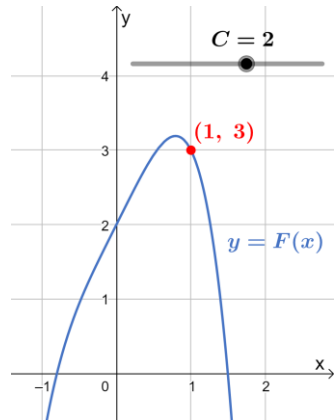
Piirretään funktion F kuvaaja ja piste $(1, 3)$.

Määritetään liikusäätimen avulla vakion C arvo niin, että funktion F kuvaaja kulkee pisteen $(1, 3)$ kautta.

Saadaan $C \approx 2$.

Integraalifunktio on

$$F(x) \approx -x^4 + 2x + 2.$$



b) Määritetään vakion C arvo niin, että integraalifunktion

$F(x) = -x^4 + 2x + C$ kuvaaja kulkee pisteen $(1, 3)$ kautta.

$$F(1) = 3$$

$$-1^4 + 2 \cdot 1 + C = 3$$

$$C = 2$$

$$F(x) = -x^4 + 2x + C$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Integraalifunktio on $F(x) = -x^4 + 2x + 2$.

Vastaus

a) $F(x) \approx -x^4 + 2x + 2$

b) $F(x) = -x^4 + 2x + 2$

3.6

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= D(2x^3 + x^2 - 3x + C) \\ &= 6x^2 + 2x - 3 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Derivoidaan CAS-laskimella.

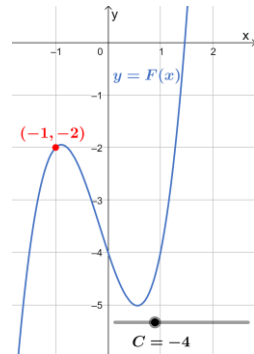
On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. \square

- a) Määritetään appletin liikusäätimen avulla vakion C arvo niin, että funktion F kuvaaja kulkee pisteen $(-1, -2)$ kautta.

Saadaan $C \approx -4$.

Integraalifunktio on

$$F(x) \approx 2x^3 + x^2 - 3x - 4.$$



- b) Määritetään vakion C arvo niin, että integraalifunktion $F(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + C$ kuvaaja kulkee pisteen $(-1, -2)$ kautta.

$$F(-1) = -2$$

$$2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + C = -2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$C = -4$$

Integraalifunktio on $F(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 4$.

Vastaus

a) $F(x) \approx 2x^3 + x^2 - 3x - 4$

b) $F(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 4$

3.7

Funktion $f(x) = 12x^3 - 4x + 2$ eräs integraalifunktio on

$F(x) = 3x^4 - 2x^2 + 2x$, sillä

$$\begin{aligned} F'(x) &= D(3x^4 - 2x^2 + 2x) \\ &= D3x^4 - D2x^2 + D2x \\ &= 12x^3 - 4x + 2 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$$D(f + g) = Df + Dg$$

On osoitettu, että $F(x) = 3x^4 - 2x^2 + 2x$ on eräs funktion f integraalifunktio. \square

Vastaus

Esimerkiksi $F(x) = 3x^4 - 2x^2 + 2x$.

3.8

- a) Funktio $f(x) = 4x^3 + 5$ eräs integraalifunktio on $F_0(x) = x^4 + 5x$, sillä

$$\begin{aligned} F_0'(x) &= D(x^4 + 5x) & D(f + g) &= Df + Dg \\ &= Dx^4 + D5x \\ &= 4x^3 + 5 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

On osoitettu, että $F_0(x) = x^4 + 5x$ on eräs funktion f integraalifunktio. \square

- b) Funktio F on funktion f integraalifunktio täsmälleen silloin, kun $F(x) = F_0(x) + C$, missä $C \in \mathbf{R}$ on vakio.

Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat siis

$$F(x) = F_0(x) + C = x^4 + 5x + C.$$

c) Määritetään vakion C arvo niin, että integraalifunktio

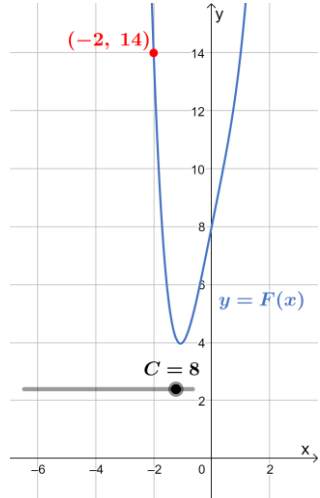
$F(x) = x^4 + 5x + C$ saa kohdassa -2 arvon 14 , eli sen kuvaaja kulkee pisteen $(-2, 14)$ kautta.

