

# 3. YHTÄLÖ JA YHTÄLÖPARI

## 3.1 Lauseke ja ensimmäisen asteen yhtälö

### LUO PERUSTA

301. a) A, D ja F

b) B, C ja E

Vastaus: a) A, D ja F    b) B, C ja E

X302. a) Sijoitetaan luku  $-2$  yhtälön vasemmalle puolelle muuttujan  $x$  paikalle.

$$1 - (-2) = 1 + 3 = 3$$

Luku  $-2$  on yhtälön  $1 - x = 3$  ratkaisu.

b) Sijoitetaan luku  $-2$  yhtälön molemmille puolille muuttujan  $x$  paikalle.

$$\text{vasen puoli: } 3(-2 + 2) = 3 \cdot 0 = 0$$

$$\text{oikea puoli: } -2 - 1 = -3$$

Luku  $-2$  ei ole yhtälön  $3(x + 2) = x - 1$  ratkaisu.

c) Sijoitetaan luku  $-2$  yhtälön vasemmalle puolelle muuttujan  $x$  paikalle.

$$\frac{2 \cdot (-2) + 1}{3} = \frac{-4 + 1}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Luku  $-2$  on yhtälön  $\frac{2x + 1}{3} = -1$  ratkaisu.

Vastaus: a) On.

b) Ei ole.    c) On.

X303. a) Sijoitetaan luku  $7$  yhtälön vasemmalle puolelle muuttujan  $x$  paikalle.

$$5 \cdot 7 - 15 = 35 - 15 = 20$$

Luku  $7$  ei ole yhtälön  $5x - 15 = 40$  ratkaisu.

b)  $5x - 15 = 40$

$$5x = 40 + 15$$

$$5x = 55 \quad || : 5$$

$$x = 11$$

Tarkistetaan tulos sijoittamalla luku 11 yhtälön vasemmalle puolelle muuttujan  $x$  paikalle.

$$5 \cdot 11 - 15 = 55 - 15 = 40.$$

Vastaus: **a)** Ei ole.

**b)**  $x = 11$

**X304. a)**  $x = 3$ :  $2 \cdot 3 + 3 = 6 + 3 = 9$

$$x = -\frac{1}{2}: \quad 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = -2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = -1 + 3 = 2$$

**b)** Ratkaistaan yhtälö  $2x + 3 = -7$ .

$$2x + 3 = -7$$

$$2x = -7 - 3$$

$$2x = -10 \quad || : 2$$

$$x = -5$$

Vastaus: **a)**  $2x + 3 = 9$ , kun  $x = 3$  ja  $2x + 3 = 2$ , kun  $x = -\frac{1}{2}$

**b)**  $x = -5$

**A305. a)**  $4x - 1 = 11$

$$4x = 11 + 1$$

$$4x = 12 \quad || : 4$$

$$x = 3$$

**b)**  $-2x + 3 = 15$

$$-2x = 15 - 3$$

$$-2x = 12 \quad || : (-2)$$

$$x = -6$$

**c)**  $3(x - 2) = 1$

$$3x - 6 = 1$$

$$3x = 1 + 6$$

$$3x = 7 \quad || : 3$$

$$x = \frac{7}{3}$$

$$x = 2\frac{1}{3}$$

TAI

$$3(x-2)=1 \quad \parallel :3$$

$$x-2=\frac{1}{3}$$

$$x=\frac{1}{3}+2$$

$$x=2\frac{1}{3}$$

Vastaus: **a)**  $x=3$  **b)**  $x=-6$  **c)**  $x=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$

**A306. a)**  $-2(x+5)=4$

$$-2x-10=4$$

$$-2x=4+10$$

$$-2x=14 \quad \parallel :2$$

$$x=-7$$

TAI

$$-2(x+5)=4 \quad \parallel :(-2)$$

$$x+5=-2$$

$$x=-2-5$$

$$x=-7$$

**b)**  $6x+1=5$

$$6x=5-1$$

$$6x=4 \quad \parallel :6$$

$$x=\frac{4}{6}^{(2)}$$

$$x=\frac{2}{3}$$

**c)**  $\frac{x}{3}=8 \quad \parallel \cdot 3$

$$x=24$$

Vastaus: **a)**  $x=-7$  **b)**  $x=\frac{2}{3}$  **c)**  $x=24$

307. a)  $-3x + 2(x - 1) = 1$   
 $-3x + 2x - 2 = 1$   
 $-x - 2 = 1$   
 $-x = 1 + 2$   
 $-x = 3 \quad \| : (-1)$   
 $x = -3$

1	$-3x + 2(x - 1) = 1$
<input type="radio"/>	Ratkaise: $\{x = -3\}$

b)  $x - 5(x - 2) = 28$   
 $x - 5x + 10 = 28$   
 $-4x + 10 = 28$   
 $-4x = 28 - 10$   
 $-4x = 18 \quad \| : (-4)$   
 $x = -\frac{18}{4}^{(2)}$   
 $x = -\frac{9}{2}$   
 $x = -4\frac{1}{2}$

2	$x - 5(x - 2) = 28$
<input type="radio"/>	Ratkaise: $\left\{x = -\frac{9}{2}\right\}$

c)  $\frac{x}{5} + 2 = -3x \quad \| \cdot 5$   
 $x + 10 = -15x$   
 $x + 15x = -10$   
 $16x = -10 \quad \| : 16$   
 $x = -\frac{10}{16}^{(2)}$   
 $x = -\frac{5}{8}$

TAI

$$\begin{aligned}\frac{x}{5} + 2 &= -3x \\ \frac{x}{5} + \overset{5)}{2} &= -\overset{5)}{3x} \\ \frac{x}{5} + \frac{10}{5} &= -\frac{15x}{5} && \parallel \cdot 5 \\ x + 10 &= -15x \\ x + 15x &= -10 \\ 16x &= -10 && \parallel : 16 \\ x &= -\frac{10}{16}^{(2)} \\ x &= -\frac{5}{8}\end{aligned}$$

3	$x/5+2=-3x$
<input type="radio"/>	Ratkaise: $\left\{ x = -\frac{5}{8} \right\}$

Vastaus: **a)**  $x = -3$     **b)**  $x = -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2}$     **c)**  $x = -\frac{5}{8}$

**A308. a)**  $x \cdot 3 = 10$  eli  $3x = 10$ .

$$3x = 10 \quad \parallel : 3$$

$$x = \frac{10}{3}$$

$$x = 3\frac{1}{3}$$

**b)**  $\frac{x+1}{3} = 4$ .

$$\frac{x+1}{3} = 4 \quad \parallel \cdot 3$$

$$x+1=12$$

$$x=12-1$$

$$x=11$$

TAI

$$\frac{x+1}{3} = 4$$

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{3} = \overset{3)}{4}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{12}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{12-1}{3}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{11}{3} \quad \parallel \cdot 3$$

$$x = 11$$

Vastaus: **a)**  $3x = 10$ ,  $x = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$  **b)**  $\frac{x+1}{3} = 4$ ,  $x = 11$

## VAHVISTA OSAAMISTA

**X309. a)**  $-x + 5: \quad -(-2) + 5 = 2 + 5 = 7$   
 $3x + 1: \quad 3 \cdot (-2) + 1 = -6 + 1 = -5$

**b)** Koska yhtälön eri puolet saavat eri arvot, kun  $x = -2$ , luku  $-2$  ei ole yhtälön ratkaisu.

**c)**  $-x + 5 = 3x + 1$   
 $-x - 3x = 1 - 5$   
 $-4x = -4 \quad \parallel : (-4)$   
 $x = 1$

Vastaus: **a)** kun  $x = -2$ , niin  $-x + 5 = 7$  ja  $3x + 1 = -5$

**b)** Ei ole. Lausekkeet saavat eri arvon, kun  $x = -2$ .

**c)**  $x = 1$

**X310.**  $6 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{\cancel{6} \cdot 2}{\cancel{3}} - 1 = \frac{4}{1} - 1 = 4 - 1 = 3.$

