6. FUNKTIOT

6.1 Funktio ja potenssifunktio

LUO PERUSTA

601. **a)** $f(-1) = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$

b) $f(-1) = |-1| = 1$

c) $f(-1) = \sqrt[3]{-1} = -1$

d) $f(-1) = 5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$

Vastaus: **a)** $f(-1) = 2$ **b)** $f(-1) = 1$ **c)** $f(-1) = -1$ **d)** $f(-1) = \frac{1}{5}$

602. **a)** $f(x) = x + 5$
$f(-1) = -1 + 5 = 4$

b) $f(x) = x \cdot 5 = 5x$
$f(-1) = 5 \cdot (-1) = -5$

Vastaus: **a)** $f(x) = x + 5, f(-1) = 4$ **b)** $f(x) = 5x, f(-1) = -5$

603. **a)** $f(6) = 5 \cdot 6 - 4 = 30 - 4 = 26$

Ratkaistavana on yhtälö $f(x) = 6$.

$$
\begin{aligned}
5x - 4 &= 6 \\
5x &= 6 + 4 \\
5x &= 10 \qquad \| :5 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

b) $f(6) = 6^2 + 2 = 36 + 2 = 38$

Ratkaistavana on yhtälö $f(x) = 6$.

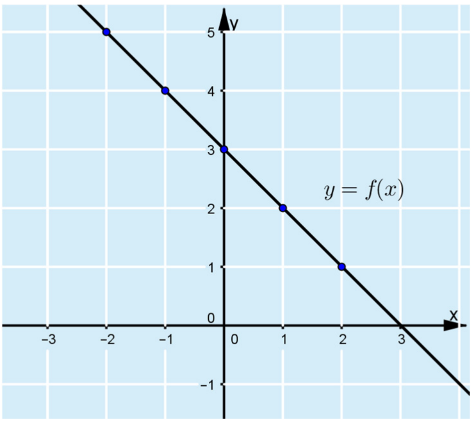
$$x^2 + 2 = 6$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \sqrt{4} \text{ tai } x = -\sqrt{4}$$
$$x = 2 \text{ tai } x = -2$$

Vastaus: **a)** $f(6) = 26$, $f(x) = 6$, kun $x = 2$ **b)** $f(6) = 38$, $f(x) = 6$, kun $x = 2$ tai $x = -2$

604. **a)**

x	$y = f(x) = 3 - x$	(x, y)
–2	3 – (–2) = 5	(–2, 5)
–1	3 – (–1) = 4	(–1, 4)
0	3 – 0 = 3	(0, 3)
1	3 – 1 = 2	(1, 2)
2	3 – 2 = 1	(2, 1)

b)



c) Muuttujan x arvo, jolla $f(x) = 4{,}5$ on sen pisteen x-koordinaatin arvo, jonka y-koordinaatti on 4,5. Kuvaajan perusteella $x \approx -1{,}5$. Lasketaan funktion arvo kohdassa $x = -1{,}5$:
$f(-1{,}5) = 3 - (-1{,}5) = 3 + 1{,}5 = 4{,}5$.

Vastaus: **c)** $x \approx -1{,}5$; $f(-1{,}5) = 4{,}5$

605. **a)** $f(2) \approx 1$

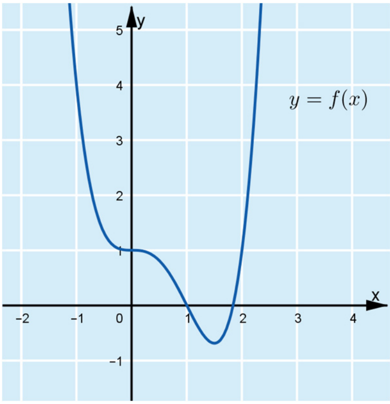
b) $f(4) \approx 2$

c) $f(x) = -1$, kun $x \approx -3$, $x \approx 0$ tai $x \approx 8$

d) $f(x) = 3$, kun $x \approx -2$ tai $x \approx 6$

Vastaus: **a)** $f(2) \approx 1$ **b)** $f(4) \approx 2$ **c)** $x \approx -3$, $x \approx 0$ tai $x \approx 8$ **d)** $x \approx -2$ tai $x \approx 6$

606.



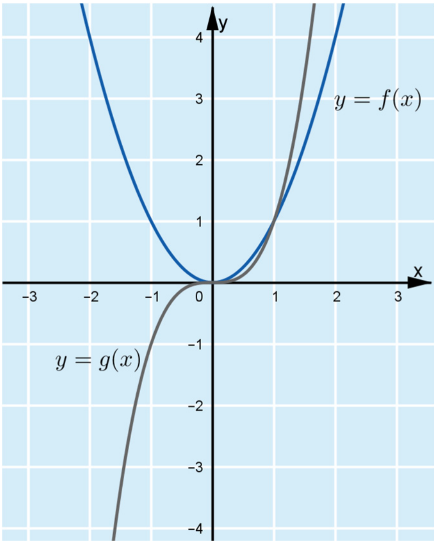
a) $f(-1) \approx 4$

b) $f(1) \approx 0$

c) $f(x) = 1$, kun $x \approx 0$ tai $x \approx 2$

Vastaus: **a)** $f(-1) \approx 4$ **b)** $f(1) \approx 0$ **c)** $x \approx 0$ tai $x \approx 2$

607.



a) $x^2 = 2$, kun $x \approx -1{,}4$ tai $x \approx 1{,}4$

b) $x^3 = 4$, kun $x \approx 1{,}6$

c) Funktio x^2 saa vain ei-negatiivisia arvoja.
Yhtälöllä $x^2 = -2$ ei siis ole ratkaisuja.

d) $x^3 = -4$, kun $x \approx -1{,}6$

Vastaus: **a)** $x \approx -1{,}4$ tai $x \approx 1{,}4$ **b)** $x \approx 1{,}6$ **c)** Yhtälöllä ei ole ratkaisuja.
d) $x \approx -1{,}6$

608. A–I, B–II, C–II, D–I, E–I ja F–II

Vastaus: A–I, B–II, C–II, D–I, E–I ja F–II

VAHVISTA OSAAMISTA

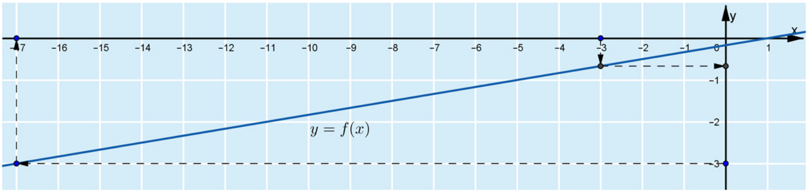
609. **a)** $f(x)=\dfrac{x-1}{6}$

b) $f(-3)=\dfrac{-3-1}{6}=\dfrac{-4}{6}=-\dfrac{2}{3}$

Ratkaistavana on yhtälö $f(x)=-3$.

$$\frac{x-1}{6}=-3 \quad \|\cdot 6$$
$$x-1=-18$$
$$x=-17$$

c)



Kohdassa $x = -3$ määritetty funktion arvo on kuvaajan pisteen y-koordinaatti, kun x-koordinaatti on -3.
Funktion arvo -3 liittyy kuvaajan pisteen y-koordinaattiin ja haettu muuttujan x arvo on tämän pisteen x-koordinaatin arvo.

Vastaus: **a)** $f(x)=\dfrac{x-1}{6}$ **b)** $f(-3)=-\dfrac{2}{3}$, $f(x) = -3$, kun $x = -17$

c) Kohdassa $x = -3$ määritetty funktion arvo on kuvaajan pisteen y-koordinaatti, kun x-koordinaatti on -3.
Funktion arvo -3 liittyy kuvaajan pisteen y-koordinaattiin ja haettu muuttujan x arvo on tämän pisteen x-koordinaatin arvo.

610. **a)** $f(x) = 5{,}90 + 1{,}55x$ (€)

b) $f(8) = 5{,}90 + 1{,}55 \cdot 8 = 18{,}30$; luku 18,30 kuvaa 8 kilometrin taksimatkan hintaa euroina.

c) Ratkaistavana on yhtälö $5{,}90 + 1{,}55x = 25$.

$5,90+1,55x=25$

$1,55x=25-5,90$

$1,55x=19,10 \quad \| :1,55$

$x=12,32...$

$x\approx 12,3$

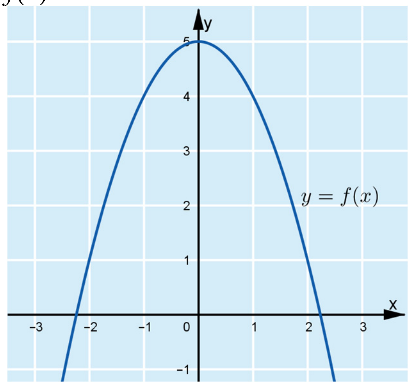
Yhtälön ratkaisu $x \approx 12,3$ kuvaa matkaa kilometreinä, jonka taksilla voi ajaa 25 eurolla.