Lisätään piirtoalueelle liikusäädin C .
Määritetään minimiarvoksi esimerkiksi -10 , maksimiarvoksi 10 ja animaatioaskeleeksi $0,1$.

Piirretään funktion F kuvaaja ja piste $(-2, 14)$.

Määritetään liikusäätimen avulla vakion C arvo niin, että funktion F kuvaaja kulkee pisteen $(-2, 14)$ kautta.

Saadaan $C \approx 8$.



Integraalifunktio on $F(x) \approx x^4 + 5x + 8$.

Vastaus

a) Esimerkiksi $F_0(x) = x^4 + 5x$.

b) $F(x) = x^4 + 5x + C$

c) $F(x) \approx x^4 + 5x + 8$

3.9

a) Funktiot F_1 , F_2 ja f ovat kaikki määriteltyjä, kun $x > 1$.

Osoitetaan derivoimalla, että $F_1'(x) = f(x)$, kun $x > 1$.

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= D \frac{1}{1-x} & F_1(x) &= \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{D1 \cdot (1-x) - 1 \cdot D(1-x)}{(1-x)^2} & D \frac{f}{g} &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\ &= \frac{\overset{=0}{0} \cdot (1-x) - (D1 - Dx)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(0-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Osoitetaan derivoimalla, että $F_2'(x) = f(x)$, kun $x > 1$.

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= D \frac{x}{1-x} & F_2(x) &= \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{Dx \cdot (1-x) - x \cdot D(1-x)}{(1-x)^2} & D \frac{f}{g} &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\ &= \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{(1-x) + x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On osoitettu, että $F_1'(x) = f(x)$ ja $F_2'(x) = f(x)$, kun $x > 1$. \square

b) Sievennetään erotus $F_1(x) - F_2(x)$.

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_2(x) &= \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} && x > 1 \\ &= \frac{1-x}{1-x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$F_1(x) - F_2(x) = 1 \text{ kaikilla } x > 1.$$

c) Ilmaistaan b-kohdan tulosta hyödyntäen funktio $F_1(x)$ funktion $F_2(x)$ avulla.

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_2(x) &= 1 \\ F_1(x) &= F_2(x) + 1 \end{aligned}$$

Vastaus

a) ks. tehtävän ratkaisu

b) $F_1(x) - F_2(x) = 1$ kaikilla $x > 1$.

c) $F_1(x) = F_2(x) + 1$

3.10

Funktio F on funktion f integraalifunktio täsmälleen silloin, kun f on funktion F derivaattafunktio, toisin sanoen

$$\int f(x)dx = F(x) \text{ jos ja vain jos } F'(x) = f(x).$$

a) $F'(x) = D \frac{1}{2} \sin^2 x + C$

$$= D \frac{1}{2} \sin^2 x + \underset{DC}{0}$$

$$= \frac{1}{2} D(\sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2} D(\sin x)^2$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$= \sin x \cos x$$

$$= f(x)$$

$$D(f + g) = Df + Dg$$

$$Dkf = kDf$$

$$Df^n = nf^{n-1}Df$$

Väite a on siis **tos**i.

b) $F'(x) = D -\frac{1}{2} \cos^2 x + C$

$$= D -\frac{1}{2} \cos^2 x + 0$$

$$= -\frac{1}{2} D \cos^2 x$$

$$= -\frac{1}{2} D(\cos x)^2$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \cos x \cdot (-\sin x)$$

$$= \cos x \sin x$$

$$= \sin x \cos x$$

$$= f(x)$$

$$D(f + g) = Df + Dg$$

$$Dkf = kDf$$

$$Du(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

Väite b on siis **tos**i.

$$\begin{aligned}
\text{c) } F'(x) &= D(\sin x \cos x + C) \\
&= D \sin x \cos x + 0 \\
&= D \sin x \cdot \cos x + D \cos x \cdot \sin x \\
&= \cos x \cdot \cos x + (-\sin x) \cdot \sin x \\
&= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= \cos 2x \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

$$D(f + g) = Df + Dg$$

$$D(f \cdot g) = f' \cdot g + f' \cdot g$$

$$D \sin x = \cos x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

Väite c on siis **tos**i.