Vastaus:  $-$

**X311. a)**  $3(x - 5) = x + 1$   
 $3x - 15 = x + 1$   
 $3x - x = 1 + 15$

$$\begin{aligned}2x &= 16 & \parallel :2 \\x &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } -2(1-x) &= 3x+1 \\-2+2x &= 3x+1 \\2x-3x &= 1+2 \\-x &= 3 & \parallel :(-1) \\x &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } \frac{3x}{4} &= -9 & \parallel \cdot 4 \\3x &= -36 & \parallel :3 \\x &= -12\end{aligned}$$

Vastaus: **a)**  $x = 8$    **b)**  $x = -3$    **c)**  $x = -12$

**A312.** Ratkaistaan yhtälö  $3(2x-1) = 3x-9$ .

$$\begin{aligned}3(2x-1) &= 3x-9 \\6x-3 &= 3x-9 \\6x-3x &= -9+3 \\3x &= -6 & \parallel :3 \\x &= -2\end{aligned}$$

Tarkistetaan toteuttaako luku  $-2$  yhtälön  $\frac{1-x}{3} = 1$ .

$$\frac{1-(-2)}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Yhtälön  $3(2x-1) = 3x-9$  ratkaisu  $x = -2$  siis toteuttaa yhtälön  $\frac{1-x}{3} = 1$ .

Vastaus: Kyllä toteuttaa.

**X313. a)** Testataan yhtälöt I ja II.

$$\begin{aligned}2x+7 &= -3x+8 \\2x+3x &= 8-7 \\5x &= 1 & \parallel :5 \\x &= 1\end{aligned}$$

Tämä ei kelpaa.

Testataan yhtälöt I ja III.

$$2x + 7 = x + 4$$

$$2x - x = 4 - 7$$

$$x = -3$$

Tämä ei kelpaa tähän, mutta tässä löydettiin kohtaan b kelpaava yhtälö.

Testataan yhtälöt II ja III.

$$-3x + 8 = x + 4$$

$$-3x - x = 4 - 8$$

$$-4x = -4 \quad \| : (-4)$$

$$x = 1$$

Kysytyksi yhtälöksi kelpaa siis  $-3x + 8 = x + 4$ .

- b) Kohdassa a löydettiin jo yhtälö  $2x + 7 = x + 4$ , jonka ratkaisu on  $x = -3$ .

Vastaus: a)  $-3x + 8 = x + 4$  (II ja III)

b)  $2x + 7 = x + 4$  (I ja III)

314. a)  $-(2x - 5) = x + 1$

$$-2x + 5 = x + 1$$

$$-2x - x = 1 - 5$$

$$-3x = -4 \quad \| : (-3)$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

1	$-(2x-5)=x+1$
<input type="radio"/>	Ratkaise: $\left\{ x = \frac{4}{3} \right\}$

b)  $0,2(3x + 1) = 5 \quad \| \cdot 10$

$$2(3x + 1) = 50 \quad \| : 2$$

$$3x + 1 = 25$$

$$3x = 24 \quad \| : 3$$

$$x = 8$$



$$\begin{aligned}
 0,2(3x+1) &= 5 \\
 0,6x+0,2 &= 5 \\
 0,6x &= 5-0,2 \\
 0,6x &= 4,8 && \parallel :0,6 \\
 x &= \frac{4,8}{0,6} \\
 x &= \frac{48}{6} \\
 x &= 8
 \end{aligned}$$

2	$0.2(3x+1)=5$
<input type="radio"/>	Ratkaise: $\{x = 8\}$

c)  $\frac{3x-1}{2} - 2 = \frac{x}{5} \quad \parallel \cdot 10$

$$\begin{aligned}
 10 \cdot \left( \frac{3x-1}{2} - 2 \right) &= 10 \cdot \frac{x}{5} \\
 5(3x-1) - 20 &= 2x \\
 15x - 5 - 20 &= 2x \\
 15x - 25 &= 2x \\
 13x &= 25 && \parallel :13 \\
 x &= \frac{25}{13} \\
 x &= 1\frac{12}{13}
 \end{aligned}$$

TAI

$$\begin{aligned}
 \overset{5)}{\frac{3x-1}{2}} - \overset{10)}{2} &= \overset{2)}{\frac{x}{5}} && \parallel \cdot 10 \\
 \frac{5(3x-1)}{10} - \frac{20}{10} &= \frac{2x}{10} && \parallel \cdot 10 \\
 5(3x-1) - 20 &= 2x \\
 15x - 5 - 20 &= 2x \\
 15x - 25 &= 2x \\
 13x &= 25 && \parallel :13 \\
 x &= \frac{25}{13} \\
 x &= 1\frac{12}{13}
 \end{aligned}$$

3 ○	$(3x-1)/2-2=x/5$ Ratkaise: $\left\{ x = \frac{25}{13} \right\}$
--------	--

Vastaus: a)  $x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

b)  $x = 8$

c)  $x = \frac{25}{13} = 1\frac{12}{13}$

A315. a)  $\frac{2x}{5} - 1 = 3$

$$\frac{2x}{5} - 1 = 3 \quad \parallel \cdot 5$$

$$2x - 5 = 15$$

$$2x = 20 \quad \parallel : 2$$

$$x = 10$$

b)  $\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} = 4 \quad \parallel \cdot 6$

$$6 \cdot \left( \frac{x}{2} - \frac{2x}{3} \right) = 6 \cdot 4$$

$$3x - 2 \cdot 2x = 24$$

$$3x - 4x = 24$$

$$-x = 24 \quad \parallel : (-1)$$

$$x = -24$$

TAI

$$^3) \frac{x}{2} - ^2) \frac{2x}{3} = 4$$

$$\frac{3x}{6} - \frac{4x}{6} = 4 \quad \parallel \cdot 6$$

$$3x - 4x = 24$$

$$-x = 24 \quad \parallel : (-1)$$

$$x = -24$$

$$\text{c) } \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 1 = x \quad \parallel \cdot 8$$

$$4x + 2x + x + 8 = 8x$$

$$7x + 8 = 8x$$

$$8 = x$$

$$x = 8$$

TAI

$$^4) \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 1 = x$$

$$\frac{4x}{8} + \frac{2x}{8} + \frac{x}{8} + 1 = x \quad \parallel \cdot 8$$

$$4x + 2x + x + 8 = 8x$$

$$7x + 8 = 8x$$

$$8 = x$$

$$x = 8$$

Vastaus: **a)**  $x = 10$

**b)**  $x = -24$

**c)**  $x = 8$

$$\text{A316. a) } \frac{x-5}{3} = \frac{x}{4} \quad \parallel \cdot 12$$

$$4(x-5) = 3x$$

$$4x - 20 = 3x$$

$$x = 20$$

TAI

$$^4) \frac{x-5}{3} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{4(x-5)}{12} = \frac{3x}{12} \quad \parallel \cdot 12$$

$$4(x-5) = 3x$$

$$4x - 20 = 3x$$

$$x = 20$$

TAI

$$\frac{x-5}{3} = \frac{x}{4} \quad \parallel \text{kerrotaan ristiin}$$

$$4(x-5) = 3x$$

$$4x - 20 = 3x$$

$$x = 20$$

$$\text{b) } \frac{x-2}{4} + 3 = \frac{2x+1}{3} \quad \parallel \cdot 12$$

$$3(x-2) + 36 = 4(2x+1)$$

$$3x - 6 + 36 = 8x + 4$$

$$3x + 30 = 8x + 4$$

$$-5x = -26 \quad \parallel : (-5)$$

$$x = \frac{26}{5}$$

$$x = 5\frac{1}{5}$$

TAI

$${}^3) \frac{x-2}{4} + 3 = {}^4) \frac{2x+1}{3}$$

$$\frac{3(x-2)}{12} + 3 = \frac{4(2x+1)}{3} \quad \parallel \cdot 12$$

$$3(x-2) + 36 = 4(2x+1)$$

$$3x - 6 + 36 = 8x + 4$$

$$3x + 30 = 8x + 4$$

$$-5x = -26 \quad \parallel : (-5)$$

$$x = \frac{26}{5}$$

$$x = 5\frac{1}{5}$$

$$\text{c) } 4\left(x + \frac{2}{3}\right) = 8 \quad \parallel : 4$$

$$x + \frac{2}{3} = 2$$

$$x = 2 - \frac{2}{3}$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

TAI

$$\begin{aligned}4\left(x + \frac{2}{3}\right) &= 8 \\4x + \frac{8}{3} &= \overset{3)}{\frac{8}{1}} \\4x &= \frac{24}{3} - \frac{8}{3} \\4x &= \frac{16}{3} \quad \parallel : 4 \\x &= \frac{16}{3} : 4 \\x &= \frac{\overset{4}{16}}{3} \cdot \frac{1}{\underset{1}{4}} \\x &= \frac{4}{3} \\x &= 1\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Vastaus: **a)**  $x = 20$    **b)**  $x = \frac{26}{5} = 5\frac{1}{5}$    **c)**  $x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