Vastaus: **a)** $f(x) = 5,90 + 1,55x$ (€) **b)** $f(8) = 5,90 + 1,55 \cdot 8 = 18,30$; luku 18,30 kuvaa 8 kilometrin taksimatkan hintaa euroina.
c) $5,90 + 1,55x = 25$, josta $x \approx 12,3$. Yhtälön ratkaisu $x \approx 12,3$ kuvaa matkaa kilometreinä, jonka taksilla voi ajaa 25 eurolla.

611. I–C ja II–B

Vastaus: I–C ja II–B

612. **a)** $f(x) = 5 - x^2$

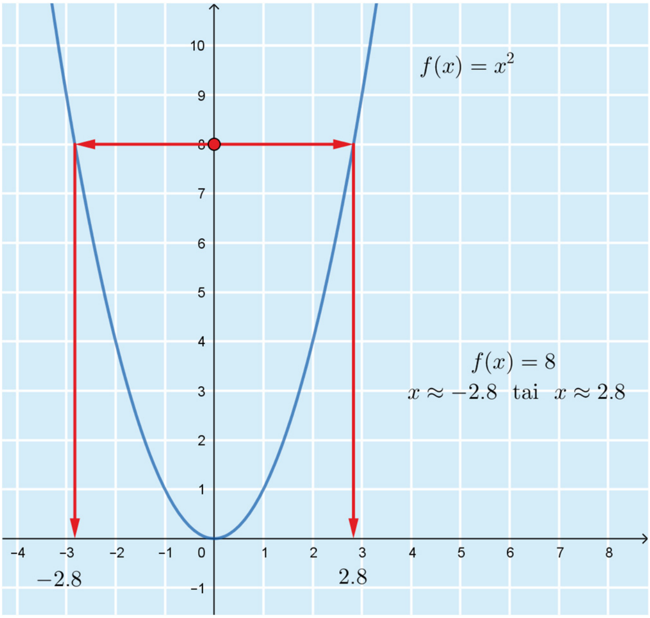


b) $f(x) = 1$, kun $x \approx -2$ tai $x \approx 2$

c) Funktion suurin arvo on noin 5.

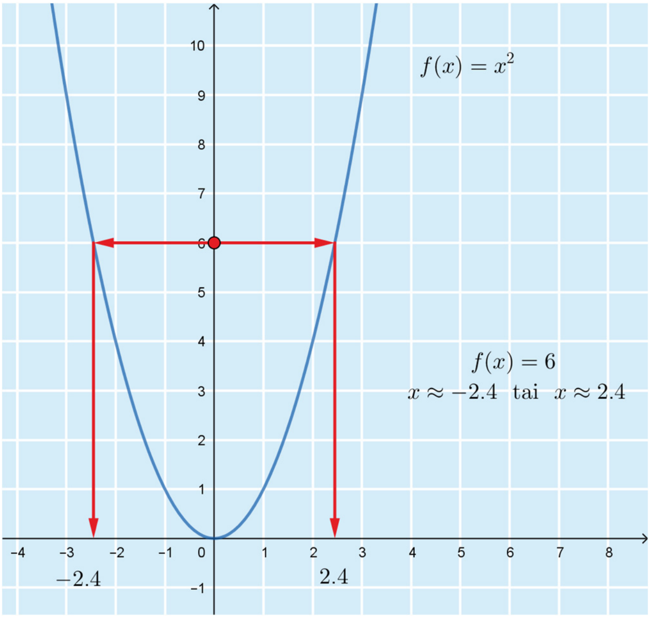
Vastaus: **a)** $f(x) = 5 - x^2$ **b)** $x \approx -2$ tai $x \approx 2$ **c)** Suurin arvo on noin 5.

613. a)



Funktion f kuvaajalta haetaan niiden pisteiden x-koordinaattien arvot, joissa pisteen y-koordinaatti on 8.
Yhtälön $x^2 = 8$ ratkaisut ovat $x \approx -2{,}8$ tai $x \approx 2{,}8$.

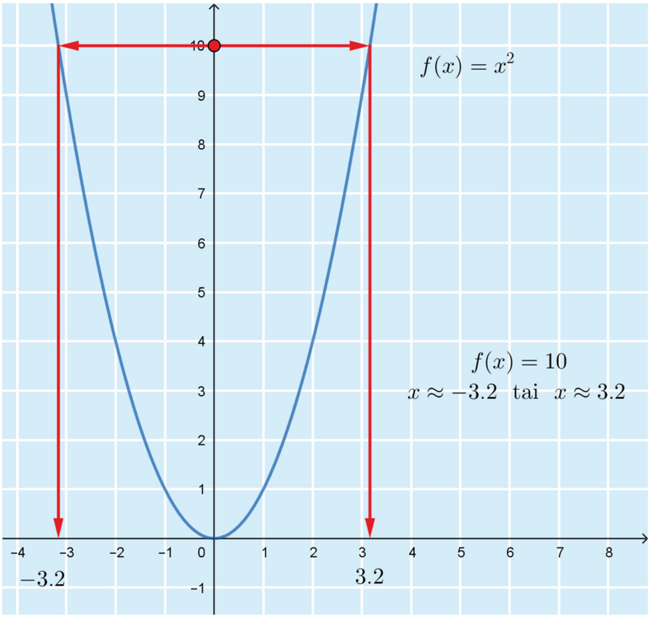
b)



Luvun 6 neliöjuuri on sellainen ei-negatiivinen luku, jonka neliö on luku 6. Funktion *f* kuvaajalta haetaan sellaista pistettä, jossa *y*-koordinaatti on 6 ja pisteen *x*-koordinaatti ei-negatiivinen luku.

$\sqrt{6} \approx 2,4$

c)



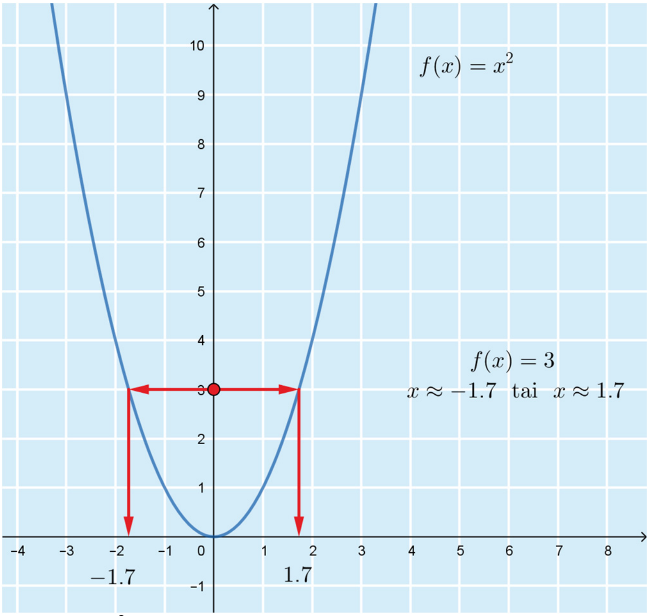
Luvun 10 neliöjuuri on sellainen ei-negatiivinen luku, jonka neliö on luku 10. Funktion f kuvaajalta haetaan sellaista pistettä, jossa y-koordinaatti on 10 ja pisteen x-koordinaatti ei-negatiivinen luku.

$\sqrt{10} \approx 3,2$

d)

$$4x^2 - 12 = 0$$
$$4x^2 = 12 \quad \|:4$$
$$x^2 = 3$$

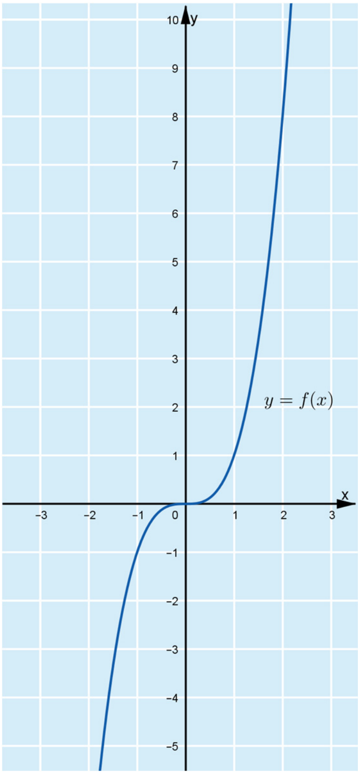
Funktion f kuvaajalta haetaan niiden pisteiden x-koordinaattien arvot, joissa pisteen y-koordinaatti on 3.



Yhtälön $x^2 = 3$ ratkaisut ovat $x \approx -1{,}7$ tai $x \approx 1{,}7$. Nämä ratkaisut ovat myös yhtälön $4x^2 - 12 = 0$ ratkaisut.

