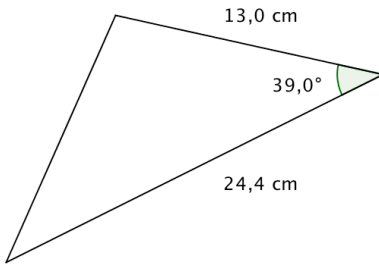


6.1



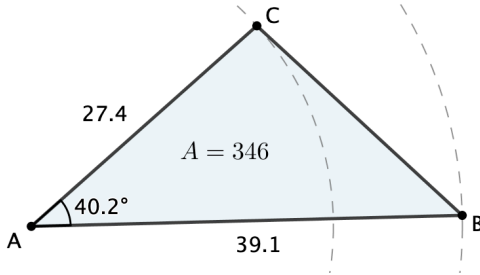
Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad \left| \begin{array}{l} a = 13,0 \\ b = 24,4 \\ \gamma = 39,0^\circ \end{array} \right.$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 13,0 \cdot 24,4 \cdot \sin 39,0^\circ$$
$$= 99,81\dots$$
$$\approx 99,8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus
99,8 cm²

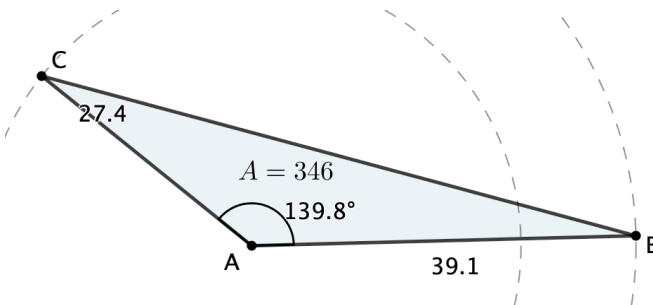
6.2

- a) Piirretään samankeskiset ympyrät, joista toisen säde on 27,4 ja toisen 39,1.



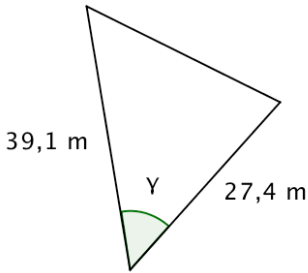
Siirtämällä pistettä C saadaan säädelyä kolmion ABC pinta-alaa. Kun $\alpha \approx 40^\circ$, kolmion pinta-ala on 346.

Siirtämällä pistettä C löydetään tehtävälle on toinenkin ratkaisu.



Kolmion pinta-ala on 346 myös, kun $\alpha \approx 140^\circ$.

b) Ratkaistaan sivujen välinen kulma kolmion pinta-alan sinikaavalla.



Kolmion pinta-ala on 346 m^2 . Muodostetaan yhtälö.

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad \left| \begin{array}{l} a = 27,4 \text{ m} \\ b = 39,1 \text{ m} \\ A = 346 \text{ m}^2 \end{array} \right.$$

$$346 = \frac{1}{2} \cdot 27,4 \cdot 39,1 \cdot \sin \gamma$$

$$\sin \gamma = \frac{2 \cdot 346}{27,4 \cdot 39,1} = 0,645\dots$$

$$\gamma = \sin^{-1} 0,645\dots = 40,23\dots^\circ \approx 40,2^\circ$$

Koska $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$, niin kulmaksi kelpaa myös

$$\gamma = 180^\circ - 40,23\dots^\circ = 139,76\dots^\circ \approx 139,8^\circ.$$

Vastaus

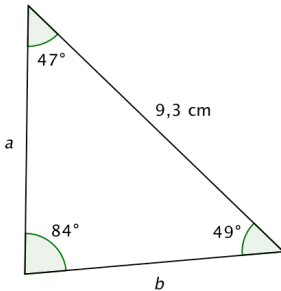
a) Kulma on 40° tai 140° .

b) $40,2^\circ$ tai $139,8^\circ$

6.3

Kolmion kolmas kulma on $180^\circ - 84^\circ - 49^\circ = 47^\circ$.

Pisin sivu on suurimman 84° :n kulman vastainen sivu.



Muodostetaan yhtälöt sivujen a ja b pituuksien laskemiseksi sinilauseen avulla.

$$\frac{a}{\sin 49^\circ} = \frac{9,3}{\sin 84^\circ}$$
$$a = \frac{9,3}{\sin 84^\circ} \cdot \sin 49^\circ = 7,057\dots \approx 7,1 \text{ (cm)}$$

$$\frac{b}{\sin 47^\circ} = \frac{9,3}{\sin 84^\circ}$$
$$b = \frac{9,3}{\sin 84^\circ} \cdot \sin 47^\circ = 6,839\dots \approx 6,8 \text{ (cm)}$$

Sivujen pituudet ovat 6,8 cm ja 7,1 cm.

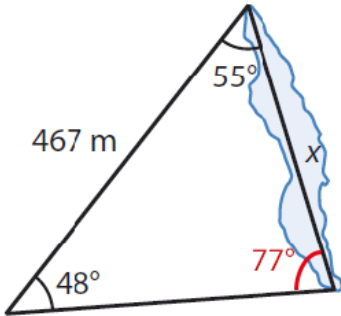
Vastaus

6,8 cm ja 7,1 cm

6.4

Lasketaan kolmion kolmannen kulman suuruus.

$$80^\circ - 55^\circ - 48^\circ = 77^\circ$$



Ratkaistaan lammen pituus x sinilauseen avulla.

$$\frac{x}{\sin 48^\circ} = \frac{467}{\sin 77^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 356,17\dots \text{ (m)}$$

$$x \approx 356 \text{ m}$$

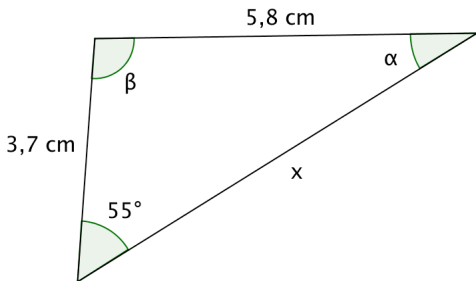
Lammen pituus on $x = 356 \text{ m}$.