**317.** Toisella rivillä ei ole noudatettu laskujärjestystä, vaan on laskettu vähennyslasku  $1 - 3$  ennen kertolaskua  $-3 \cdot (x + 3)$

Kolmannella rivillä on unohdettu kertoa luku 3 luvulla  $-2$ .

Neljännellä rivillä lukuun 3 on lisätty luku 3, kun piti vähentää.

Viimeisellä rivillä on unohdettu kertoimen  $-2$  merkki.

Yhtälön ratkaisu:

$$\begin{aligned}1 - 3(x + 3) &= 5 \\1 - 3x - 9 &= 5 \\-3x - 8 &= 5 \\-3x &= 5 + 8 \\-3x &= 13 \quad \parallel : (-3) \\x &= -\frac{13}{3} \\x &= -4\frac{1}{3}\end{aligned}$$

TAI

$$\begin{aligned}1 - 3(x + 3) &= 5 \\ -3(x + 3) &= 5 - 1 \\ -3(x + 3) &= 4 \quad \| : (-3) \\ x + 3 &= -\frac{4}{3} \\ x &= -\frac{4}{3} - 3 \\ x &= -1\frac{1}{3} - 3 \\ x &= -4\frac{1}{3} \\ \text{Vastaus: } x &= -\frac{13}{3} = -4\frac{1}{3}\end{aligned}$$

- 318. a)** Tavassa 1 sulkeet kerrotaan ensin auki, ja yhtälö ratkaistaan sitten tavalliseen tapaan.  
Tavassa 2 kerroin jaetaan ensin pois, ja yhtälö ratkaistaan sitten tavalliseen tapaan.

**b)** Tapa1:

$$\begin{aligned}7(1 - 2x) &= 35 \\ 7 - 14x &= 35 \\ -14x &= 28 \quad \| : (-14) \\ x &= -2\end{aligned}$$

Tapa2:

$$\begin{aligned}7(1 - 2x) &= 35 \quad \| : 7 \\ 1 - 2x &= 5 \\ -2x &= 4 \quad \| : (-2) \\ x &= -2\end{aligned}$$

Vastaus: **a)** –      **b)** –

**A319. a)**

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2} - \frac{2x-3}{3} &= 0 \quad \| \cdot 6 \\ 3(x+1) - 2(2x-3) &= 0 \\ 3x+3 - 4x+6 &= 0 \\ -x+9 &= 0 \\ 9 &= x \\ x &= 9\end{aligned}$$

TAI

$$\begin{aligned} & {}^3) \frac{x+1}{2} - {}^2) \frac{2x-3}{3} = 0 \\ & \frac{3x+3}{6} - \frac{4x-6}{6} = 0 \quad \parallel \cdot 6 \\ & (3x+3) - (4x-6) = 0 \\ & 3x+3-4x+6 = 0 \\ & -x+9 = 0 \\ & 9 = x \\ & x = 9 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{x}{3} = 1 - \frac{3x+1}{6} \quad \parallel \cdot 6$$

$$2x = 6 - (3x+1)$$

$$2x = 6 - 3x - 1$$

$$5x = 5 \quad \parallel : 5$$

$$x = 1$$

TAI

$$\begin{aligned} & {}^2) \frac{x}{3} = 1 - \frac{3x+1}{6} \\ & \frac{2x}{6} = 1 - \frac{3x+1}{6} \quad \parallel \cdot 6 \end{aligned}$$

$$2x = 6 - (3x+1)$$

$$2x = 6 - 3x - 1$$

$$5x = 5 \quad \parallel : 5$$

$$x = 1$$

Vastaus: **a)**  $x = 9$     **b)**  $x = 1$

## SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

**A320. a)** Sijoitetaan  $x = \frac{2}{3}$  yhtälöön ja ratkaistaan  $a$ .

$$a \cdot \frac{2}{3} + 4 = 6 \cdot \frac{2}{3} - 1$$

$$a \cdot \frac{2}{3} + 4 = 4 - 1$$

$$a \cdot \frac{2}{3} + 4 = 3$$

$$a \cdot \frac{2}{3} = -1 \quad \| \cdot \frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

$$a = -1\frac{1}{2}$$

**b)** Sijoitetaan  $x = -2$  yhtälöön ja ratkaistaan  $t$ .

$$t(-2-2) = t - t \cdot (-2) + 1$$

$$t \cdot (-4) = t + 2t + 1$$

$$-4t = 3t + 1$$

$$-7t = 1 \quad \| :(-7)$$

$$t = -\frac{1}{7}$$

Vastaus: **a)**  $a = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$       **b)**  $t = -\frac{1}{7}$

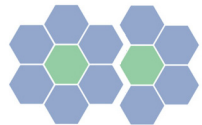
**A321. a)** Ensimmäisessä kuviossa on 6 sinistä kuusikulmoita.

Toisessa kuviossa on 10 sinistä kuusikulmoita.

Kolmannessa kuviossa on 14 sinistä kuusikulmoita.

Jokaisessa uudessa kuviossa edellisen viereen tulee aina yksi uusi vihreä ja neljä sinistä.

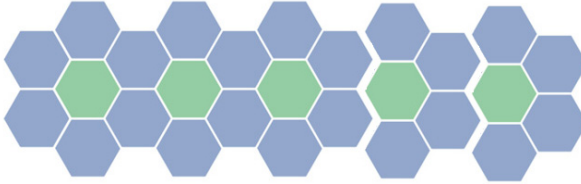
Neljännessä kuviossa on siis  $14 + 4 = 18$  sinistä kuusikulmoita.



kuvio 1  $\rightarrow$  kuvio 2



Viidennessä kuviossa on  $18 + 4 = 22$  sinistä kuusikulmoita.



- b) Luetellaan uudestaan kohdan a kuusikulmioiden lukumäärät, ja etsitään niistä säännönmukaisuutta.

$$\text{kuvio 1: } 6 = 6 + 0 = 6 + 0 \cdot 4$$

$$\text{kuvio 2: } 10 = 6 + 4 = 6 + 1 \cdot 4$$

$$\text{kuvio 3: } 14 = 6 + 8 = 6 + 2 \cdot 4$$

$$\text{kuvio 4: } 18 = 6 + 12 = 6 + 3 \cdot 4$$

$$\text{kuvio 5: } 22 = 6 + 16 = 6 + 4 \cdot 4$$

Kuviossa  $x$  on siis  $6 + (x - 1) \cdot 4 = 6 + 4x - 4 = 4x + 2$  sinistä kuusikulmiota.