Vastaus: **a)** $x \approx -2{,}8$ tai $x \approx 2{,}8$ **b)** $\sqrt{6} \approx 2{,}4$ **c)** $\sqrt{10} \approx 3{,}2$ **d)** $x \approx -1{,}7$ tai $x \approx 1{,}7$

614.



a) $x^3 = 10$, kun $x \approx 2{,}2$

b) $\sqrt[3]{-5} \approx -1,7$

Vastaus: **a)** $x \approx 2{,}2$ **b)** $\sqrt[3]{-5} \approx -1,7$

615. **a)** Potenssi x^2 tarkoittaa tuloa $x \cdot x$. Tulon merkkisäännön nojalla kahden positiivisen luvun tulo on positiivinen, mutta myös kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen. Luvun 0 tulo itsensä kanssa on nolla, joten funktio x^2 ei saa millään muuttujan x arvolla negatiivista arvoa. Funktion x^2 kuvaajan jokaisen pisteen y-koordinaatti on siis nolla tai positiivinen. Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa x-akselia, kun $x = 0$ ja kuvaaja on muuten koko ajan x-akselin yläpuolella.

b) Kaikilla muuttujan x nollasta eroavilla arvoilla $x^2 > 0$.
Luvun x vastaluvulla $-x$ saadaan $f(-x) = (-x) \cdot (-x) = x^2$. Koska funktio f saa arvon x^2 arvoilla x ja $-x$, niin funktio f saa jokaisen positiivisen arvon kahdessa eri kohdassa.
Funktion x^2 kuvaajalla muuttujia x ja $-x$ vastaavien pisteiden $(x, f(x))$ ja $(-x, f(-x))$ y-koordinaatit ovat sama arvo a. Pisteet sijaitsevat symmetrisesti y-akselin molemmin puolin samalla korkeudella.
Potenssiyhtälöllä $x^2 = a$ $(a > 0)$ on kaksi ratkaisua vakion a positiivisesta arvosta riippumatta.

Vastaus: **a)** Jokaisen luvun toinen potenssi on nolla tai positiivinen. Funktion x^2 kuvaajalla jokaisen pisteen y-koordinaatti on nolla tai positiivinen. **b)** Potenssiyhtälöllä $x^2 = a$ $(a > 0)$ on kaksi ratkaisua vakion a positiivisesta arvosta riippumatta.

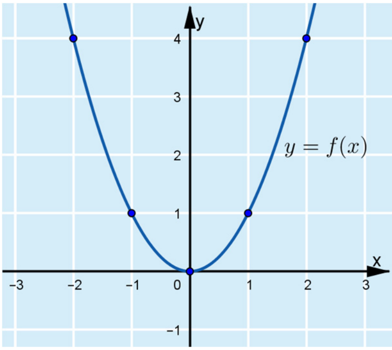
616. **a)** Potenssi x^3 tarkoittaa tuloa $x \cdot x \cdot x$. Tulon merkkisääntöjen nojalla kolmen negatiivisen luvun tulo on negatiivinen, kun taas kolmen positiivisen luvun tulo on positiivinen.
Funktion x^3 kuvaajalla on pisteitä, joilla y-koordinaatti on negatiivinen sekä pisteitä, joilla y-koordinaatti on positiivinen.
Funktion kuvaajasta osa on x-akselin alapuolella (kun $x < 0$) ja osa x-akselin yläpuolella (kun $x > 0$).

b) Kaikilla muuttujan x negatiivisilla arvoilla potenssin x^3 arvo on negatiivinen ja jokainen arvo saadaan vain yhdellä muuttujan x arvolla.
Muuttujan x arvolla nolla funktio saa arvon nolla ja muuttujan positiivisilla arvoilla funktion x^3 arvo on positiivinen ja jokainen arvo saadaan yhdellä muuttujan x arvolla.
Funktion f kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, kun $x < 0$ ja yläpuolella kun $x > 0$. Funktio saa kunkin arvonsa vain yhdellä muuttujan x arvolla ja tämän takia kuvaajalla ei ole kahta pistettä, joilla olisi sama pisteen y-koordinaatti.
Potenssiyhtälöllä $x^3 = a$ on yksi ratkaisu vakion a arvosta riippumatta.

Vastaus: **a)** Negatiivisen luvun kolmas potenssi on negatiivinen ja positiivisen luvun positiivinen. Funktion x^3 kuvaajan jokaisella pisteellä on y-koordinaatin arvo, jota ei ole muulla kuvaajan pisteellä. **b)** Potenssiyhtälöllä $x^3 = a$ on yksi ratkaisu vakion a arvosta riippumatta.

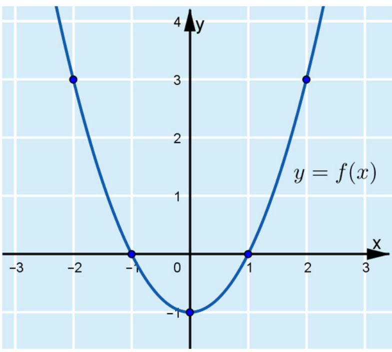
617. **a)** Lasketaan kuvaajan hahmottelemista varten muutamia funktion f arvoja muuttujan x eri arvoilla.

x	$y = f(x) = x^2$	(x, y)
-2	$(-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$(-1)^2 = 4$	$(-1, 1)$
0	$0^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$1^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$2^2 = 4$	$(2, 4)$



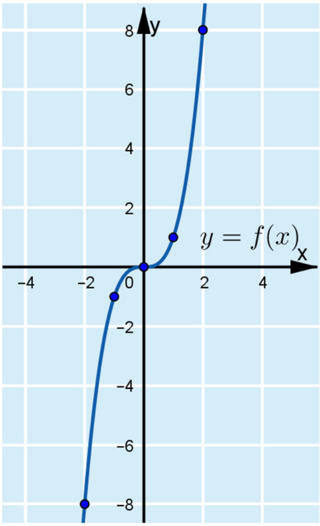
b) Lasketaan kuvaajan hahmottelemista varten muutamia funktion f arvoja muuttujan x eri arvoilla.

x	$y = f(x) = x^2 - 1$	(x, y)
-2	$(-2)^2 - 1 = 3$	$(-2, 3)$
-1	$(-1)^2 - 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$0^2 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$1^2 - 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$2^2 - 1 = 3$	$(2, 3)$



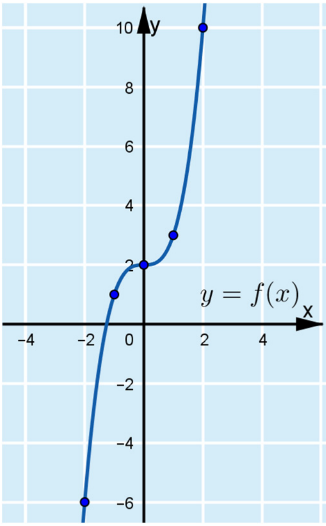
c)

x	$y = f(x) = x^3$	(x, y)
–2	$(-2)^3 = -8$	$(-2, -8)$
–1	$(-1)^3 = -1$	$(-1, -1)$
0	$0^3 = 0$	$(0, 0)$
1	$1^3 = 1$	$(1, 1)$
2	$2^3 = 8$	$(2, 8)$



d)

x	$y = f(x) = x^3 + 2$	(x, y)
–2	$(-2)^3 + 2 = -6$	$(-2, -6)$
–1	$(-1)^3 + 2 = 1$	$(-1, 1)$
0	$0^3 + 2 = 2$	$(0, 2)$
1	$1^3 + 2 = 3$	$(1, 3)$
2	$2^3 + 2 = 10$	$(2, 10)$



618. **a)** Muutetaan rahayksiköt euroiksi:
5,02 snt = 0,0502 € ja 5,90 snt = 0,059 €.
Maksut 3,49 €/kk ja 4,30 €/kk eivät riipu kulutetusta energiasta x, joten ne ovat funktiossa vakioita. Lukuarvot 0,0502 ja 0,059 kerrotaan muuttujan arvolla x, jolloin funktion lauseke on
$f(x) = 3{,}49 + 4{,}30 + 0{,}0502x + 0{,}059x = 0{,}1092x + 7{,}79$.

b) $f(600) = 0{,}1092 \cdot 600 + 7{,}79 = 73{,}31$ (€). Vastaus merkitsee kuukauden sähkölaskun suuruutta, jos kulutus on kuukaudessa 600 kWh.

c)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 40 \\
0{,}1092x + 7{,}79 &= 40 \\
0{,}1092x &= 40 - 7{,}79 \\
0{,}1092x &= 32{,}21 \quad \| : 0{,}1092 \\
x &= 294{,}96... \\
x &\approx 295
\end{aligned}
$$

Yhtälön $f(x) = 40$ ratkaisuna selvitetään se kuukauden sähkönkulutus x, jolla kuukauden sähkölaskun suuruus on 40 €. Yhtälön ratkaisu $x \approx 295$ kuvaa kuukauden sähkönkulutusta kilowattitunteina (kWh), jolla kuukauden sähkölaskun suuruus on 40 €.