Vastaus

$$x \approx 356 \text{ m}$$

6.5

Piirretään tilanteesta kuva.



Selvitetään ensin kulman α suuruus sinilauseen avulla.

$$\frac{3,7}{\sin \alpha} = \frac{5,8}{\sin 55^\circ}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Rajataan tulos välille $0^\circ < \beta < 180^\circ$.

$$\alpha = 31,504\dots^\circ \quad \text{tai} \quad \alpha = 148,49\dots^\circ$$

Kulman β suuruus saadaan selville kolmion kulmien summan avulla.

- Kun $\alpha = 31,504\dots^\circ \approx 32^\circ$, niin

$$\beta = 180^\circ - 55^\circ - 31,504\dots^\circ = 93,495\dots^\circ \approx 93^\circ$$

Tämä kelpaa kolmion kulmaksi. Kun $\alpha \approx 32^\circ$, niin $\beta \approx 93^\circ$.

- Kun $\alpha = 148,49^\circ \approx 148^\circ$, niin

$$\beta = 180^\circ - 55^\circ - 148,49\dots^\circ = -23,49\dots^\circ$$

Tämä ei kelpaa kolmion kulmaksi, joten myöskään arvo $\alpha \approx 148^\circ$ ei ole mahdollinen.

Sivun pituus x saadaan sinilauseen avulla.

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{5,8}{\sin 55^\circ}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

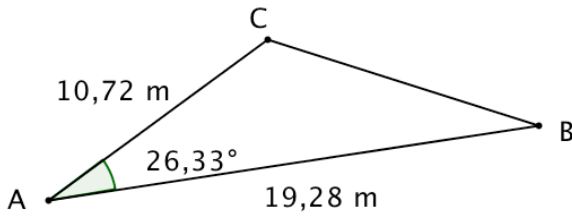
$$x = 7,067\dots \approx 7,1 \text{ (cm)}$$

Muut kulmat ovat 32° ja 93° sekä kolmas sivu 7,1 cm.

Vastaus

kulmat 32° ja 93° sekä sivu 7,1 cm

6.6



Lasketaan kolmion pinta-ala.

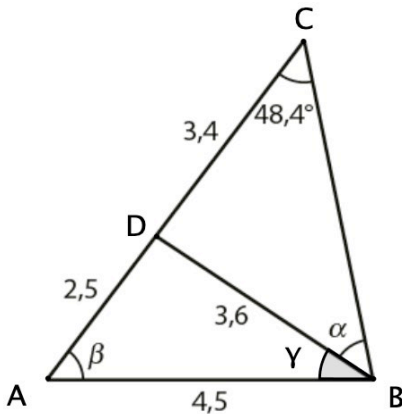
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} ab \sin \gamma & \left| \begin{array}{l} a = 19,28 \\ b = 10,72 \\ \gamma = 26,33^\circ \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{2} \cdot 19,28 \cdot 10,72 \cdot \sin 26,33^\circ \\ &= 45,8358\dots \\ &\approx 45,84 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on 45,84 m².

Vastaus

45,84 m²

6.7



Ratkaistaan kulman β suuruus kosinilauseella kolmiosta ABD .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta \quad a = 2,5; \quad b = 4,5 \quad \text{ja} \quad c = 3,6$$

$$3,6^2 = 2,5^2 + 4,5^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 4,5 \cdot \cos \beta \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella}$$

$$\beta = 53,00\dots^\circ$$

$$\approx 53^\circ$$

Ratkaistaan kulman γ suuruus kosinilauseella kolmiosta ABD .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad a = 4,5; \quad b = 3,6 \quad \text{ja} \quad c = 2,5$$

$$2,5^2 = 4,5^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 4,5 \cdot 3,6 \cdot \cos \gamma \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella}$$

$$\gamma = 33,68\dots^\circ$$

$$\gamma \approx 34^\circ$$

Lasketaan kulman α suuruus kolmiosta ABC kolmion kulmien summan avulla.

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma - 48,4^\circ$$

$$= 180^\circ - 53,00\dots^\circ - 33,68\dots^\circ - 48,4^\circ$$

$$= 44,92\dots^\circ$$

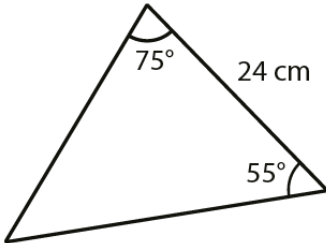
$$\approx 45^\circ$$

Vastaus

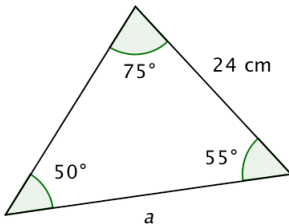
$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 53^\circ$$

6.8

- a) Piirretään jana, jonka pituus on 24 ja janan päätepisteisiin 75° :n ja 55° :n kulmat.