- c) Kuvion  $x$  sinisten kuusikulmioiden lukumäärä saadaan lausekkeella  $2 + 4x$ , ja näitä kuusikulmioita on oltava 150, Saadaan siis yhtälö  $2 + 4x = 150$ .

$$2 + 4x = 150$$

$$4x = 148 \quad \parallel : 4$$

$$x = 37$$

Vastaus: a) 6, 10, 14, 18 ja 22      b)  $4x + 2$       c) 37:ssä kuviossa

A322. a)  $s = vt$

$$vt = s \quad \parallel : t$$

$$v = \frac{s}{t}$$

b)  $E = \frac{1}{2}mv^2$

$$\frac{1}{2}mv^2 = E \quad \parallel \cdot \frac{2}{v^2}$$

$$m = \frac{2E}{v^2}$$

c)  $v = v_0 + at$

$$v_0 + at = v$$

$$at = v - v_0 \quad \parallel : a$$

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

d)  $c = \frac{5}{9}(f - 32)$

$$\frac{5}{9}(f - 32) = c \quad \parallel \cdot \frac{9}{5}$$

$$f - 32 = \frac{9}{5}c$$

$$f = \frac{9}{5}c + 32$$

Vastaus: a)  $v = \frac{s}{t}$    b)  $m = \frac{2E}{v^2}$    c)  $t = \frac{v - v_0}{a}$    d)  $f = \frac{9}{5}c + 32$

A323. a) Kun  $a = -2$ :

$$3x + 1 = -2$$

$$3x = -3 \quad \parallel : 3$$

$$x = -1$$

Kun  $a = 0$ :

$$3x + 1 = 0$$

$$3x = -1 \quad \parallel : 3$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Kun  $a = 4$ :

$$3x + 1 = 4$$

$$3x = 3 \quad \parallel : 2$$

$$x = 1$$

b)  $3x + 1 = a$

$$3x = a - 1 \quad \parallel : 3$$

$$x = \frac{a - 1}{3}$$

Vastaus: **a)**  $x = -1, x = -\frac{1}{3}, x = 1$     **b)**  $x = \frac{a-1}{3}$

## 3.2 Yhtälöiden sovelluksia

### LUO PERUSTA

**A324.** Piiri on sivujen pituuksien summa.

$$2x + x + 1 + 2x + x + 1 = 6x + 2.$$

$$6x + 2 = 32$$

$$6x = 30 \quad || : 6$$

$$x = 5$$

Lasketaan sivujen pituudet.

$$x + 1: \quad 5 + 1 = 6$$

$$2x: \quad 2 \cdot 5 = 10$$

Vastaus: 6 ja 10

**A325. a)**  $x + 9 = 5$

$$x = -4$$

**b)**  $(x - 7) \cdot 2 = 36 \quad || : 2$

$$x - 7 = 18$$

$$x = 25$$

TAI

$$(x - 7) \cdot 2 = 36$$

$$2x - 14 = 36$$

$$2x = 50 \quad || : 2$$

$$x = 25$$

**c)**  $x \cdot 4 + 4 = -8$

$$4x + 4 = -8$$

$$4x = -12 \quad || : 4$$

$$x = -3$$

Vastaus: **a)**  $x = -4$  **b)**  $x = 25$  **c)**  $x = -3$

**A326. a)** Neliön piiri:  $4 \cdot (x + 1) = 4x + 4.$

Säännöllisen viisikulmion piiri:  $5 \cdot x = 5x.$

Piirit ovat samat.

$$\begin{aligned}4x + 4 &= 5x \\4 &= x \\x &= 4\end{aligned}$$

**b)** Neliön sivun pituus on  $x + 1 = 4 + 1 = 5$ .

Vastaus: **a)**  $4x + 4 = 5x, x = 4$     **b)** Neliön sivun pituus on 5.

**A327. a)**  $3,90 + 15 \cdot 0,99 = 18,75$   
Matka maksaa 18,75 €

**b)**  $3,90 + x \cdot 0,99 = 3,90 + 0,99x$

**c)**  $3,90 + 0,99x = 20$   
 $0,99x = 16,1 \quad \| :0,99$   
 $x = 16,262\dots$

20 € riittää noin 16 km matkaan

Vastaus: **a)** 18,75 €    **b)**  $3,90 + 0,99x$     **c)**  $3,90 + 0,99x = 20$ , 16 km

**A328. a)**  $x + 350$

**b)**  $x - 50$

**c)**  $3x$

**d)**  $x + 350 + x - 50 + 3x = 1295$   
 $5x + 300 = 1295$   
 $5x = 995 \quad \| :5$   
 $x = 199$

Tietokone:  $199 + 350 = 549$ .

Kello:  $199 - 50 = 149$

Televisio:  $3 \cdot 199 = 597$

Vastaus: **a)**  $x + 350$     **b)**  $x - 50$     **c)**  $3x$     **d)**

$x + 350 + x - 50 + 3x = 1295$ ;  $x = 199$ , tietokone maksaa 549 €, kello maksaa 149 € ja televisio maksaa 597 €

**A329. a)** Merkitään lyhyemmän osuuden pituutta  $x$ , jolloin pitempi osa on  $x + 5$ .

$$x + x + 5 = 42$$

$$2x = 37 \quad \parallel : 2$$

$$x = 18,5$$

Osat ovat siis 18,5 m ja  $18,5 + 5 = 23,5$  m.

**b)** Merkitään osien pituuksia  $3x$  ja  $4x$ .

$$3x + 4x = 42$$

$$7x = 42 \quad \parallel : 7$$

$$x = 6$$

Osien pituudet ovat  $3 \cdot 6 = 18$  m ja  $4 \cdot 6 = 24$  m

Vastaus: **a)** 18,5 m ja 23,5 m. **b)** 18 m ja 24 m

**A330. a)**  $\frac{x}{3} - x = 2 \quad \parallel \cdot 3$

$$x - 3x = 6$$

$$-2x = 6 \quad \parallel : (-2)$$

$$x = -3$$

**b)**  $2x + 2(3 - x) = 6$

$$2x + 6 - 2x = 6$$

$$6 = 6$$

Kaikki reaalityyppiset  $x$  toteuttavat yhtälön.

**c)**  $3x - (5 + x) = 2x - 4$

$$3x - (5 + x) = 2x - 4$$

$$3x - 5 - x = 2x - 4$$

$$2x - 5 = 2x - 4$$

$$-5 = 4$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus: **a)**  $x = -3$  **b)** Kaikki luvut toteuttavat yhtälön

**c)** Yhtälö ei toteudu millään  $x$ :n arvolla.

## VAHVISTA OSAAMISTA

**A331. a)**  $x \cdot 5 - 4 = 11$   
 $5x - 4 = 11$   
 $5x = 15 \quad \parallel :3$   
 $x = 3$

**b)**  $\frac{x}{3} + 1 = 6$   
 $\frac{x}{3} + 1 = 6$   
 $\frac{x}{3} = 5 \quad \parallel \cdot 3$   
 $x = 15$

**c)**  $\frac{x}{2} = \frac{x}{3} + 10 \quad \parallel \cdot 6$   
 $3x = 2x + 60$   
 $x = 60$   
TAI  
 $^3) \frac{x}{2} = \frac{x}{3} + 10$   
 $\frac{3x}{6} = \frac{2x}{6} + 10 \quad \parallel \cdot 6$   
 $3x = 2x + 60$   
 $x = 60$

Vastaus: **a)**  $5x - 4 = 11, x = 3$     **b)**  $\frac{x}{3} + 1 = 6, x = 15$

**c)**  $\frac{x}{2} = \frac{x}{3} + 10, x = 60$

**332.** Merkitään Emilian lähettämien viestien lukumäärää  $x$ .

Sofia:  $x + 20$

Emilia:  $x$

Olivia:  $2(x + 20)$

1

$$x + 20 + x + 2(x + 20) = 200$$



Ratkaise: **{x = 35}**

Sofia lähetti  $35 + 20 = 55$  viestiä, Emilia 35 viestiä ja Olivia  $2 \cdot 55 = 110$  viestiä.

Vastaus: Sofia lähetti 55, Emilia 35 ja Olivia 110.

333. Merkitään lyhyemmän sivun pituutta  $x$ , jolloin pitempi sivu on  $x + 13$ .  
Piiri on siis  $x + x + 13 + x + x + 13 = 86$ .  
Tätä lauseketta vastaa yhtälö IV.