Vastaus:
a) $f(x) = 0{,}1092x + 7{,}79$
b) $f(600) = 73{,}31$ eli sähkölasku on 73,31 €, jos kulutus on 600 kWh/kk
c) $f(x) = 40$, kun $x \approx 295$. Kulutuksella x sähkölaskun suuruus on 40 €. Kun kulutus x on noin 295 kWh, on kuukauden sähkölasku 40 €.

619. **a)** Hetkellä $t = 0$ eli heti latauksen jälkeen akussa on täysi lataus:
$f(0) = 1 - 0{,}03 \cdot 0 = 1$.

b) $f(10) = 1 - 0{,}03 \cdot 10 = 0{,}7$
(Lukema tarkoittaa akun varaustasoa 70 %.)

c) Varaustasoa 35 % vastaa desimaaliluku 0,35.
Ratkaistavana on yhtälö $f(t) = 0{,}35$.

$$\begin{aligned} 1-0{,}03t &= 0{,}35 \\ -0{,}03t &= 0{,}35-1 \\ -0{,}03t &= -0{,}65 \quad \|:(-0{,}03) \\ t &= 21{,}66... \\ t &\approx 22 \end{aligned}$$

Akun varaustaso on 35 % noin 22 tunnin kuluttua latauksesta.

d) Selvitetään ensin, millä hetkellä akun varaustaso on 95 % yhtälön $f(t) = 0{,}95$ avulla.

$$\begin{aligned} 1-0{,}03t &= 0{,}95 \\ -0{,}03t &= 0{,}95-1 \\ -0{,}03t &= -0{,}05 \quad \|:(-0{,}03) \\ t &= 1{,}66... \end{aligned}$$

Akun varaustaso on 95 % noin 1,666… tunnin kuluttua latauksesta ja varaustaso on 35 % c-kohdan mukaan noin 21,666… tunnin kuluttua latauksesta. Aikaa varaustason alenemiseen 95 %:sta 35 %:iin kuluu 21,666.. h – 1,666… h = 20 h.

Vastaus:
a) ajan hetkellä $t = 0$ eli heti latauksen jälkeen.
b) varaustaso on 70 %
c) noin 22 tunnin kuluttua latauksesta
d) noin 20 tuntia

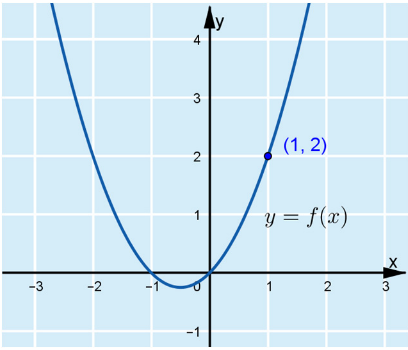
620. **a)** $p(60)$ tarkoittaa päästöjen määrää, kun nopeus on 60 km/h. $p(x) = 200$ tarkoittaa, että päästöt ovat 200 g/km, kun nopeus on x (km/h).

b) Kuvaajan perusteella päästöt ovat noin 150 g/km, kun nopeus on 60 eli $p(60) \approx 150$ g/km. Kun nopeus on noin 23 km/h tai noin 120 km/h, ovat päästöt noin 200 g/km, joten yhtälön $p(x) = 200$ ratkaisu on $x \approx 23$ tai $x \approx 120$.

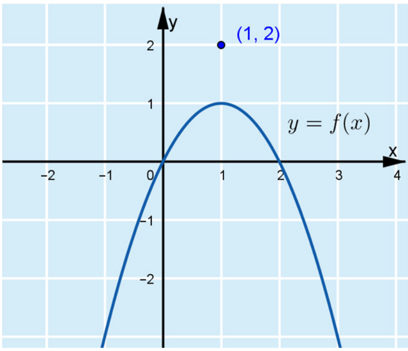
c) $p(100) – p(80)$ tarkoittaa sitä, kuinka paljon päästöt kasvavat, kun nopeus kasvaa arvosta 80 km/h arvoon 100 km/h. Kuvaajan perusteella $p(100) – p(80) \approx 175 – 155 = 20$ (g/km).
$p(120) – p(80)$ tarkoittaa päästöjen kasvua kilometriä kohti, kun nopeus kasvaa arvosta 80 km/h arvoon 120 km/h. Kuvaajan perusteella $p(120) – p(80) \approx 200 – 155 = 45$ (g/km).

Vastaus:
a) $p(60)$ tarkoittaa päästöjen määrää, kun nopeus on 60 km/h.
$p(x) = 200$ tarkoittaa, että päästöt ovat 200 g/km, kun nopeus on x (km/h).
b) $p(60) \approx 150$ g/km ja $p(x) = 200$, kun $x \approx 23$ tai $x \approx 120$
c) $p(100) – p(80)$ tarkoittaa sitä, kuinka paljon päästöt kasvavat, kun nopeus kasvaa arvosta 80 km/h arvoon 100 km/h. Kuvaajan perusteella $p(100) – p(80) \approx 175 – 155 = 20$.
$p(120) – p(80)$ tarkoittaa päästöjen kasvua kilometriä kohti, kun nopeus kasvaa arvosta 80 km/h arvoon 120 km/h. Kuvaajan perusteella $p(120) – p(80) \approx 200 – 155 = 45$.

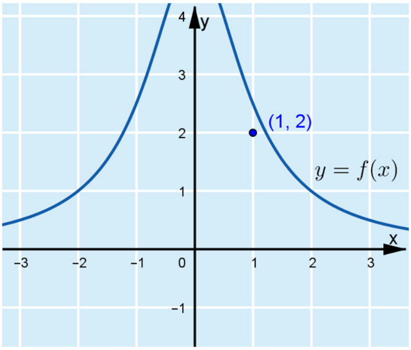
621. **a)** $f(1) = 1^2 + 1 = 2$, joten piste (1, 2) on funktion f kuvaajalla.



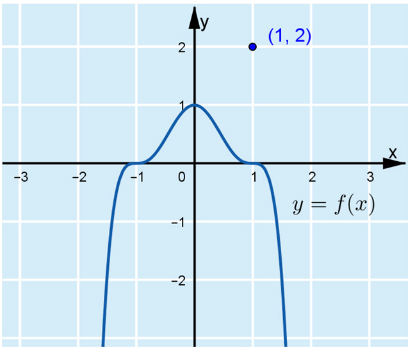
b) $f(1) = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 \neq 2$, joten piste (1, 2) ei ole funktion f kuvaajalla. Piste (1, 2) on funktion f kuvaajan yläpuolella.



c) $f(1) = \frac{5}{1^2 + 1} = \frac{5}{2} \neq 2$, joten piste (1, 2) ei ole funktion f kuvaajalla. Piste (1, 2) on funktion f kuvaajan alapuolella.



d) $f(1) = (-1^2 + 1)^3 = 0^3 = 0 \neq 2$, joten piste (1, 2) ei ole funktion f kuvaajalla.
Piste (1, 2) on funktion f kuvaajan yläpuolella.

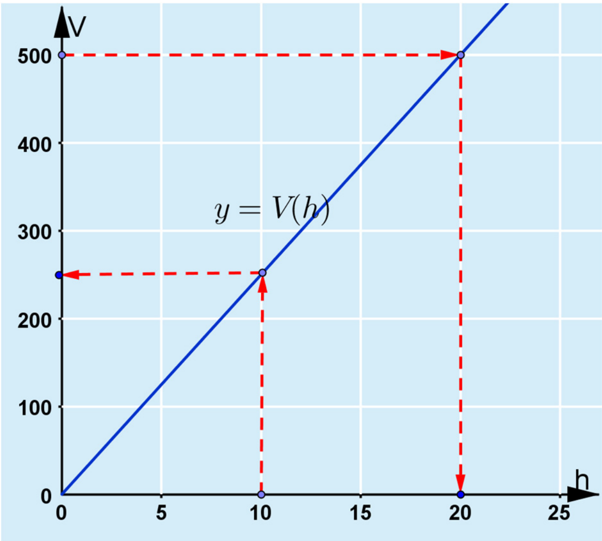


Vastaus: **a)** On funktion kuvaajalla. **b)** Ei ole funktion kuvaajalla. On sen yläpuolella. **c)** Ei ole funktion kuvaajalla. On sen alapuolella. **d)** Ei ole funktion kuvaajalla. On sen yläpuolella.