- b) Kolmion kolmas kulma on $180^\circ - 75^\circ - 55^\circ = 50^\circ$.



Muodostetaan yhtälö sivun a pituuden selvittämiseksi sinilauseen avulla.

$$\frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{24}{\sin 50^\circ}$$

$$a = \frac{24}{\sin 50^\circ} \cdot \sin 75^\circ = 30,26\dots \text{ (cm)}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad \left| \begin{array}{l} a = 30,26\dots \text{ cm} \\ b = 24 \text{ cm} \\ \gamma = 55^\circ \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 30,26\dots \cdot 24 \cdot \sin 55^\circ$$

$$= 297,47\dots \approx 300 \text{ (cm}^2\text{)}$$

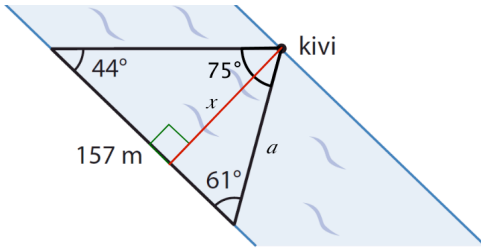
Vastaus

- b) 300 cm^2

6.9

Täydennetään kuvaan kysytty joen leveys x ja kolmas kulma

$$180^\circ - 44^\circ - 61^\circ = 75^\circ.$$



Lasketaan suorakulmaisen kolmion kateetin a pituus sinilauseen avulla.

$$\frac{a}{\sin 44^\circ} = \frac{157}{\sin 75^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a = 112,908\dots \text{ (cm)}$$

Joen leveys saadaan suorakulmaisen kolmion avulla.

$$\sin 61^\circ = \frac{x}{a}$$

$$x = a \sin 61^\circ$$

$$= 112,908\dots \cdot \sin 61^\circ$$

$$= 98,752\dots$$

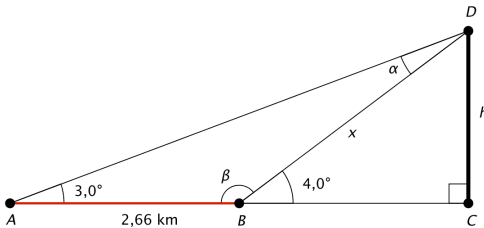
$$\approx 99 \text{ (m)}$$

Vastaus

99 m

6.10

Piirretään tilanteesta kuva.



Kilpisjärven pinnan tasossa oleva piste C on 473 metrin korkeudella merenpinnasta. Selvitetään ensin huipun korkeus h järven pinnasta mitattuna. Saanan huipun korkeus merenpinnasta on $h + 473$ m. Selvitetään suorakulmaisen kolmion BCD hypotenuusan pituus x sinilauseen avulla kolmiosta ABD .

Kulma $\beta = 180^\circ - 4,0^\circ = 176,0^\circ$ ja

kulma $\alpha = 180^\circ - 3,0^\circ - 176,0^\circ = 1,0^\circ$.

$$\frac{x}{\sin 3,0^\circ} = \frac{2,66}{\sin \alpha}$$

$$x = \frac{2,66 \cdot \sin 3,0^\circ}{\sin \alpha} \quad | \alpha = 1,0^\circ$$

$$= \frac{2,66 \cdot \sin 3,0^\circ}{\sin 1,0^\circ}$$

$$= 7,976\dots \text{ (km)}$$

Suorakulmaisesta kolmiosta BCD saadaan

$$\sin 4,0^\circ = \frac{h}{x}$$

$$h = x \cdot \sin 4,0^\circ$$

$$= 7,976\dots \cdot \sin 4,0^\circ$$

$$= 0,5564\dots \text{ (km)}$$

$$h = 0,5564\dots \text{ km} = 556,4\dots \text{ m}$$

Lasketaan Saanan huipun etäisyys merenpinnan tasosta.

$$h + 473 \text{ m} = 556,4\dots \text{ m} + 473 \text{ m} = 1029,4\dots \text{ m} \approx 1030 \text{ m}$$

Vastaus

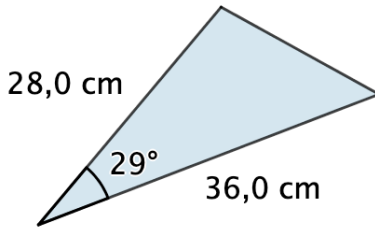
1030 m

Huomaa:

Voit ratkaista yhtälöt myös CAS-laskimella.

6.11

a)

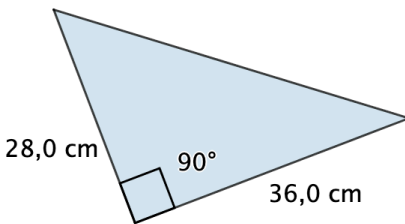


Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ac \cdot \sin \gamma \quad a = 28,0; c = 36,0 \text{ ja } \gamma = 29,0^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 28,0 \cdot 36,0 \cdot \sin 29,0^\circ \\ &= 244,34\dots \\ &\approx 244 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

b) Valitaan kolmion kannaksi sivu, jonka pituus on 36,0 cm. Kolmion pinta-ala on mahdollisimman suuri, kun kolmion korkeus on mahdollisimman suuri.

Kolmion korkeus on suurin mahdollinen 28,0 cm, kun tunnettujen sivujen välinen kulma on 90° .