Yhtälö V vastaa piirin puolikasta. Eli sivun pituudet saadaan myös siitä.

Jos taas merkitään pidemmän sivun pituutta  $x$ , niin lyhyemmän sivun pituus on  $x - 13$ .

Nyt piiri on siis  $x + x - 13 + x + x - 13 = 86$ .

Tätä lauseketta vastaa yhtälö III

Yhtälössä I on vasemmalla puolella piirin puolikas ja oikealla koko piiri. Siitä ei saada sivujen pituuksia.

Yhtälössä II vasemmalla puolella on muuten piiri, mutta siitä puuttuu yhden kerran 13. Yhtälönoikealla puolella on koko piiri. Tämä yhtälö ei kelpaa.

1	$2x + 2 \cdot (x + 13) = 86$
○	Ratkaise: $\{x = 15\}$

Sivujen pituudet ovat siis 15 m ja  $15 + 13 = 28$  m.

Vastaus: III, IV ja V; sivut ovat 15 m ja 28 m



**A334. a)**  $3(x-1) = \frac{x}{2}$

$$3x - 3 = \frac{x}{2} \quad \parallel \cdot 2$$

$$6x - 6 = x$$

$$5x = 6 \quad \parallel : 5$$

$$x = \frac{6}{5}$$

$$x = 1\frac{1}{5}$$

**b)**  $\frac{x}{2} + \frac{1-2x}{4} = \frac{1}{2} \quad \parallel \cdot 4$

$$2x + 1 - 2x = 2$$

$$1 = 2$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

TAI

$$^2) \frac{x}{2} + \frac{1-2x}{4} = ^2) \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x}{4} + \frac{1-2x}{4} = \frac{2}{4} \quad \parallel \cdot 4$$

$$2x + 1 - 2x = 2$$

$$1 = 2$$

**c)**  $4(x-2) - 3x = x - 8$

$$4x - 8 - 3x = x - 8$$

$$x - 8 = x - 8$$

$$-8 = -8$$

Kaikki reaalityluvut  $x$  toteuttavat yhtälön.

Vastaus: **a)**  $x = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$  **b)** Yhtälö ei toteudu millään  $x$ :n arvolla.

**c)** Kaikki luvut toteuttavat yhtälön.

**335. a)** pienin ryhmä:  $x$   
keskimmäinen ryhmä:  $x + 2$   
suurin ryhmä:  $x + 5$   
 $x + x + 2 + x + 5 = 58$

1  $x+x+2+x+5=58$   
○ Ratkaise:  $\{x = 17\}$

b)

pienin ryhmä: 17  
keskimmäinen ryhmä:  $17 + 2 = 19$   
suurin ryhmä:  $17 + 5 = 22$

Vastaus: a)  $x + x + 2 + x + 5 = 58$

b) 17, 19 ja 22

336. a)

1 Ratkaise( $41=0.43x-27$ )  
○  $\approx \{x = 158.14\}$

Nainen oli noin 158 cm pitkä.

b)

2  $0.45 \cdot 175 - 31$   
○  $\approx 47.75$

Mallin mukaan 175 cm pitkän miehen sääriluun on noin 48 cm pitkä.  
Mallin mukaan kyseessä ei ole tämän miehen sääriluun.

Vastaus: a) 158 cm

b) Ei ole.

337. Kaikissa kohdissa kelpaavia ratkaisuja on äärettömän monta.

- a) Esimerkiksi yhtälön  $x - 3 = 0$  ratkaisu on  $x = 3$ .  
b) Esimerkiksi yhtälöllä  $x + 1 = x + 2$  ei ole ratkaisua.  
c) Esimerkiksi yhtälö  $x + 1 = x + 1$  toteutuu kaikilla luvuilla  $x$ .

Vastaus: a)  $x - 3 = 0$  b)  $x + 1 = x + 2$  c)  $x + 1 = x + 1$

338. Merkitään perinnön suuruutta  $x$ .

Perintö saadaan lausekkeella  $\frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 15000$ .

1

$$x/4+x/4+x/3+15000=x$$

○

Ratkaise:  $\{x = 90000\}$

Lapset saavat

2

$$\{x = 90000\}/4$$

○

$$\rightarrow \left\{ \frac{1}{4} x = 22500 \right\}$$

Avustusjärjestö saa

3

$$\{x = 90000\}/3$$

○

$$\rightarrow \left\{ \frac{1}{3} x = 30000 \right\}$$

Kummitytär saa 15000.

Vastaus: lapset 22 500 €, avustusjärjestö 30 000 € ja kummitytär 15 000 €

339. Merkitään Tuomaksen rahamäärää  $T$ .

Tilanne aluksi:

Tuomas:  $T$

Laura:  $50 - T$

Laura antaa Tuomakselle summan  $T \rightarrow$

Tuomas:  $T + T = 2T$

Laura:  $50 - T - T = 50 - 2T$

Nyt Tuomaksella on 10 euroa vähemmän kuin Lauralla, eli

$$2T = 50 - 2T - 10.$$

1	Ratkaise( $2T=50-2T-10, T$ )
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{T = 10\}$

Tuomas:  $2T = 20$

Laura:  $50 - 2T = 50 - 20 = 30$

Vastaus: Tuomas 20 € ja Laura 30 €.

340. Leo:  $12v \rightarrow 12x$

Linus:  $7v \rightarrow 7x$

Johannes:  $3v \rightarrow 3x$

1	Ratkaise( $12x+7x+3x=50$ )
<input type="radio"/>	$\rightarrow \left\{x = \frac{25}{11}\right\}$
2	$\{x = 25 / 11\}$
<input type="radio"/>	$\approx \{x = 2.2727\}$
3	$12*\{x = 2.272727272727\}$
<input type="radio"/>	$\approx \{12 x = 27.2727\}$
4	$7*\{x = 2.272727272727\}$
<input type="radio"/>	$\approx \{7 x = 15.9091\}$
5	$3*\{x = 2.272727272727\}$
<input type="radio"/>	$\approx \{3 x = 6.8182\}$

Leo: 27,30 €

Linus: 15,90 €

Johannes: 6,80 €

Vastaus: Leo 27,30 €, Linus 15,90 € ja Johannes 6,80 €

341.

1 <input type="radio"/>	$(x+x+3+2x-1)/3=11$ Ratkaise: $\left\{x = \frac{31}{4}\right\}$
2 <input type="radio"/>	$\{x = 31/4\}+3$ $\rightarrow \left\{x + 3 = \frac{43}{4}\right\}$
3 <input type="radio"/>	$2*\{x = 31/4\}-1$ $\rightarrow \left\{2x - 1 = \frac{29}{2}\right\}$

Vastaus:  $\frac{31}{4}$ ,  $\frac{43}{4}$  ja  $\frac{29}{2}$

### SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

342. Merkitään kymmeniä osoittavaa numeroa  $x$ . Nyt luku on  $10x + 4$ . Luvun numeroiden  $x$  ja 4 summa on  $x + 4$ .

1 <input type="radio"/>	$x+4=(10x+4)/4$ Ratkaise: $\{x = 2\}$
2 <input type="radio"/>	$10\{x = 2\}+4$ $\rightarrow \{10x + 4 = 24\}$

Vastaus:  $x + 4 = \frac{10x + 4}{4}$ , tuntematon numero  $x = 2$ . Luku on 24.

343. Luku on jaollinen kolmella jos sen tekijä on 3, eli jos luku on muotoa  $3x$ , jossa  $x$  on kokonaisluku.  
Merkitään pienintä kysytyistä luvuista  $3x$ , jolloin seuraava on  $3x + 3$  ja sitä seuraava  $3x + 6$ .

<input type="radio"/>	$3x + 3x + 3 + 3x + 6 = 126$
<input type="radio"/>	Ratkaise: $\{x = 13\}$
<input type="radio"/>	$3\{x = 13\}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{3x = 39\}$

Vastaus: 39

344. Pikkuveli oli jo kulkenut 1,5 km matkan ennen kuin isovelji lähtee matkaan. Tämän jälkeen molemmat kulkevat saman ajan  $t$  tuntia. Yhteensä molemmat kulkevat saman matkan.