622. **a)** Lieriön tilavuus lasketaan kertomalla pohjan pinta-ala korkeudella. Nyt pohjan pinta-ala on 25 (cm^2) ja korkeus h (> 0), niin $V(h) = 25h$, $h > 0$.

b) $V(10)$ tarkoittaa tilavuutta, kun korkeus on $h = 10$ cm. $V(h) = 500$ tarkoittaa sitä korkeutta h, jolla tilavuus on 500 cm^3.

c)



$V(10) \approx 250$ (cm^3) ja yhtälön $V(h) = 500$ ratkaisu on $h \approx 20$ (cm).

Vastaus: **a)** $V(h) = 25h,\ h > 0$ **b)** $V(10)$ tarkoittaa tilavuutta, kun korkeus on $h = 10$ cm. $V(h) = 500$ tarkoittaa sitä korkeutta h, jolla tilavuus on 500 cm^3.

623. **a)** Käyrä on funktion kuvaaja, jos jokaista muuttujan x arvoa vastaa vain yksi funktion arvo $y = f(x)$. Siis jos kahdella kuvaajan pisteellä on sama x-koordinaatti, ei kuvaaja esitä muuttujan x funktiota.

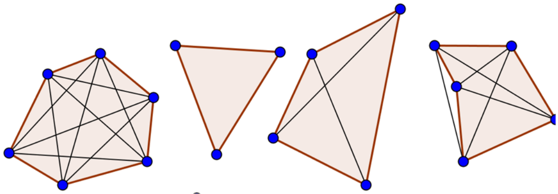
b) Käyrä A ei ole funktion kuvaaja, koska esimerkiksi kohdassa $x = 1$ käyrällä on kolme pistettä (1; −2,1), (1; 0,3) ja (1, 2).

Käyrä B ei ole funktion kuvaaja, koska esimerkiksi kohdassa $x = 1$ käyrällä on kaksi pistettä (1, −1) ja (1, 1).

Käyrä C on funktion kuvaaja, koska mitään muuttujan x arvoa ei vastaa useampi kuin yksi funktion arvo $y = f(x)$. Nyt $f(1) \approx -2$.

Vastaus: **a)** Funktiossa jokaista muuttujan x arvoa voi vastata vain yksi y:n arvo. **b)** C, $f(1) \approx -2$

624. **a)**

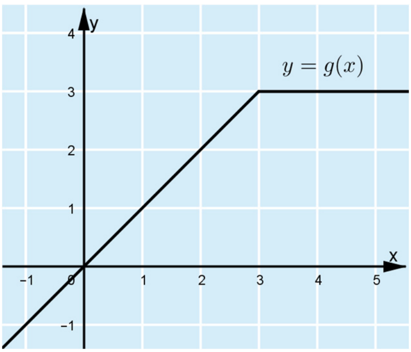


n	$f(n)$
3	0
4	2
5	5
6	9

b) Joka kärjestä lähtee lävistäjä muihin kärkiin paitsi kyseiseen kärkeen itseensä ja sen viereisiin kahteen kärkeen. Siis joka kärjestä lähtee lävistäjä kolmeen kärkeen vähemmän kuin kärkiä on yhteensä. Lävistäjien lukumäärä voidaan siis laskea kertomalla kärkien määrä kolmea pienemmällä luvulla, mutta tällä tavalla jokainen lävistäjä tulee laskettua kahteen kertaan, joten on vielä jaettava kahdella.

Siis $f(n) = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

625. **a)**



b) $g(4) \approx 3$

c) $g(x) = -1$, kun $x \approx -1$

d) Funktio g saa negatiivisia arvoja, kun $x < 0$.

Vastaus: **b)** $g(4) \approx 3$ **c)** $g(x) = -1$, kun $x \approx -1$ **d)** $x < 0$

626. **a)** Nyt $f(-x) = -\underbrace{x}_{=f(x)} = -f(x)$, joten funktio $f(x) = x$ on symmetrinen origon suhteen.

b) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, joten funktio $f(x) = x^2$ ei ole symmetrinen origon suhteen.

c) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, joten funktio $f(x) = x^3$ on symmetrinen origon suhteen.

d) $f(-x) = -x - 1 \neq -f(x)$, joten funktio $f(x) = x - 1$ ei ole symmetrinen origon suhteen.

e) $f(-x) = -(-x)^3 = x^3 = -f(x)$, joten funktio $f(x) = -x^3$ on symmetrinen origon suhteen.

Vastaus: **a)** On. **b)** Ei ole. **c)** On. **d)** Ei ole. **e)** On.

627. **a)** Nyt $f(-x) = -x = -f(x)$, joten funktio $f(x) = x$ on pariton.

b) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, joten funktio $f(x) = x^2$ on parillinen.

c) $f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$, joten funktio $f(x) = x^5$ on pariton.

d) $f(-x) = -x + 1 \neq f(x)$ ja $f(-x) = -x + 1 \neq -f(x)$, joten funktio $f(x) = x + 1$ ei ole parillinen eikä pariton.

e) $f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$, joten funktio $f(x) = x^2 + 2$ on parillinen.

Vastaus: **a)** pariton **b)** parillinen **c)** pariton **d)** ei ole kumpikaan **e)** parillinen

6.2 Funktion kuvaajan tulkinta

LUO PERUSTA

628. **a)** noin klo 15 **b)** noin klo 0, klo 7 ja klo 20
c) noin klo 1, klo 5 ja klo 24 **d)** noin klo 0–1 ja klo 5–24
e) noin klo 1–5 **f)** noin klo 12–18

629. **a)** Katsotaan kuvaajalta missä kohdissa kuvaaja leikkaa x-akselin. Nollakohdat ovat $x \approx -3$, $x \approx 1$ ja $x \approx 3$.

b) Kuvaajan pisteen y-koordinaatti on funktion arvo tässä kohdassa. Kuvaajasta nähdään, että funktion arvo on 3, kun $x \approx 4$.

c) Kohdassa $x = -2$ funktion kuvaaja on x-akselin yläpuolella, sillä $f(-2) \approx 1{,}8$. Funktion arvo on siis positiivinen kohdassa $x = -2$.

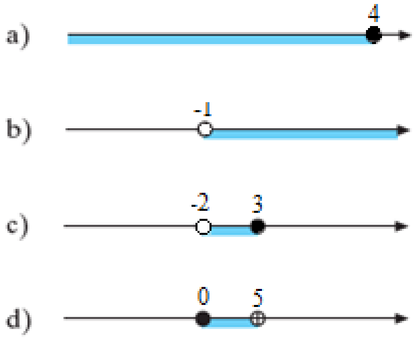
d) Kohdassa $x = 2$ funktion kuvaaja on x-akselin alapuolella, sillä $f(2) \approx -0{,}5$. Funktion arvo on siis negatiivinen kohdassa $x = 2$.

Vastaus: **a)** $x \approx -3$, $x \approx 1$ ja $x \approx 3$ **b)** $f(x) = 3$, kun $x \approx 4$ **c)** positiivinen **d)** negatiivinen

630. A–III, B–II, C–IV ja D–I

631. **a)** $x \leq 1$ **b)** $x > -2$ **c)** $-3 < x \leq 2$ **d)** $0 \leq x < 4$

632.



633. **a)** Kun $x = 0$, on $y \approx -2$, joten $f(0) \approx -2$.

b) Kuvaaja leikkaa (tai sivuaa) x-akselia kohdissa $x \approx -4$ ja $x \approx 3$. Nollakohdat ovat siis $x \approx -4$ ja $x \approx 3$.

c) Kuvaajalta nähdään, että $f(-5) \approx 1{,}2$ eli $f(-5)$ on positiivinen.

d) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella eli kun $-4 < x < 3$.

Vastaus: **a)** $f(0) \approx -2$ **b)** $x \approx -4$ ja $x \approx 3$ **c)** positiivinen **d)** $-4 < x < 3$

634. **a)** Kuvaaja leikkaa x-akselin kohdissa $x \approx -2$, $x \approx -1$ ja $x \approx 4$, jotka ovat funktion nollakohdat.

b) Funktion arvo on positiivinen, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella eli kun $x < -2$ ja $-1 < x < 4$.

c) Funktion arvo on negatiivinen, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella eli kun $-2 < x < -1$ ja $x > 4$.

d) Kuvaajasta nähdään, että funktio saa arvon 1, kun $x \approx 1$ ja $x \approx 3$.

e) Funktion arvo on suurempi kuin 1, kun kuvaaja kulkee suoran $y = 1$ yläpuolella eli kun $1 < x < 3$.

f) Yhtälön $h(x) = 0$ ratkaisut ovat funktion nollakohdat eli $x \approx -2$, $x \approx -1$ ja $x \approx 4$.