Kolmion pinta-alan suurin mahdollinen arvo on

$$A = \frac{28,0 \cdot 36,0}{2} = 504 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vastaus

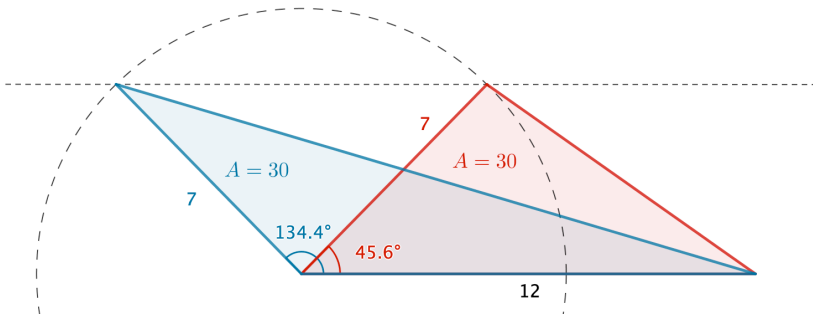
a) 244 cm²

b) 504 cm²

6.12

a) Piirretään kolmio apuympyrän avulla.

Havaitaan, että mahdollisia kolmioita on kaksi.



Tunnettujen sivujen välisen kulman suuruus asteen kymmenyksen tarkkuudella on $45,6^\circ$ tai $134,4^\circ$.

b) Ratkaistaan laskemalla tunnettujen sivujen välisen kulman α suuruus.

$$A = \frac{1}{2}ac \cdot \sin \alpha \quad a = 12,0; c = 7,0 \text{ ja } A = 30,0$$

$$30 = \frac{1}{2} \cdot 12,0 \cdot 7,0 \cdot \sin \alpha \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

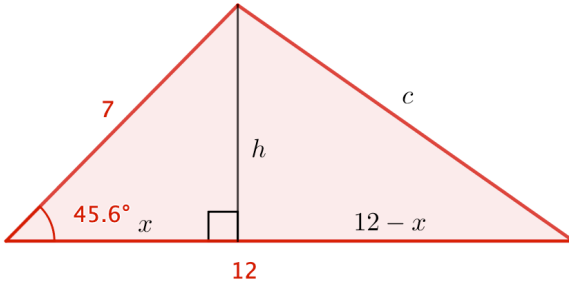
Rajataan ratkaisu välille $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

$$\alpha = 45,58\dots^\circ \approx 45,6^\circ \text{ tai } \alpha = 134,41\dots^\circ \approx 134,4^\circ$$

c) Tutkitaan b-kohdassa löydetyt tapaukset erikseen.

Täydennetään kolmioita ja lasketaan kolmannen sivun pituus c suorakulmaisista kolmioista Pythagoraan lauseella.

Tapaus 1: $\alpha \approx 45,6^\circ$



Ratkaistaan kolmion korkeus h .

$$A = 30$$

$$\frac{12 \cdot h}{2} = 30$$

$$h = 5$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Ratkaistaan vasemmanpuoleisen suorakulmaisen kolmion kateetin pituus x .

$$x^2 + h^2 = 7^2$$

$$h = 5$$

$$x^2 + 5^2 = 7^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -\sqrt{24} \text{ tai } x = \sqrt{24}$$

Pituus on positiivinen, joten $x = \sqrt{24}$.

Ratkaistaan kolmion sivun pituus c .

$$h^2 + (12 - x)^2 = c^2$$

$$h = 5$$

$$x = \sqrt{24}$$

$$5^2 + (12 - \sqrt{24})^2 = c^2$$

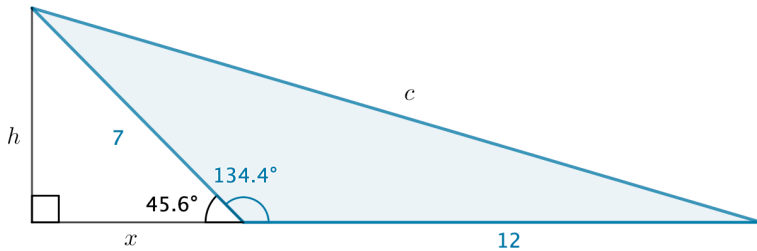
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$c = -8,68... \text{ tai } c = 8,68...$$

Pituus on positiivinen, joten $c = 8,68... < 12$.

Kolmion pisimmän sivun pituus on 12,0.

Tapaus 2: $\alpha \approx 134,4^\circ$



Kolmion korkeus on sama kuin tapauksessa 1 eli $h = 5$.

Vasemmanpuoleinen suorakulmainen kolmio on yhtenevä tapauksen 1 vasemmanpuoleisen suorakulmaisen kolmion kanssa, joten $x = \sqrt{24}$.

Ratkaistaan kolmion sivun pituus c .

$$h^2 + (12 + x)^2 = c^2$$

$$h = 5$$

$$x = \sqrt{24}$$

$$5^2 + (12 + \sqrt{24})^2 = c^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$c = -17,62... \text{ tai } c = 17,62...$$

Pituus on positiivinen, joten $c = 17,62... > 12$.

Kolmion pisimmän sivun pituus on $17,62... \approx 17,6$.

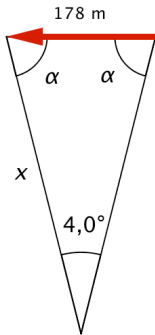
Vastaus

a) $45,6^\circ$ tai $134,4^\circ$

b) $45,6^\circ$ tai $134,4^\circ$

c) Kun $\alpha = 134,4^\circ$, pisimmän sivun pituus on $17,6$ ja kun $\alpha = 45,6^\circ$, pisimmän sivun pituus on $12,0$.