Vastaus

a, b ja c

3.11

a) Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla x .

$$\begin{aligned} F'(x) &= D\left(\frac{(6x-8)^2}{4}\right) \\ &= D\frac{1}{4}(6x-8)^2 \\ &= \frac{1}{4}D((6x-8)^2) && Df^n = nf^{n-1}Df \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (6x-8) \cdot 6 \\ &= \frac{12}{4} \cdot (6x-8) \\ &= 3 \cdot (6x-8) \\ &= 18x - 24 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. \square

b) Funktiot F ja f ovat molemmat määriteltyjä, kun $x > 0$.

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x > 0$.

$$F'(x) = D(\ln x + \cos x^3)$$

$$= D \ln x + D \cos x^3$$

$$= \frac{1}{x} + \underbrace{D \cos x^3}_{u(s(x))}$$

$$= \frac{1}{x} + \underbrace{-\sin x^3}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{3x^2}_{s'(x)}$$

$$= \frac{1}{x} - \overset{x}{3x^2} \sin x^3$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{3x^3 \sin x^3}{x}$$

$$= \frac{1 - 3x^3 \sin x^3}{x}$$

$$= f(x)$$

$$D \ln x = \frac{1}{x}$$

$$Du(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

$$u(x) = \cos x \quad s(x) = x^3$$

$$u'(x) = -\sin x \quad s'(x) = 3x^2$$

Lavennetaan samannimisiksi.

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. \square

3.12

a) Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = D(e^{2x}(2-x)^4)$$

$$= De^{2x} \cdot (2-x)^4 + D(2-x)^4 \cdot e^{2x}$$

$$= e^{2x} \cdot 2 \cdot (2-x)^4 + 4(2-x)^3 \cdot (-1) \cdot e^{2x}$$

$$= 2e^{2x} \cdot (2-x)^4 - 4e^{2x} \cdot (2-x)^3$$

$$= 2e^{2x} \cdot ((2-x)^4 - 2(2-x)^3)$$

$$= 2e^{2x} \cdot (2-x)^3 \cdot ((2-x) - 2)$$

$$= 2e^{2x} \cdot (2-x)^3 \cdot (-x)$$

$$= -2x \cdot e^{2x} \cdot (2-x)^3$$

$$= -2x \cdot e^{2x} \cdot (-1)^3(x-2)^3$$

$$= -2x \cdot e^{2x} \cdot (-1) \cdot (x-2)^3$$

$$= 2x \cdot e^{2x} \cdot (x-2)^3$$

$$= f(x)$$

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. \square

b) Funktiot F ja f ovat molemmat määriteltyjä, kun $x > 1$.

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x > 1$.

$$F'(x) = D \frac{3x+4}{x-1}$$

$$D \frac{f}{g} = \frac{gDf - fDg}{g^2}$$

$$= \frac{(x-1) \cdot D(3x+4) - (3x+4) \cdot D(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1) \cdot 3 - (3x+4) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{3x-3-3x-4}{(x-1)^2}$$

$$= -\frac{7}{(x-1)^2}$$

$$= f(x)$$

Poistetaan sulut.

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. \square

3.13

Tiedetään, että $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$, missä $x > 0$.

a) Funktio $F(x) = x - 4\sqrt{x} + 9$ on määritelty, kun $x > 0$. Tutkitaan, onko $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x > 0$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= D x - 4D\sqrt{x} + D9 \\ &= Dx - D 4\sqrt{x} + D9 && Dkf = kDf \\ &= 1 - 4 \cdot D \sqrt{x} && D \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 1 - \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} && 1 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Funktio F on siis funktion f integraalifunktio.

b) Funktio $F(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ on määritelty, kun $x > 0$. Tutkitaan, onko

$F'(x) = f(x)$ kaikilla $x > 0$.

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= D\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) & D\frac{f}{g} &= \frac{gDf - fDg}{g^2} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}+1) \cdot D(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \cdot D(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2} & D(f+g) &= Df + Dg \\
 &= \frac{(\sqrt{x}+1) \cdot D(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \cdot D(\sqrt{x}) + 0}{(\sqrt{x}+1)^2} & \text{yhteinen tekijä } D(\sqrt{x}) \\
 &= \frac{D(\sqrt{x}) \cdot \overbrace{((\sqrt{x}+1) - \sqrt{x})}^{=1}}{(\sqrt{x}+1)^2} & D(\sqrt{x}) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} & f(x) &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \\
 &\neq f(x)
 \end{aligned}$$

Funktio F ei ole funktion f integraalifunktio.