Vastaus:
a) $x \approx -2$, $x \approx -1$ ja $x \approx 4$

b) $x < -2$ ja $-1 < x < 4$

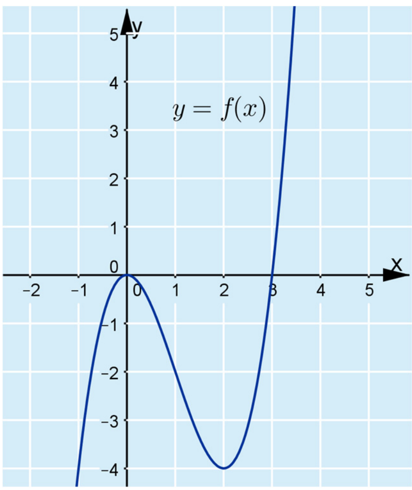
c) $-2 < x < -1$ ja $x > 4$

d) $x \approx 1$ ja $x \approx 3$

e) $1 < x < 3$

f) $x \approx -2$, $x \approx -1$ ja $x \approx 4$

635.



a) Nollakohdat ovat $x \approx 0$ ja $x \approx 3$.

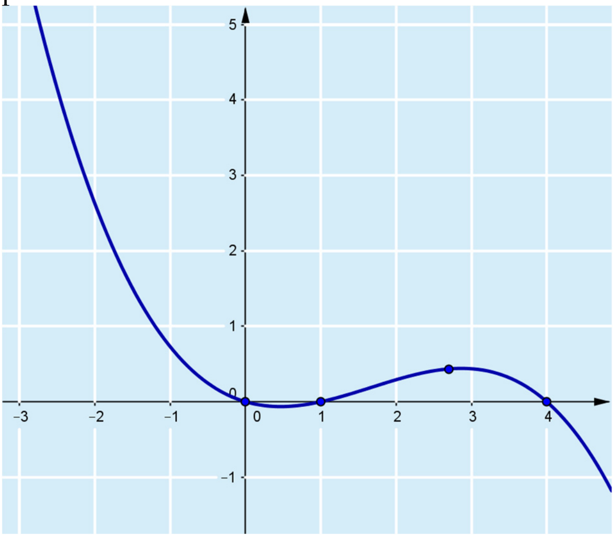
b) Kuvaajasta nähdään, että funktio saa arvon –4, kun $x \approx -1$ tai $x \approx 2$.

c) Funktion arvo on positiivinen, kun kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella eli kun $x > 3$.

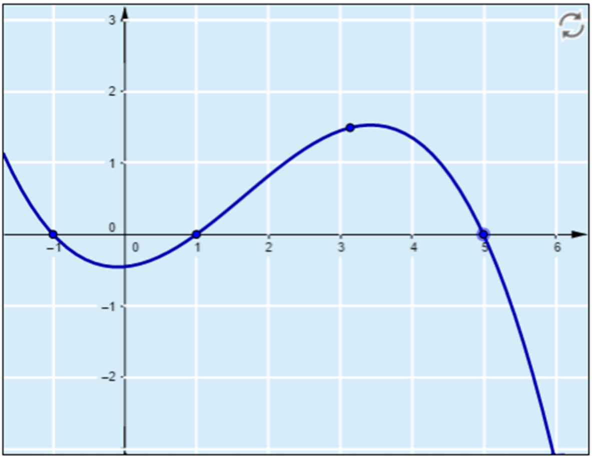
d) Funktion arvo on suurempi kuin 4, kun kuvaaja kulkee suoran $y = 4$ yläpuolella eli kun $x > 3{,}4$.

Vastaus: **a)** $x \approx 0$ ja $x \approx 3$ **b)** $x \approx -1$ tai $x \approx 2$ **c)** $x > 3$ **d)** $x > 3{,}4$

636. **a)** Välillä $x < 0$ kuvaaja on x-akselin yläpuolella, joten funktion arvo on positiivinen.



b) Välillä $1 < x < 5$ kuvaaja on x-akselin yläpuolella, joten funktion arvo on positiivinen.



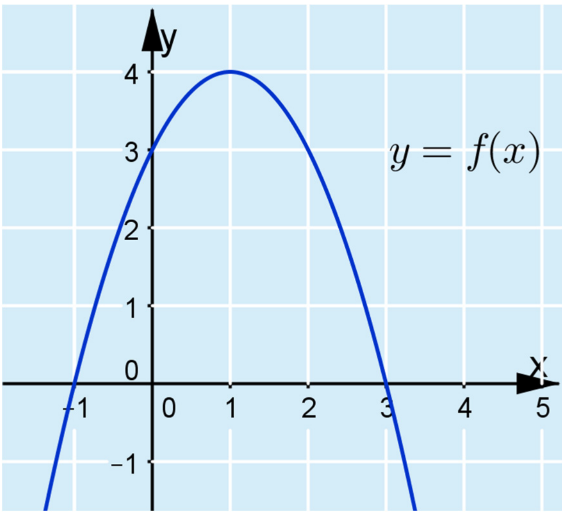
Vastaus: **a)** positiivinen **b)** positiivinen

637. **a)** Nollakohdassa funktion arvo on nolla.

b) Kohdassa $x = 0$ funktion f arvo on 2 eli $f(0) = 2$.

Vastaus: **a)** 0 **b)** $f(0) = 2$

638.

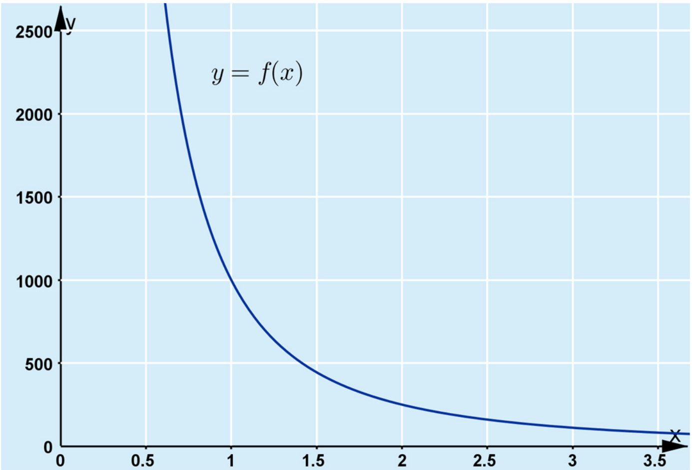


a) $f(x) > 0$, kun $-1 < x < 3$

b) $f(x) > 3$, kun $0 < x < 2$
c) $f(x) < 3$, kun $x < 0$ tai $x > 2$

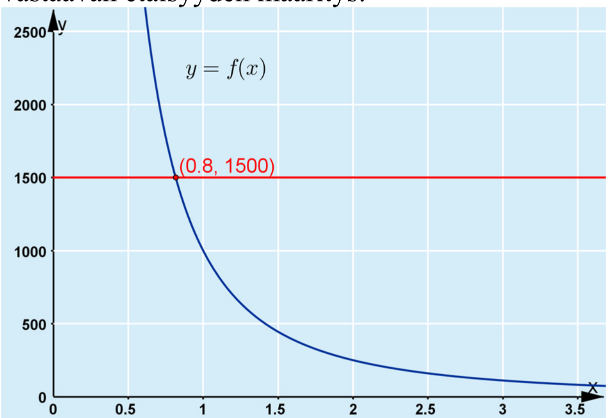
Vastaus: **a)** $f(x) > 0$, kun $-1 < x < 3$ **b)** $f(x) > 3$, kun $0 < x < 2$
c) $f(x) < 3$, kun $x < 0$ tai $x > 2$

639.



Etäisyydet löytyvät nopeasti piirtämällä valaistusvoimakkuuksia kuvaavat suorat $y = 20$, $y = 500$, $y = 1\ 500$ ja $y = 10\ 000$ ja määrittämällä ohjelman automaattisella toiminnolla funktion kuvaajan ja suorien leikkauspisteet.

Ohessa on tarkkuutta vaativan työn valaistusvoimakkuutta 1500 luksia vastaavan etäisyyden määritys:



Suora $y = 1500$ ja funktion f kuvaaja leikkaavat kohdassa $x \approx 0{,}8$ (m). Valaistusvoimakkuus on riittävä tarkkuutta vaativaan työhön, kun etäisyys valaisimesta on noin 0,8 m = 80 cm.