6.13



Tilanteessa muodostuu tasakylkinen kolmio, jonka kantakulma on

$$\alpha = \frac{180^\circ - 4,0^\circ}{2} = 88^\circ$$

Ratkaistaan kysytty etäisyys x sinilauseen avulla.

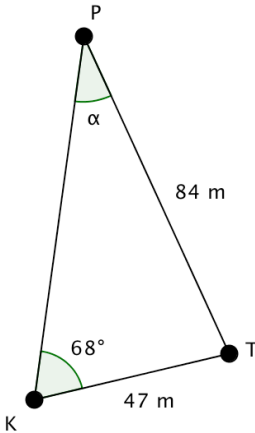
$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{178}{\sin 4,0^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = 2550,18... \approx 2600 \text{ (m)}$$

Laivan keula on 2600 metrin etäisyydellä veneilijästä.

Vastaus

2600 m

6.14



Kysytyn kulman α suuruus ratkeaa sinilauseen avulla.

$$\frac{47}{\sin \alpha} = \frac{84}{\sin 68^\circ}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Rajataan ratkaisut välille $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

$$\alpha = 31,25\dots^\circ \approx 31^\circ \text{ tai } \alpha = 148,7\dots^\circ \approx 148^\circ$$

- Kun $\alpha = 148^\circ$, kolmion kolmas kulma olisi $180^\circ - 68^\circ - 148^\circ = -36^\circ$, mikä ei ole mahdollista. Siis arvo 148° ei kelpaa kolmion kulmaksi.
- Kun $\alpha = 31^\circ$, kolmion kolmas kulma olisi $180^\circ - 68^\circ - 31^\circ = 81^\circ$, mikä on mahdollista. Siis arvo 31° kelpaa kolmion kulmaksi.

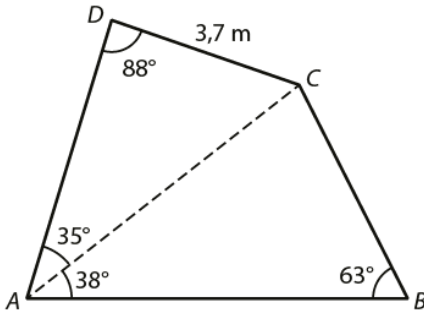
Kioskin ja taksitolpan väli näkyy 31° kulmassa.

Vastaus

31°

6.15

Piirretään kuva.



Ratkaistaan sivun AC pituus kolmiosta ACD sinilauseen avulla.

$$\frac{3,7}{\sin 35^\circ} = \frac{AC}{\sin 88^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AC = 6,44\dots$$

Lasketaan kulman ACB suuruus.

$$180^\circ - 38^\circ - 63^\circ = 79^\circ$$

Ratkaistaan sivun AB pituus kolmiosta ABC sinilauseen avulla.

$$\frac{6,44\dots}{\sin 63^\circ} = \frac{AB}{\sin 79^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AB = 7,09\dots \approx 7,1 \text{ (m)}$$

Lasketaan kulman DCA suuruus.

$$180^\circ - 35^\circ - 88^\circ = 57^\circ$$

Lasketaan nelikulmion pinta-ala kolmioiden ABC ja ACD pinta-alojen summana.

$$A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\sphericalangle BAC) + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD \cdot \sin(\sphericalangle DCA)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7,09\dots \cdot 6,44\dots \cdot \sin 38^\circ + \frac{1}{2} \cdot 6,44\dots \cdot 3,7 \cdot \sin 57^\circ$$

$$= 24,08\dots \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\approx 24 \text{ m}^2$$

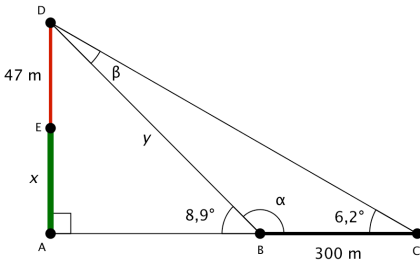
Janan AB pituus on 7,1 m ja nelikulmion pinta-ala on 24 m².

Vastaus

$AB = 7,1 \text{ m}$, pinta-ala on 24 m²

6.16

Tapa 1 Ratkaisu suorakulmaisten kolmioiden avulla



Käytetään kuvan merkintöjä.

Kulma α on $8,9^\circ$ suuruisen kulman vieruskulma.

$$\alpha = 180^\circ - 8,9^\circ = 171,1^\circ$$

Kulma β saadaan kolmion muiden kulmien avulla.

$$\beta = 180^\circ - 171,1^\circ - 6,2^\circ = 2,7^\circ.$$

Ratkaistaan suorakulmaisen kolmion ABD hypotenuusan pituus y sinilauseella kolmiosta BCD .

$$\frac{y}{\sin 6,2^\circ} = \frac{300}{\sin 2,7^\circ}$$

$$y = \frac{300}{\sin 2,7^\circ} \cdot \sin 6,2^\circ = 687,79\dots$$

Ratkaistaan suorakulmaisen kolmion ABD kateetin AD pituus $47 + x$ ja siitä edelleen kysytty mäen korkeus x .

$$\sin 8,9^\circ = \frac{47 + x}{y}$$

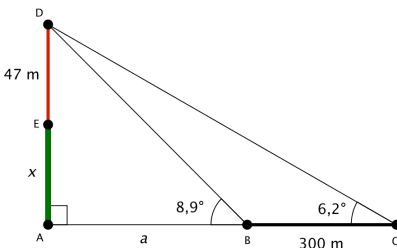
$$\sin 8,9^\circ = \frac{47 + x}{687,79\dots}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 59,40\dots \approx 59 \text{ (m)}$$

Mäen korkeus on 59 metriä.