Esimerkiksi $F'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}(\sqrt{1}+1)^2} = \frac{1}{8}$ ja $f(1) = \frac{\sqrt{1}-2}{\sqrt{1}} = -1$.

- c) $F(x) = (\sqrt{x} - 2)^2$ on määritelty, kun $x > 0$. Tutkitaan, onko $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x > 0$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= D((\sqrt{x} - 2)^2) & Dg(f(x)) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= 2 \cdot (\sqrt{x} - 2) \cdot D(\sqrt{x} - 2) & D(f + g) &= Df + Dg \\ &= 2 \cdot (\sqrt{x} - 2) \cdot D(\sqrt{x}) - 0 & D(\sqrt{x}) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2 \cdot (\sqrt{x} - 2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\cancel{2} \cdot (\sqrt{x} - 2)}{\cancel{2}\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Funktio F on siis funktion f integraalifunktio.

Vastaus

- a) on
- b) ei
- c) on

3.14

Tutkitaan, onko $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x > 0$.

$$F'(x) = D(x^2 + 4\sqrt{x} + C)$$

$$= 2x + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$= f(x)$$

Derivoidaan CAS-laskimella.

Laskin voi antaa vastauksen eri muodossa.

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. \square

- a) Funktio saa kohdassa 1 arvon -4 , kun sen kuvaaja kulkee pisteen $(1, -4)$ kautta.

Määritetään vakion C arvo niin, että integraalifunktion

$$F(x) = x^2 + 4\sqrt{x} + C \text{ kuvaaja kulkee pisteen } (1, -4) \text{ kautta.}$$

Lisätään piirtoalueelle liikusäädin C . Määritetään minimiarvoksi esimerkiksi -10 , maksimiarvoksi 10 ja animaatioaskeleeksi $0,1$.

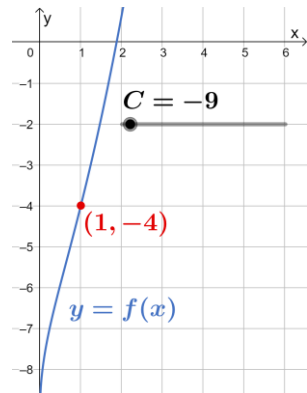
Piirretään funktion F kuvaaja ja piste $(1, -4)$.

Määritetään liikusäätimen avulla vakion C arvo niin, että funktion F kuvaaja kulkee pisteen $(1, -4)$ kautta.

Saadaan $C \approx -9$.

Integraalifunktio on

$$F(x) \approx x^2 + 4\sqrt{x} - 9.$$



b) Määritetään vakion C arvo niin, että integraalifunktio

$F(x) = x^2 + 4\sqrt{x} + C$ saa kohdassa $x = 1$ arvon -4 .

$$F(1) = -4$$

$$1^2 + 4\sqrt{1} + C = -4$$

$$C = -9$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Integraalifunktio on $F(x) = x^2 + 4\sqrt{x} - 9$.

Vastaus

a) $F(x) \approx x^2 + 4\sqrt{x} - 9$

b) $F(x) = x^2 + 4\sqrt{x} - 9$

3.15

- a) Funktiot $F(x) = x \ln x + 5$ ja $f(x) = 1 + \ln x$ ovat molemmat määriteltyjä, kun $x > 0$.

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x > 0$.

$$F'(x) = D(x \ln x + 5)$$

$$= D(x \ln x) + D5$$

$$D(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$Dk = 0$$

$$= Dx \cdot \ln x + x \cdot D \ln x + 0$$

$$D \ln x = \frac{1}{x}$$

$$= 1 \cdot \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= \ln x + 1$$

$$= 1 + \ln x$$

$$= f(x)$$

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. \square

- b) Funktio $G(x) = 2x \ln x + 5$ on määritelty, kun $x > 0$.

Funktio $g(x) = 2 + \ln x^2$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Koska funktioilla on eri määrittelyjoukko, niin funktio G ei ole funktion g integraalifunktio.

Vastaus

- a) ks. ratkaisu

- b) Ei ole, sillä funktioilla on eri määrittelyjoukko.

Funktio G on määritelty, kun $x > 0$, ja funktio g , kun $x \neq 0$.