Pikkuveli kulkee ensin matkan 1,5 km ja tämän jälkeen nopeudella 5 km/h matkan  $5t$ . (matka saadaan kertomalla matkaan kulunut aika nopeudella)  
Pikkuveljen kulkema matka on siis yhteensä  $1,5 + 5t$ .  
Isoveli kulkee nopeudella 15 km/h matkan  $15t$ .

<input type="radio"/>	Ratkaise( $1,5 + 5t = 15t$ )
<input type="radio"/>	$\approx \{t = 0,15\}$
<input type="radio"/>	$0,15 \cdot 60$
<input type="radio"/>	$\approx 9$

Aikaa kuluu siis 0,15 tuntia eli 9 minuuttia.

Vastaus: 9 minuutin kuluttua

TAI

Pikkuveli oli jo kulkenut 1,5 km matkan ennen kuin isovelji lähtee matkaan.

Siitä kun isovelji lähtee matkaan siihen hetkeen että he kohtaavat, molemmat kulkevat saman ajan.

Pikkuveli kulkee matkan  $x$  nopeudella 5 km/h. Hänen kulkemansa aika on siis  $\frac{x}{5}$ . (Aika saadaan jakamalla matka nopeudella.)

Isovelji kulkee matkan  $x + 1,5$  nopeudella 15 km/h, eli hänen kulkemansa aika on  $\frac{x+1,5}{15}$ .

1	Ratkaise( $x/5=(x+1.5)/15$ ) $\rightarrow \left\{ x = \frac{3}{4} \right\}$
2	$\{x = 3 / 4\}$ $\approx \{x = \mathbf{0.75}\}$

Pikkuveli kulkee matkan 0,75 km nopeudella 5 km/h, eli aikaa kuluu

3	$0.75/5$ $\approx \mathbf{0.15}$
4	$0.15*60$ $\approx \mathbf{9}$

9 minuuttia.

Vastaus: 9 minuutin kuluttua

**A345.** Sijoitetaan  $x = 1$  yhtälöön.

$$2(1 + a) = 2(a + 2 \cdot 1) - (3 \cdot 1 - 1)$$

$$2 + 2a = 2(a + 2) - 2$$

$$2 + 2a = 2a + 4 - 2$$

$$2 + 2a = 2a + 2$$

$$2 = 2$$

Tämä yhtälö toteutuu vakion  $a$  arvosta riippumatta. Näin ollen  $x = 1$  on yhtälön ratkaisu, oli luku  $a$  mikä tahansa.

Vastaus: –



## 3.3 Potenssiyhtälö

### LUO PERUSTA

- X346. a)**  $3^2 = 9$ , joten  $x = 3$  on yhtälön  $x^2 = 9$  ratkaisu.  
 $(-3)^2 = 9$ , joten  $x = -3$  on yhtälön  $x^2 = 9$  ratkaisu.
- b)**  $3^3 = 27$ , joten  $x = 3$  on yhtälön  $x^3 = 27$  ratkaisu.  
 $(-3)^3 = -27$ , joten  $x = -3$  ei ole yhtälön  $x^3 = 27$  ratkaisu.
- c)**  $3^2 = 9$ , joten  $x = 3$  ei ole yhtälön  $x^2 = -9$  ratkaisu.  
 $(-3)^2 = 9$ , joten  $x = -3$  ei ole yhtälön  $x^2 = -9$  ratkaisu.
- d)**  $3^3 = 27$ , joten  $x = 3$  ei ole yhtälön  $x^3 = -27$  ratkaisu.  
 $(-3)^3 = -27$ , joten  $x = -3$  on yhtälön  $x^3 = -27$  ratkaisu.

Vastaus: **a)** Sekä luku  $x = 3$  että  $x = -3$  ovat ratkaisuja.

**b)** Vain luku  $x = 3$  on ratkaisu.

**c)** Kumpikaan luvuista ei ole ratkaisu.

**d)** Vain luku  $x = -3$  on ratkaisu.

**A347. a)**  $x^2 = 49$   
 $x = \sqrt{49}$  tai  $x = -\sqrt{49}$   
 $x = 7$              $x = -7$

**b)**  $x^2 = 1$   
 $x = \sqrt{1}$  tai  $x = -\sqrt{1}$   
 $x = 1$              $x = -1$

**c)**  $x^3 = 125$   
 $x = \sqrt[3]{125}$   
 $x = 5$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^3 &= 0 \\ x &= \sqrt[3]{0} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Vastaus: **a)**  $x = 7$  tai  $x = -7$  **b)**  $x = 1$  tai  $x = -1$  **c)**  $x = 5$   
**d)**  $x = 0$

$$\begin{aligned} \text{A348. a) } x^2 &= 7 \\ x &= \sqrt{7} \text{ tai } x = -\sqrt{7} \end{aligned}$$

**b)**  $x^2 = -81$   
Minkään luvun toinen potenssi ei ole negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

$$\begin{aligned} \text{c) } x^3 &= -27 \\ x &= \sqrt[3]{-27} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{cbirt}(-27) \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^3 &= 0,008 \\ x &= \sqrt[3]{0,008} \\ x &= 0,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{cbirt}(0.008) \\ &= 0,2 \end{aligned}$$

Vastaus: **a)**  $x = \sqrt{7}$  tai  $x = -\sqrt{7}$  **b)** Ei ratkaisuja. **c)**  $x = -3$   
**d)**  $x = 0,2$

**A349. a)**  $x^2 + 6 = 295$

$$x^2 = 289$$

$$x = \sqrt{289} \text{ tai } x = -\sqrt{289}$$

$$x = 17 \quad x = -17$$

**b)**  $-x^2 + 4 = 12$

$$-x^2 = -16 \quad \parallel : (-1)$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16} \text{ tai } x = -\sqrt{16}$$

$$x = 4 \quad x = -4$$

**c)**  $x^3 - 4 = 212$

$$x^3 = 216$$

$$x = \sqrt[3]{216}$$

$$x = 6$$

Vastaus: **a)**  $x = 17$  tai  $x = -17$     **b)**  $x = 4$  tai  $x = -4$     **c)**  $x = 6$

**A350. a)**  $2x^2 - 3 = 47$

$$2x^2 = 50 \quad \parallel : 2$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25} \text{ tai } x = -\sqrt{25}$$

$$x = 5 \quad x = -5$$

**b)**  $-3x^2 + 250 = -50$

$$-3x^2 = -300 \quad \parallel : (-3)$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \sqrt{100} \text{ tai } x = -\sqrt{100}$$

$$x = 10 \quad x = -10$$

**c)**  $6 + 4x^3 = 2$

$$4x^3 = -4 \quad \parallel : 4$$

$$x^3 = -1$$

$$x = \sqrt[3]{-1}$$

$$x = -1$$

Vastaus: **a)**  $x = 5$  tai  $x = -5$     **b)**  $x = 10$  tai  $x = -10$     **c)**  $x = -1$

**A351. a)**  $\frac{x^2}{2} = 7$      $\| \cdot 2$

$$x^2 = 14$$

$$x = \sqrt{14} \text{ tai } x = -\sqrt{14}$$

**b)**  $3x^3 + 2 = -22$

$$3x^3 = -24 \quad \| : 3$$

$$x^3 = -8$$

$$x = \sqrt[3]{-8}$$

$$x = -2$$

**c)**  $\frac{x^2}{3} - 12 = 0$

$$\frac{x^2}{3} = 12 \quad \| \cdot 3$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} \text{ tai } x = -\sqrt{36}$$

$$x = 6 \quad x = -6$$

Vastaus: **a)**  $x = \sqrt{14}$  tai  $x = -\sqrt{14}$     **b)**  $x = -2$     **c)**  $x = 6$  tai  $x = -6$

**A352.**  $4x^2 - 13 = -1$

$$4x^2 = 12 \quad \| : 4$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \quad \text{tai } x = -\sqrt{3}$$

$$x = 1,732\dots \quad x = -1,732\dots$$

$$x \approx 1,73 \quad x \approx -1,73$$

Vastaus:  $x = \sqrt{3} \approx 1,73$  tai  $x = -\sqrt{3} \approx -1,73$

**A353. a)** Suorakulmion pinta-ala lasketaan kertomalla kanta  $2x$  korkeudella  $x$ .

$$2x \cdot x = 121$$

$$2x^2 = 122 \quad \parallel : 2$$

$$x^2 = 61$$

$$x = \sqrt{61} \text{ tai } x = -\sqrt{61}$$

Korkeus ei voi olla negatiivinen, joten on oltava  $x = \sqrt{61}$ .