Vastaus 59 m



Tapa 2 Ratkaisu yhtälöparin avulla

Kysytty mäen korkeus on x .

Muodostetaan yhtälöpari suorakulmaisten kolmioiden ABD ja ACD avulla.

$$\begin{cases} \tan 8,9^\circ = \frac{x+47}{a} \\ \tan 6,2^\circ = \frac{x+47}{a+300} \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\begin{cases} x = 59,40\dots \text{ (m)} \\ a = 679,51\dots \text{ (m)} \end{cases}$$

Kysytty mäen korkeus on $x = 59,40\dots \text{ m} \approx 59 \text{ m}$

Vastaus

59 m

Huomaa:

Yhtälöparin tavassa 2 voi ratkaista myös ilman CAS-laskinta esimerkiksi seuraavasti:

$$\begin{cases} \tan 8,9^\circ = \frac{x+47}{a} \\ \tan 6,2^\circ = \frac{x+47}{a+300} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot a \ (\neq 0) \\ \cdot (a+300) \ (\neq 0) \end{array}$$

$$\begin{cases} a \tan 8,9^\circ = x+47 \\ \tan 6,2^\circ (a+300) = x+47 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{array}$$

$$+ \begin{cases} a \tan 8,9^\circ & = x+47 \\ -a \tan 6,2^\circ - 300 \tan 6,2^\circ & = -x-47 \end{cases}$$

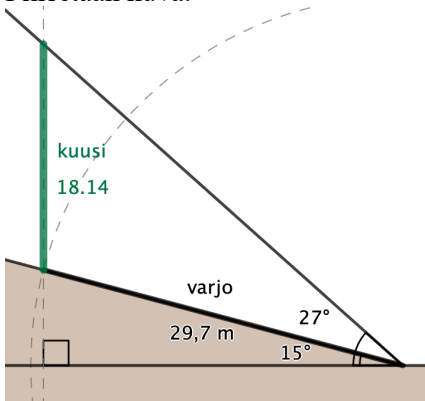
$$a \tan 8,9^\circ - a \tan 6,2^\circ - 300 \tan 6,2^\circ = 0$$

$$a = \frac{300 \tan 6,2^\circ}{\tan 8,9^\circ - \tan 6,2^\circ} = 679,51\dots \text{ (m)}$$

$$\begin{aligned} x &= a \tan 8,9^\circ - 47 = 679,51\dots \cdot \tan 8,9^\circ - 47 \\ &= 59,40\dots \approx 59 \text{ (m)} \end{aligned}$$

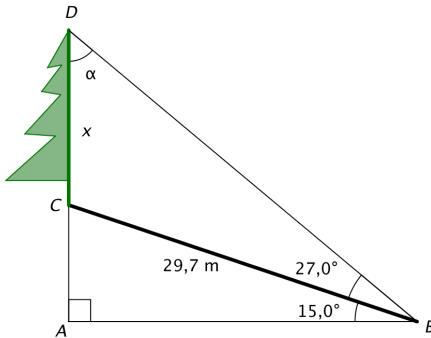
6.17

a) Piirretään kuva.



Kuusen pituudeksi saadaan mittaamalla 18,1 m.

b) Tapa 1 Sinilauseen avulla



Kulma α saadaan kolmion ABD muiden kulmien avulla.

$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - (15,0^\circ + 27,0^\circ) = 48^\circ$$

Kysytty kuusen korkeus x saadaan sinilauseella kolmiosta CBD .

$$\frac{x}{\sin 27,0^\circ} = \frac{29,7}{\sin 48^\circ}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

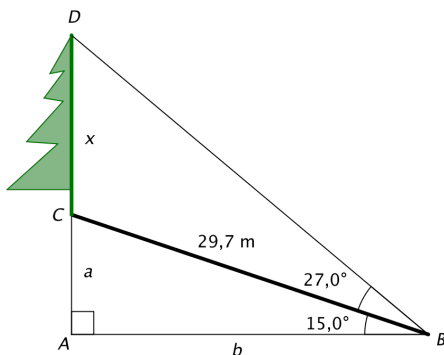
$$x = 18,14... \approx 18,1 \text{ (m)}$$

Kuusen pituus on 18,1 metriä.

Vastaus

18,1 m

Tapa 2 Suorakulmaisten kolmioiden avulla



Lasketaan ensin suorakulmaisen kolmion ABC avulla kateettien pituudet a ja b . Sen jälkeen suorakulmaisen kolmion ABD avulla voidaan laskea kateetin AD pituus.

Kuusen pituus on $AD - a$.

$$\sin 15,0^\circ = \frac{a}{29,7} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a = 7,686... \text{ (m)}$$

$$\cos 15,0^\circ = \frac{b}{29,7} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$b = 28,687... \text{ (m)}$$

$$\tan(15,0^\circ + 27,0^\circ) = \frac{AD}{b}$$

$$\tan(42,0^\circ) = \frac{AD}{28,687...} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AD = 25,830... \text{ (m)}$$

$$x = AD - a$$

$$= 25,830... - 7,686...$$

$$= 18,14... \approx 18,1 \text{ (m)}$$

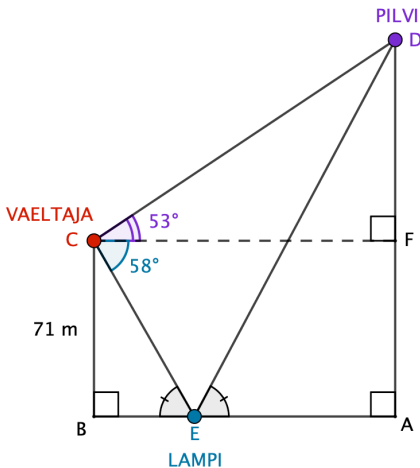
Kuusen pituus on 18,1 metriä.