3.16

Funktion $f(x) = -\sin x - 2x$ eräs integraalifunktio on

$F(x) = \cos x - x^2$, sillä

$$\begin{aligned} F'(x) &= D(\cos x - x^2) \\ &= D \cos x - D x^2 \\ &= -\sin x - 2x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$$D(f + g) = Df + Dg$$

$$D \cos x = -\sin x$$

On osoitettu, että $F(x) = \cos x - x^2$ on eräs funktion f integraalifunktio. \square

Vastaus

Esimerkiksi $F(x) = \cos x - x^2$.

3.17

a) Olkoon funktio $f(x) = 34x^{33}$.

Funktio f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = x^{34}$, sillä

$$\begin{aligned} F_0'(x) &= D(x^{34}) \\ &= 34x^{33} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Näin ollen $\int 34x^{33} dx = F_0(x) + C = x^{34} + C$.

b) Olkoon funktio $f(x) = 6$.

Funktio f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = 6x$, sillä

$$\begin{aligned} F_0'(x) &= D(6x) \\ &= 6 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Näin ollen $\int 6 dx = F_0(x) + C = 6x + C$.

Vastaus

a) $x^{34} + C$

b) $6x + C$

3.18

a) Funktion $f(x) = 6 \cos x$ eräs integraalifunktio on $F_0(x) = 6 \sin x$, sillä

$$\begin{aligned} F_0'(x) &= D(6 \sin x) \\ &= 6 \cdot D \sin x \\ &= 6 \cos x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dkf &= kDf \\ D \sin x &= \cos x \end{aligned}$$

b) Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= F_0(x) + C \\ &= 6 \sin x + C. \end{aligned}$$

$$F_0(x) = 6 \sin x$$

Funktion $\sin x$ arvojoukko on $[-1, 1]$. Integraalifunktio F saa suurimman arvonsa, kun funktio $\sin x$ saa suurimman arvonsa, eli arvon 1.

$$\begin{aligned} F(x) &= 7 \\ 6 \sin x + C &= 7 \\ 6 \cdot 1 + C &= 7 \\ 6 + C &= 7 \quad | -6 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 6 \sin x + C \\ \text{Sijoitetaan } \sin x &= 1. \end{aligned}$$

Funktion f integraalifunktioista se, jonka suurin arvo on 7, on $F(x) = 6 \sin x + 1$.

Vastaus

a) Esimerkiksi $F_0(x) = 6 \sin x$.

b) $F(x) = 6 \sin x + 1$

3.19

a) Osoitetaan, että $F_1'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned}
 F_1'(x) &= D\left(\frac{1}{x^2+3}\right) \\
 &= \frac{D1 \cdot (x^2+3) - 1 \cdot D(x^2+3)}{(x^2+3)^2} \\
 &= \frac{\overbrace{0 \cdot (x^2+3)}^{=0} - (Dx^2 + D3)}{(x^2+3)^2} \\
 &= -\frac{-(2x+0)}{(x^2+3)^2} \\
 &= \frac{-2x}{(x^2+3)^2} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \frac{1}{x^2+3} \\
 D\frac{f}{g} &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\
 Dk &= 0 \\
 D(f+g) &= Df + Dg
 \end{aligned}$$

Osoitetaan, että $F_2'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned}
 F_2'(x) &= D\left(\frac{5x^2+16}{x^2+3}\right) \\
 &= \frac{D(5x^2+16) \cdot (x^2+3) - (5x^2+16) \cdot D(x^2+3)}{(x^2+3)^2} \\
 &= \frac{\overbrace{(D(5x^2) + D16)}^{=10x \quad =0} \cdot (x^2+3) - (5x^2+16) \cdot \overbrace{(Dx^2 + D3)}^{=2x \quad =0}}{(x^2+3)^2} \\
 &= \frac{10x \cdot (x^2+3) - (5x^2+16) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} \\
 &= \frac{10x^3 + 30x - 10x^3 - 32x}{(x^2+3)^2} \\
 &= \frac{-2x}{(x^2+3)^2} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

Poistetaan sulut.