Vastaus: **a)** noin 7 m **b)** noin 1,4 m **c)** noin 80 cm **d)** noin 30 cm

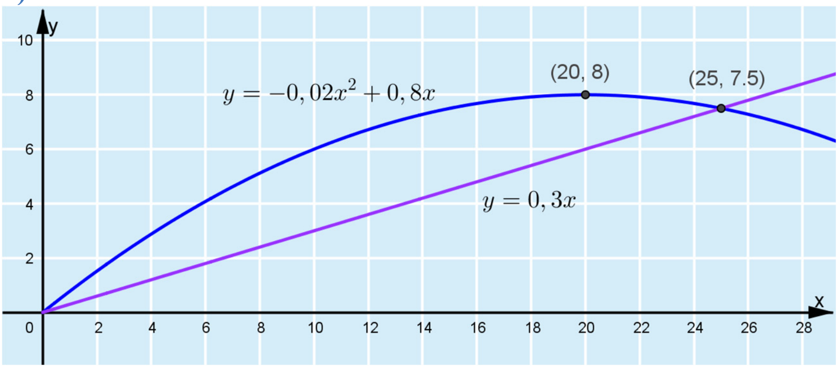
640. **a)** $f(-1) \approx 0$, $g(-1) \approx 1{,}5$ joten $g(-1) > f(-1)$
$f(1) \approx 2$, $g(1) \approx 0{,}5$, joten $f(1) > g(1)$

b) Funktiot saavat arvon kuvaajien leikkauskohdissa eli kun $x \approx -2$, $x \approx 0$ ja $x \approx 2$.

c) Funktio g arvo on suurempi kuin funktion f arvo silloin, kun sen kuvaaja kulkee ylempänä kuin funktion f kuvaaja eli kun $-2 < x < 0$ tai $2 < x \leq 3$.

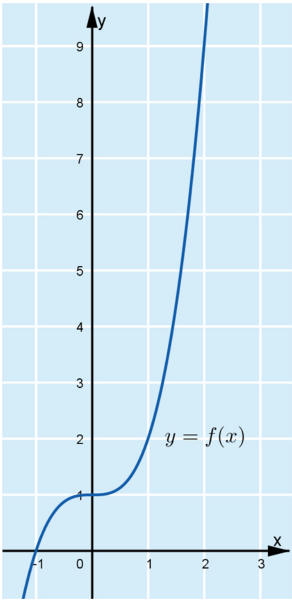
Vastaus: **a)** $g(-1)$, $f(1)$ **b)** $x \approx -2$, $x \approx 0$ ja $x \approx 2$ **c)** $-2 < x < 0$ tai $2 < x \leq 3$.

641. **a)**



b) noin 8 m **c)** noin 25 m **d)** noin 7,5 m

642.



a) Kun $0 < x < 2$, niin $1 < f(x) < 9$.

b) Kun $-1 < x < 1$, niin $0 < f(x) < 2$.

Vastaus: **a)** $1 < f(x) < 9$ **b)** $-1 < x < 1$

643. **a)**

$$\frac{1}{2}x - 2 = -1$$

$$\frac{1}{2}x = -1 + 2 \quad \| \cdot 2$$

$$x = 2$$

b) Muodostetaan yhtälö merkitsemällä funktioiden lausekkeet yhtä suuriksi.

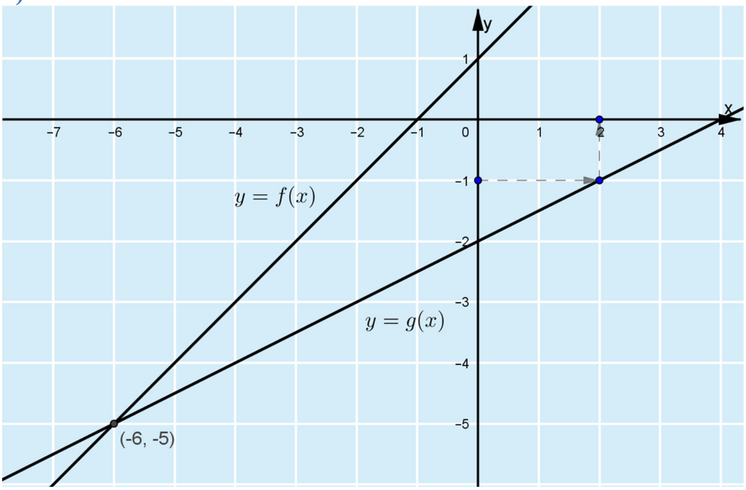
$$x+1=\frac{1}{2}x-2$$

$$x-\frac{1}{2}x=-2-1$$

$$\frac{1}{2}x=-3 \quad \| \cdot 2$$

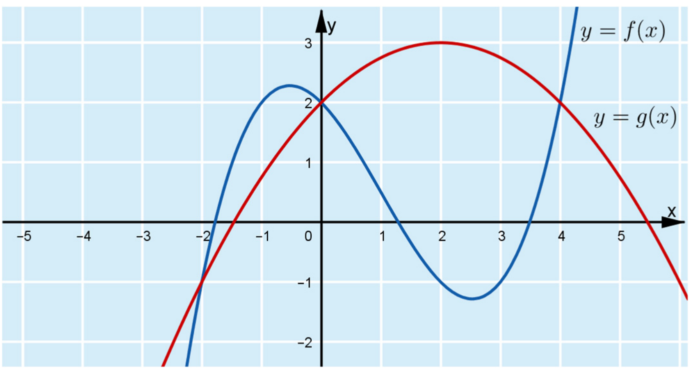
$$x=-6$$

c)



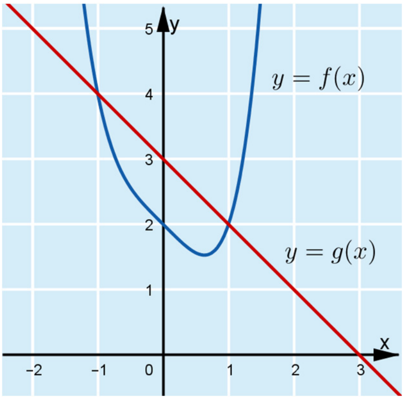
Vastaus: **a)** $x = 2$ **b)** $x = -6$

644.



Vastaus:
a) $x \approx -2$, $x \approx 0$ ja $x \approx 4$
b) $-2 < x < 0$ ja $4 < x < 5$
c) $-5 < x < -2$ ja $0 < x < 4$
d) $-2 < x < 0$ ja $4 < x < 5$
e) $-2 < x < -1$, $0 < x < 2$ ja $3 < x < 4$

645.



a) $g(x) > f(x)$, kun $-1 < x < 1$

b) $f(x) > g(x)$, kun $x < -1$ tai $x > 1$

c) $f(x) - g(x) = 0$, josta saadaan $f(x) = g(x)$.
Yhtälön $f(x) = g(x)$ ratkaisut ovat $x = -1$ tai $x = 1$. Ratkaisut $x = -1$ ja $x = 1$ ovat myös yhtälön $f(x) - g(x) = 0$ ratkaisut.

Vastaus:
a) $-1 < x < 1$
b) $x < -1$ tai $x > 1$
c) $x = -1$ ja $x = 1$

646. Vastaus:
a) noin 38 m/s **b)** $23 < t < 42$ **c)** $0 < t < 23$ **d)** $42 < t < 50$

e) Hyppääjä hyppää alas lentokoneesta, ja nopeus alkaa kasvaa. Kun nopeus 50 m/s on saavutettu, nopeus ei enää kasva. Noin 42 sekunnin kuluttua hyppyhetkestä hyppääjä avaa laskuvarjon, ja nopeus alkaa hidastua ja vakiintua. Lopuksi hyppääjä laskeutuu maan pinnalle noin 70 sekunnin kuluttua hyppyhetkestä.

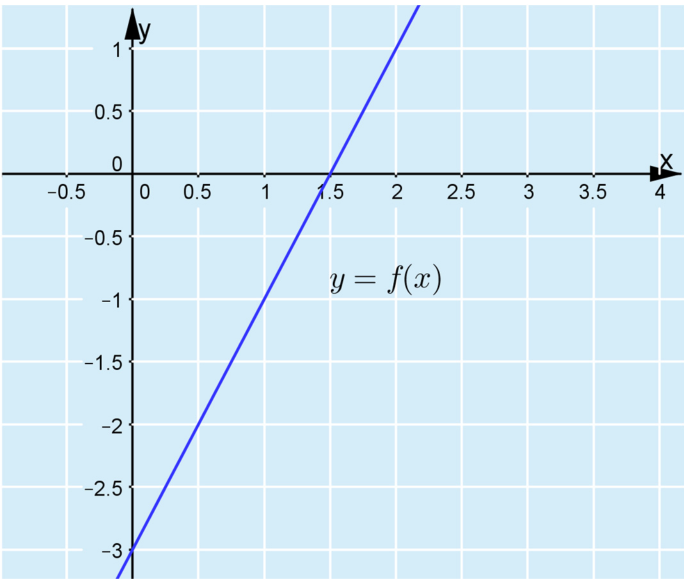
647. **a)** Nollakohdassa $f(x) = 0$, joten

$$2x - 3 = 0$$
$$2x = 3 \quad \| : 2$$
$$x = \frac{3}{2}.$$

Arvo kohdassa nolla on $f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$.

b) Koska $f(0) = -3$, on kuvaajan ja y-akselin leikkauspiste $(0, -3)$. Koska nollakohta on $x = \frac{3}{2}$, on kuvaajan ja x-akselin leikkauspiste $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

c)



Funktion nollakohdassa kuvaaja leikkaa (tai sivuaa) x-akselia. Kuvaajan perusteella nollakohta on $x = \frac{3}{2}$. Kohdassa nolla funktion kuvaaja leikkaa y-akselin ja nyt $f(0) = -3$.