Vastaus

18,1 m

6.18

Tapa 1 Sovelletaan yhdenmuotoisuutta



Kolmiot BEC ja ADE ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella: molemmissa on suora kulma ja yhtä suuri terävä kulma (tulokulma on yhtä suuri kuin heijastuskulma).

Pilven etäisyys lammen pinnan tasosta saadaan laskemalla janan AD pituus yhdenmuotoisten kolmioiden BEC ja ADE avulla.

Vastinpituuksien suhde on vakio, joten saadaan verranto

$$\frac{AD}{BC} = \frac{ED}{EC}.$$

Lasketaan tarvittavat kulmat, jotta voidaan laskea janojen ED ja EC pituudet (tai niiden suhde).

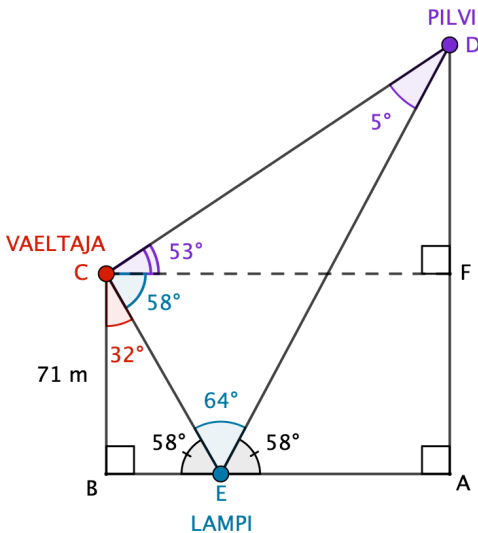
$$\sphericalangle BCE = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$$

$$\sphericalangle CEB = 58^\circ \text{ (samankohtaiset kulmat)}$$

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle CEB = 58^\circ \text{ (tulokulma = heijastuskulma)}$$

$$\sphericalangle DEC = 180^\circ - 2 \cdot 58^\circ = 64^\circ$$

$$\sphericalangle CDE = 180^\circ - 64^\circ - (53^\circ + 58^\circ) = 5^\circ$$



Sovelletaan sinilauseetta kolmioon EDC .

$$\frac{ED}{\sin(58^\circ + 53^\circ)} = \frac{EC}{\sin 5^\circ} \quad \left| \cdot \frac{\sin(58^\circ + 53^\circ)}{EC} \right.$$

$$\frac{ED}{EC} = \frac{\sin(58^\circ + 53^\circ)}{\sin 5^\circ} = \frac{\sin 111^\circ}{\sin 5^\circ}$$

Siis

$$\frac{AD}{BC} = \frac{ED}{EC} = \frac{\sin 111^\circ}{\sin 5^\circ},$$

josta saadaan

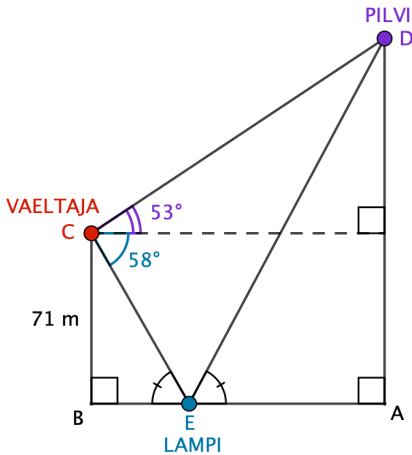
$$AD = \frac{\sin 111^\circ}{\sin 5^\circ} \cdot BC = \frac{\sin 111^\circ}{\sin 5^\circ} \cdot 71 \text{ m} = 760,52\dots \text{ m} \approx 760 \text{ m}.$$

Pilvi on 760 m korkeudella lammen pinnan tasosta mitattuna.

Vastaus

760 m

Tapa 2 Ratkaisu suorakulmaisten kolmioiden ja sinilauseen avulla



Lasketaan tarvittavat kulmat ja janan pituudet, jotta saadaan laskettua kysytty etäisyys AD kolmiosta AED .

$$\sphericalangle BCE = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$$

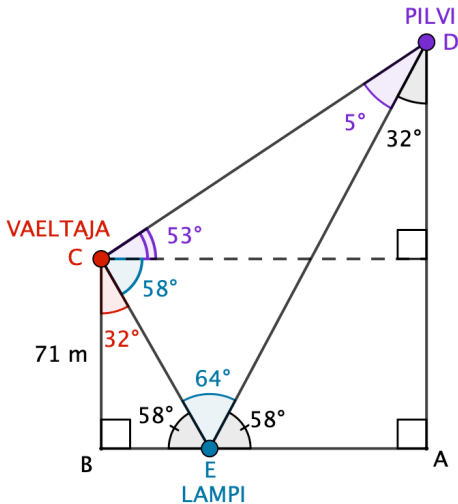
$$\sphericalangle CEB = 58^\circ \text{ (samankohtaiset kulmat)}$$

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle CEB = 58^\circ \text{ (tulokulma = heijastuskulma)}$$

$$\sphericalangle DEC = 180^\circ - 2 \cdot 58^\circ = 64^\circ$$

$$\sphericalangle CDE = 180^\circ - 64^\circ - (53^\circ + 58^\circ) = 5^\circ$$

$$\sphericalangle EDA = 180^\circ - 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$$