On osoitettu, että $F_1'(x) = f(x)$ ja $F_2'(x) = f(x)$. \square

$$\begin{aligned}
 \text{b) } F_2(x) - F_1(x) &= \frac{5x^2 + 16}{x^2 + 3} - \frac{1}{x^2 + 3} \\
 &= \frac{5x^2 + 16 - 1}{x^2 + 3} \\
 &= \frac{5x^2 + 15}{x^2 + 3} \\
 &= \frac{\cancel{5(x^2 + 3)}}{\cancel{x^2 + 3}} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

Yhteinen tekijä 5.

$$F_2(x) - F_1(x) = 5 \text{ kaikilla } x.$$

- c) Ilmaistaan b-kohdan tietoja hyödyntäen funktio $F_2(x)$ funktion $F_1(x)$ avulla.

$$F_2(x) - F_1(x) = 5$$

$$F_2(x) = F_1(x) + 5$$

Vastaus

a) ks. tehtävän ratkaisu

b) $F_2(x) - F_1(x) = 5$ kaikilla x .

c) $F_2(x) = F_1(x) + 5$

3.20

a) Funktio $g(x) = \ln(x^2 + 3x + 5)$ on määritelty, kun $x^2 + 3x + 5 > 0$.

Tutkitaan funktion $f(x) = x^2 + 3x + 5$ nollakohtia diskriminantin avulla.

$$x^2 + 3x + 5 = 0$$

$ax^2 + bx + c$, missä

$a = 1$, $b = 3$ ja $c = 5$.

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Koska diskriminantti $D < 0$, funktiolla ei ole nollakohtia. Funktion kuvaaja sijaitsee siis kokonaan x -akselin yläpuolella ja $f(x) > 0$ kaikilla x .

Funktion g määrittelyjoukko on siis koko reaalilukujen joukko \mathbf{R} .

b) Derivoidaan funktio $g(x) = \ln(x^2 + 3x + 5)$.

$$g'(x) = D(\ln(x^2 + 3x + 5))$$

$$D(u(s(x))) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

$$D \ln x = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 3x + 5} \cdot D(x^2 + 3x + 5)$$

$$= \frac{1}{x^2 + 3x + 5} \cdot 2x + 3$$

$$= \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5}$$

c) Koska $\frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5}$ on funktion g derivaatta, niin funktion

$\frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5}$ kaikki integraalifunktiot ovat $g(x) + C$. Siis

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5} dx = \int g'(x) dx = g(x) + C = \ln(x^2 + 3x + 5) + C.$$

Vastaus

a) \mathbf{R}

b) $g'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+5}$

c) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx = \ln(x^2+3x+5) + C$

3.21

Funktio f on kaikkialla jatkuva ja aidosti kasvava. Funktiolla on lisäksi erimerkkiset arvot $f(1) = -13 < 0$ ja $f(134) = 8 > 0$, joten sillä on täsmälleen yksi nollakohta. Merkitään funktion f nollakohtaa x_0 .

Jos $F(x) = \int f(x)dx$, niin $F'(x) = f(x)$. Integraalifunktion F ääriarvoja voidaan näin ollen tarkastella sen derivaatan, eli funktion f arvojen merkin avulla. Laaditaan kulkukaavio.

	x_0	
$F'(x) = f(x)$	-	+
$F(x)$	↘	↗

Kulkukaaviosta nähdään, että integraalifunktio F saa pienimmän arvonsa kohdassa x_0 . \square

3.22

Lause: Olkoon F_0 jokin funktion f integraalifunktio. Tällöin funktio F on funktion f integraalifunktio täsmälleen silloin, kun $F(x) = F_0(x) + C$.

On siis osoitettava, että

- 1) Jokainen muotoa $F(x) = F_0(x) + C$ oleva funktio on funktion f integraalifunktio.
- 2) Jokainen funktion f integraalifunktio on muotoa $F(x) = F_0(x) + C$.

Todistus:

- 1) Koska funktio F_0 on jokin funktion f integraalifunktio, niin $F_0'(x) = f(x)$. Näin ollen

$$D(F_0(x) + C) = DF_0(x) + DC = F_0'(x) + 0 = f(x).$$

Jokainen funktio $F(x) = F_0(x) + C$ on siis funktion f integraalifunktio.

- 2) Tarkastellaan erotusfunktiota $h = F(x) - F_0(x)$.

$$D(F(x) - F_0(x)) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Funktio $F(x) - F_0(x)$ on siis vakiofunktio. Merkitsemällä tätä vakiota kirjaimella C saadaan

$$\begin{aligned} F(x) - F_0(x) &= C \\ F(x) &= F_0(x) + C. \quad \square \end{aligned}$$