**b)** Kolmion pinta-ala on puolet kannan  $4x$  ja korkeuden  $3x$  tulosta.

$$\frac{4x \cdot 3x}{2} = 120$$

$$6x^2 = 120 \quad \parallel : 6$$

$$x^2 = 20$$

$$x = \sqrt{20} \quad \text{tai } x = -\sqrt{20}$$

$$x = 4,472\dots \quad x = -4,472\dots$$

Korkeus  $3x$  ei voi olla negatiivinen, joten täytyy olla  $x = 4,472\dots$

Nyt  $3x = 3 \cdot 4,472\dots = 13,41\dots \approx 13,4$  cm

Vastaus: **a)**  $\sqrt{60}$       **b)** 13,4 cm

## VAHVISTA OSAAMISTA

**A354. a)**  $x^2 = 6$

$$x = \sqrt{6} \quad \text{tai } x = -\sqrt{6}$$

$$x = 2,4494\dots \quad x = -2,4494\dots$$

$$x \approx 2,449 \quad x \approx -2,449$$

**b)**  $(-2,449)^2 = 5,997601 \neq 6$  ja  $2,449^2 = 5,997601 \neq 6$

Luvut  $-2,449$  ja  $2,449$  eivät siis ole yhtälön  $x^2 = 6$  ratkaisuja.

Vastaus: **a)**  $x = \sqrt{6} \approx 2,449$  tai  $x = -\sqrt{6} \approx -2,449$  **b)** eivät ole

**A355. a)** Luvun  $x$  neliön  $x^2$  vastaluku on  $-x^2$ .

Tätä vastaa siis yhtälö VI.

$$-x^2 = 9 \quad \| :(-1)$$

$$x^2 = -9$$

ei ratkaisua

- b)** Luvun  $x$  vastaluvun  $-x$  neliö on  $(-x)^2$ .

Tätä vastaa siis yhtälö I

$$(-x)^2 = 9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} \text{ tai } x = -\sqrt{9}$$

$$x = 3 \quad x = -3$$

- c)** Lukujen  $x$  ja 3 neliöiden  $x^2$  ja  $3^2$  erotus on  $x^2 - 3^2$ .

Tätä vastaa siis yhtälö IV

$$x^2 - 3^2 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} \text{ tai } x = -\sqrt{9}$$

$$x = 3 \quad x = -3$$

Vastaus: **a)** VI, ei ratkaisua

**b)** I,  $x = 3$  tai  $x = -3$

**c)** IV,  $x = 3$  tai  $x = -3$

- A356. a)** Ratkaisussa on unohdettu negatiivinen vaihtoehto.

Ratkaisu:

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16} \text{ tai } x = -\sqrt{16}$$

$$x = 4 \quad x = -4$$

- b)** Ratkaisussa on mukana negatiivinen vaihtoehto, joka ei kuulu tähän.

Ratkaisu:

$$x^3 = 125$$

$$x = \sqrt[3]{125}$$

$$x = 5$$

Vastaus: **a)** unohdettu negatiivinen vaihtoehto,  $x = 4$  tai  $x = -4$

**b)** mukana negatiivinen vaihtoehto, joka ei kuulu tähän  $x = 5$

$$\text{A357. a) } x^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{2}{4} - \frac{1}{4}$$

$$x^2 = \frac{2-1}{4}$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\parallel \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{1}{2} \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } 16x^2 - 9 = 0$$

$$16x^2 = 9 \quad \parallel :16$$

$$x^2 = \frac{9}{16}$$

$$x = \sqrt{\frac{9}{16}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$\parallel \frac{9}{16} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$x = \frac{3}{4} \quad x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{c) } 4x^2 - 9 = 16$$

$$4x^2 = 25 \quad \parallel :4$$

$$x^2 = \frac{25}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{25}{4}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$\parallel \frac{25}{4} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{5}{2} \quad x = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Vastaus: a) } x = \frac{1}{2} \text{ tai } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } x = \frac{3}{4} \text{ tai } x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{c) } x = \frac{5}{2} \text{ tai } x = -\frac{5}{2}$$

A358. a)  $\frac{4}{7}x^2 = 1\frac{3}{4}$

$$\frac{4}{7}x^2 = \frac{7}{4} \quad \parallel \cdot \frac{7}{4}$$

$$x^2 = \frac{49}{16}$$

$$x = \sqrt{\frac{49}{16}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{49}{16}} \quad \parallel \frac{49}{16} = \frac{7 \cdot 7}{4 \cdot 4} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$x = \frac{7}{4} \quad x = -\frac{7}{4}$$

$$x = 1\frac{3}{4} \quad x = -1\frac{3}{4}$$

TAI

$$\frac{4}{7}x^2 = 1\frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{7}x^2 = \frac{7}{4} \quad \parallel \cdot 7$$

$$\frac{4}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{1} x^2 = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{1}$$

$$4x^2 = \frac{49}{4} \quad \parallel :4$$

$$x^2 = \frac{49}{4} :4$$

$$x^2 = \frac{49}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$x^2 = \frac{49}{16}$$

$$x = \sqrt{\frac{49}{16}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{49}{16}} \quad \parallel \frac{49}{16} = \frac{7 \cdot 7}{4 \cdot 4} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$x = \frac{7}{4} \quad x = -\frac{7}{4}$$

$$x = 1\frac{3}{4} \quad x = -1\frac{3}{4}$$

b)  $x^2 - 0,64 = 0$

$$x^2 = 0,64$$

$$x = \sqrt{0,64} \text{ tai } x = -\sqrt{0,64}$$

$$x = 0,8 \quad x = -0,8$$



$$\text{sqrt}(0,64) \\ = 0,8$$

c)  $2x^2 - 0,5 = 0$

$$2x^2 = 0,5 \quad \parallel : 2$$

$$x^2 = 0,25$$

$$x = \sqrt{0,25} \text{ tai } x = -\sqrt{0,25}$$

$$x = 0,5 \quad x = -0,5$$

$$0,5/2 \\ = 0,25$$

$$\text{sqrt}(0,25) \\ = 0,5$$

Vastaus: a)  $x = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$  tai  $x = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}$

c)  $x = 0,5$  tai  $x = -0,5$

b)  $x = 0,8$  tai  $x = -0,8$

A359. a)  $(3x)^3 - 54 = 0$

$$3^3 x^3 - 54 = 0$$

$$27x^3 - 54 = 0$$

$$27x^3 = 54 \quad \parallel : 27$$

$$x^3 = 2$$

$$x = \sqrt[3]{2}$$

**b)**  $4 - (-2x)^2 = 0$

$$4 - (-2)^2 x^2 = 0$$

$$4 - 4x^2 = 0$$

$$-4x^2 = -4 \quad \| : (-4)$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1} \text{ tai } x = -\sqrt{1}$$

$$x = 1 \quad x = -1$$

**c)**  $\left(-\frac{x}{2}\right)^2 = 9^{-1}$

$$\left(\frac{x}{-2}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\frac{x^2}{(-2)^2} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{1}{9} \quad \| \cdot 4$$

$$x^2 = \frac{4}{9}$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{9}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{4}{9}} \quad \left\| \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x = \frac{2}{3} \quad x = -\frac{2}{3}$$