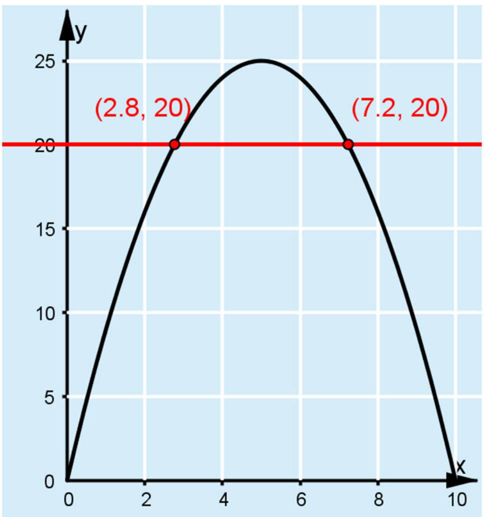
Vastaus: **a)** $x = \frac{3}{2}$ ja $f(0) = -3$ **b)** Kuvaajan ja x-akselin leikkauspiste $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Kuvaajan ja y-akselin leikkauspiste $(0, -3)$.

648. **a)** Toisen sivun pituus saadaan, kun verkon pituudesta vähennetään x, joten toisen sivun pituus on $10 - x$.

b) Suorakulmion pinta-ala saadaan kertomalla sivujen pituudet keskenään, joten pinta-alan funktio on $A(x) = x(10 - x)$.

$A(2{,}5) = 2{,}5 \cdot (10 - 2{,}5) = 18{,}75 \approx 19 \text{ (m}^2)$

c)



Kuvaajasta nähdään, että sivun pituudet, joilla pinta-ala on yli 20 m^2, ovat noin 3 metrin ja 7 metrin välillä. Ne löytyvät tarkemmin, kun piirretään lisäksi suora $y = 20$ ja etsitään ohjelman automaattisella toiminnolla funktion kuvaajan ja suoran leikkauspisteet. Näin saadaan vastaus $2{,}8 < x < 7{,}2$.

d) Kuvaajalta nähdään, että suurin pinta-ala on noin 25 m^2.

Vastaus: **a)** $10 - x$ **b)** $A(x) = x(10 - x)$, $A(2{,}5) \approx 19$ (m^2)
c) $2{,}8 < x < 7{,}2$ **d)** noin 25 m^2

649. **a)** Pyöristyssäännön mukaan luku 4,5 on pienin luku, joka pyöristyy luvuksi 5. Luku 5,5 pyöristyy ylöspäin luvuksi 6, mutta sitä pienemmät luvut lukuun 5 asti pyöristyvät alaspäin lukuun 5, joten kysytty väli on

$4{,}5 \le x < 5{,}5$ 

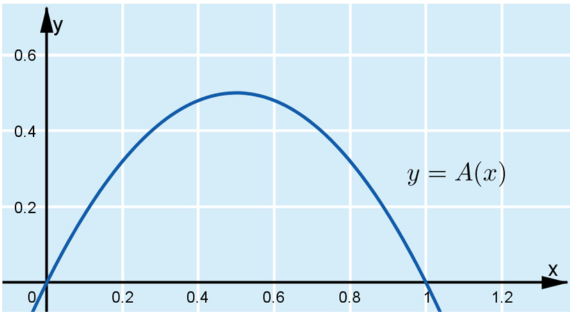
.

b) Suurinta lukua ei ole. Pienin luku on 4,5.

650. **a)** Suorakulmion toinen sivu on x ja toinen $\frac{1-x}{2}$, joten neljän suorakulmion pinta-alojen summa on

$$A(x) = 4 \cdot \frac{(1-x)}{2} \cdot x = 2(1-x)x = 2x(1-x) = 2x - 2x^2.$$

b)

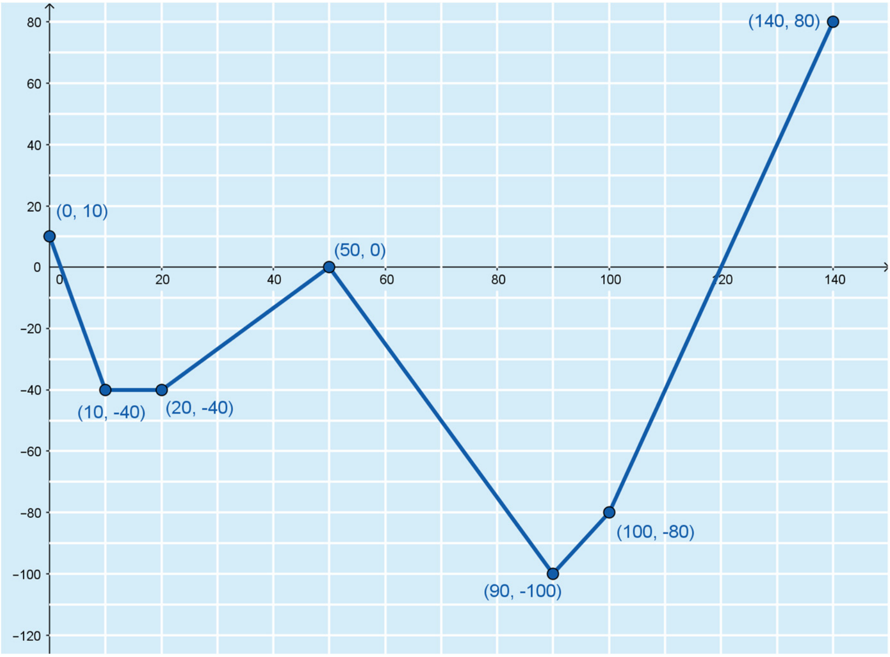


Pinta-alan suurin arvo on kuvaajalta luettuna noin 0,5. Appletti antaa saman tuloksen.

c) $A(x) < 0{,}2$, kun $0 < x < 0{,}1$ tai $0{,}9 < x < 1$

Vastaus: **a)** $A(x) = 2x - 2x^2$ **b)** noin 0,5
c) $A(x) < 0{,}2$, kun $0 < x < 0{,}1$ tai $0{,}9 < x < 1$

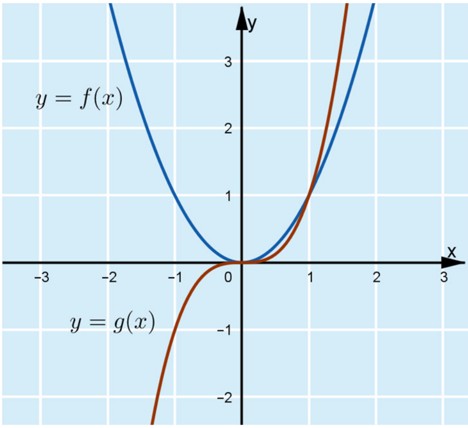
651.



a) noin 40 °C **b)** noin 70 km ja noin 108 km **c)** noin 2 km, noin 50 km ja noin 120 km **d)** alle 2 km ja yli 120 km **e)** noin 2–120 km, paitsi ei 50 km

652. **a)** Potenssi x^2 tarkoittaa tulomuotoa $x \cdot x$. Positiivisen luvun kertolasku positiivisen luvun kanssa tuottaa tulon, joka on positiivinen. Negatiivisen luvun kertolasku negatiivisen luvun kanssa tuottaa myös tulon, joka on positiivinen. Luvun nolla kertolasku tuottaa tuloksen nolla. Funktio $f(x) = x^2$ saa siis vain arvoja, jotka ovat positiivisia tai arvon nolla.
Potenssi x^3 tarkoittaa tulomuotoa $x \cdot x \cdot x$. Positiivisen luvun kolmas potenssi on positiivinen, kun taas negatiivisen luvun kolmas potenssi on tulon merkkisääntöjen perusteella negatiivinen. Luvun nolla kertolasku tuottaa tuloksen nolla. Funktio $g(x) = x^3$ saa siis positiivisten arvojen ja arvon nolla lisäksi negatiivisia arvoja.

b)



Kuvaajat $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ leikkaavat tai sivuavat toisiaan kohdissa $x \approx 0$ ja $x \approx 1$. Yhtälön $f(x) = g(x)$ ratkaisut ovat siis $x \approx 0$ tai $x \approx 1$.
Muuttujan x negatiivisilla arvoilla $f(x) > 0$ ja $g(x) < 0$, joten yhtälöllä $f(x) = g(x)$ ei ole ratkaisua, kun $x < 0$.
Kun $x > 1$, niin $x^3 > x^2$, joten yhtälöllä $f(x) = g(x)$ ei myöskään ole ratkaisua, kun $x > 1$.