Lasketaan janan CE pituus kolmiosta BEC kosinin avulla.

$$\cos 32^\circ = \frac{71}{CE} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$CE = 83,72\dots$$

Ratkaistaan janan ED pituus kolmiosta EDC sinilauseella.

$$\frac{83,72\dots}{\sin 5^\circ} = \frac{DE}{\sin 111^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$DE = 896,79\dots$$

Ratkaistaan janan AD pituus kolmiosta ADE kosinin avulla.

$$\cos 32^\circ = \frac{AD}{896,79\dots} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

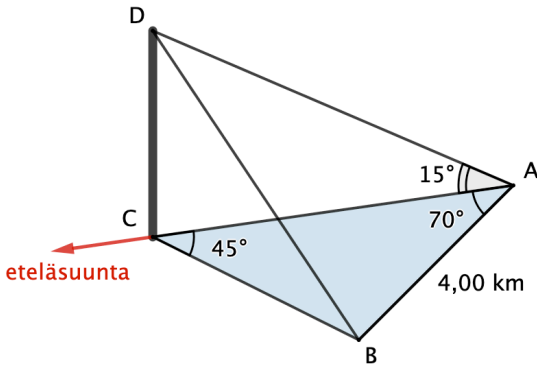
$$AD = 760,52\dots \approx 760 \text{ (m)}$$

Pilvi on 760 m korkeudella lammen pinnan tasosta mitattuna.

Vastaus

760 m

6.19



Lasketaan merenpinnan tasossa olevan kolmion BAC kulman ABC suuruus.

$$\sphericalangle ABC = 180^\circ - 70^\circ - 45^\circ = 65^\circ$$

Ratkaistaan sivun AC pituus kolmiosta BAC sinilauseella.

$$\frac{4,00}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 65^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$AC = 5,126\dots$$

Ratkaistaan huipun korkeus CD kolmiosta ADC tangentin avulla.

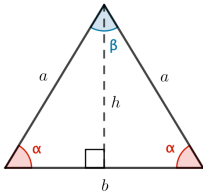
$$\tan \sphericalangle ABC = \frac{CD}{AC} \quad | \quad AC = 5,126\dots \text{ ja } \sphericalangle ABC = 15^\circ$$
$$\tan 15^\circ = \frac{CD}{5,126\dots} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$CD = 1,3737\dots \approx 1,37 \text{ (km)}$$

Vuoren korkeus on 1,37 km (= 1370 m).

Vastaus

1370 m = 1,37 km

6.20



Ilmaistaan sivun a pituus sivun b pituuden avulla sinilauseetta käyttäen.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad | \cdot \sin \alpha$$

$$a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad | \sin \alpha = 2 \sin \beta$$

$$a = b \cdot \frac{2 \cancel{\sin \beta}}{\cancel{\sin \beta}}$$

$$a = 2b$$

Ilmaistaan kolmion korkeus h sivun b pituuden avulla Pythagoraan lausetta käyttäen.

$$h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 \quad | a = 2b$$

$$h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (2b)^2$$

$$h^2 + \frac{b^2}{4} = 4b^2 \quad | - \frac{b^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{16b^2}{4} - \frac{b^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{15}{4}b^2$$

$$h = -\sqrt{\frac{15}{4}}b \text{ tai } h = \sqrt{\frac{15}{4}}b$$

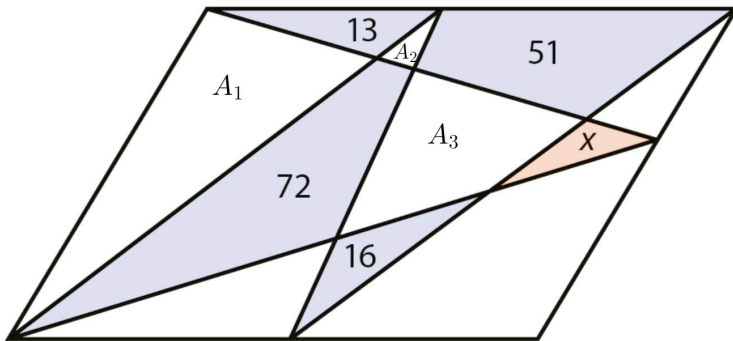
Kolmion korkeus on positiivinen luku, joten $h = \sqrt{\frac{15}{4}}b$.

Lasketaan kolmion korkeuden ja kyljen pituuden suhde $\frac{h}{a}$.

$$\frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}b}{2b} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Vastaus $\frac{\sqrt{15}}{4}$

6.21



Käytetään kuvan merkintöjä. Merkitään lisäksi suunnikkaan pinta-alaa kirjaimella A . Jos kolmiolla ja suunnikkaalla on yhtä suuri korkeus ja yhtä suuri kanta, niin kolmion pinta-ala on puolet suunnikkaan pinta-alasta. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan x .

$$\begin{cases} A_1 + 72 + A_3 + x = \frac{A}{2} \\ 13 + A_1 + 51 + A_3 + 16 = \frac{A}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_3 + 72 + x = \frac{A}{2} & \cdot 1 \\ A_1 + A_3 + 80 = \frac{A}{2} & \cdot (-1) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} A_1 + A_3 + 72 + x = \frac{A}{2} \\ -A_1 - A_3 - 80 = -\frac{A}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -8 + x &= 0 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Vastaus

Punaisen kolmion pinta-ala on 8.