Vastaus: **a)**  $x = \sqrt[3]{2}$    **b)**  $x = 1$  tai  $x = -1$    **c)**  $x = \frac{2}{3}$  tai  $x = -\frac{2}{3}$

**A360. a)**  $\frac{x^2}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 1$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{9} = 1 \quad \parallel \cdot 9$$

$$3x^2 + x^2 = 9$$

$$4x^2 = 9 \quad \parallel : 4$$

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{9}{4}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{9}{4}} \quad \parallel \frac{9}{4} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{3}{2} \quad x = -\frac{3}{2}$$

**b)**  $6 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 54 = 0$

$$6 \cdot \frac{x^2}{2^2} = 54$$

$$\cancel{6} \cdot \frac{x^2}{\cancel{4}_2} = 54$$

$$54 \cdot \frac{2}{3} = 36$$

$$\frac{3x^2}{2} = 54 \quad \parallel \cdot \frac{2}{3}$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} \text{ tai } x = -\sqrt{36}$$

$$x = 6 \quad x = -6$$

**c)**  $(-2x)^3 - 1 = 0$

$$(-2)^3 x^3 = 1$$

$$-8x^3 = 1 \quad \parallel : (-8)$$

$$x^3 = -\frac{1}{8}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \quad \parallel \frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \text{ joten } -\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Vastaus: **a)**  $x = \frac{3}{2}$  tai  $x = -\frac{3}{2}$

**b)**  $x = 6$  tai  $x = -6$

**c)**  $x = -\frac{1}{2}$

**A361. a)** Luvun  $x$  neliön  $x^2$  vastaluku on  $-x^2$ . Luvun 4 käänteisluku on  $\frac{1}{4}$ .

$$-x^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{1}{4} = x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{1}{4}} \quad \parallel \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{1}{2} \quad x = -\frac{1}{2}$$

**b)** Luvun  $x$  kuution on  $x^3$ .

$$x^3 \cdot (-2) = 0,128$$

$$-2x^3 = 0,128 \quad \parallel : (-2)$$

$$x^3 = -0,064$$

$$x = \sqrt[3]{-0,064}$$

$$x = -0,4$$

$$\begin{aligned} &0,128 / -2 \\ &= -0,064 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{cbrt}(\text{ans}) \\ &= -0,4 \end{aligned}$$

Vastaus: **a)**  $-x^2 + \frac{1}{4} = 0$ ;  $x = \frac{1}{2}$  tai  $x = -\frac{1}{2}$

**b)**  $-2x^3 = 0,128$ ;  $x = -0,4$

1

Ratkaise( $3x^2-27=0$ )

→  $\{x = -3, x = 3\}$

**362. a)**

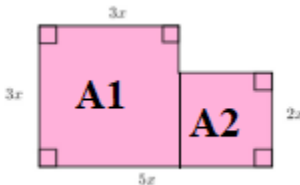
- b) 

2	Ratkaise( $0.2x^2-3=1.2$ )
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{x = -\sqrt{21}, x = \sqrt{21}\}$
- c) 

3	Ratkaise( $x^2/3-1/2=6+1/4$ )
<input type="radio"/>	$\rightarrow \left\{x = -\frac{9}{2}, x = \frac{9}{2}\right\}$

Vastaus: **a)**  $x = 3$  tai  $x = -3$       **b)**  $x = \sqrt{21}$  tai  $x = -\sqrt{21}$   
**c)**  $x = \frac{9}{2}$  tai  $x = -\frac{9}{2}$

363. Jaetaankuusikulmio kahdeksi suorakulmioksi.



Alueen A1 kanta on  $3x$  ja korkeus  $3x$ , joten sen pinta-ala on  $3x \cdot 3x = 9x^2$ .

Alueen A2 kanta on  $(5x - 3x) = 2x$  ja korkeus  $2x$ , joten sen pinta-ala on  $2x \cdot 2x = 4x^2$ .

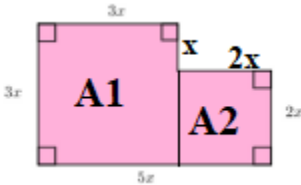
Pinta-alojen A1 ja A2 summa on 0,52.

- |                       |  |
|-----------------------|--|
| 1                     | Ratkaise( $9x^2+4x^2=0.52$ )                                   |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \left\{x = -\frac{1}{5}, x = \frac{1}{5}\right\}$ |
| 2                     | $\{x = (-1)/5, x = 1/5\}$                                      |
| <input type="radio"/> | $\approx \{x = -0.2, x = 0.2\}$                                |

Mitta  $x$  ei voi olla negatiivinen, joten on oltava  $x = 0,2$ .

3	$2^* \{x = -0.2, x = 0.2\}$
<input type="radio"/>	$\approx \{2x = -0.4, 2x = 0.4\}$
4	$3^* \{x = -0.2, x = 0.2\}$
<input type="radio"/>	$\approx \{3x = -0.6, 3x = 0.6\}$
5	$5^* \{x = -0.2, x = 0.2\}$
<input type="radio"/>	$\approx \{5x = -1, 5x = 1\}$

Listään kuvaan puuttuvien sivujen pituuden kirjaimen  $x$  avulla.

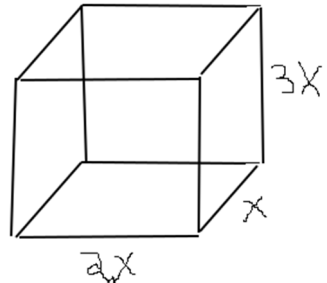


Sivut ovat siis vasemmasta alanurkasta vastapäivään:  
 1, 0,4, 0,4, 0,2 0,6 ja 0,6 yksikkö pitkät.

Vastaus: Sivut ovat 1, 0,4, 0,4, 0,2 0,6 ja 0,6 yksikkö pitkät.

**364.** Merkitään särmiön pituutta kirjaimella  $x$ , jolloin sen leveys on  $2x$  ja korkeus  $3x$ .

Särmiön tilavuus on pohjan ala kertaa korkeus, eli  $x \cdot 2x \cdot 3x = 6x^3$ .



1	Ratkaise( $x^*2x^*3x=0.120$ )
<input type="radio"/>	$\approx \{x = 0.27144\}$
2	$\{x = 0.2714417616595\} * 100$
<input type="radio"/>	$\approx \{100x = 27.14418\}$

Sivu  $x$  on siis noin  $0,27 \text{ m} = 27 \text{ cm}$ .

3	$100 \cdot 2 \cdot \{x = 0.2714417616595\}$
<input type="radio"/>	$\approx \{200 x = 54.28835\}$
4	$100 \cdot 3 \cdot \{x = 0.2714417616595\}$
<input type="radio"/>	$\approx \{300 x = 81.43253\}$

Sivut  $2x$  ja  $3x$  ovat 54 cm ja 81 cm

Vastaus: leveys 54 cm, korkeus 81 cm ja pituus 27 cm.

365. Merkitään kuution särmän pituutta  $x$ , jolloin sen tilavuus on  $x^3$ . Tämän tilavuuden halutaan olevan 165 l. Pituusyksiköjä ei voida ratkaista vetomitoista, joten muutetaan vetomitta tilavuusyksiköksi.

$$165\text{l} = 165\text{dm}^3 = 165000\text{cm}^3.$$

1	Ratkaise( $x^3=165000$ )
<input type="radio"/>	$\approx \{x = 54.84807\}$

Kuution sivun pituus on siis noin 55 cm.

Merkitään eliön sivun pituutta  $a$ , jolloin sen pinta-ala on  $a^2$ . Tämän pinta-alan halutaan olevan  $0,5\text{ha} = 50\text{a} = 5000\text{m}^2$ .

2	Ratkaise( $a^2=5000,a$ )
<input type="radio"/>	$\approx \{a = -70.71068, a = 70.71068\}$

Sivun pituus ei voi olla negatiinen, joten se on noin 71 m.

Vastaus: Kuution särmän pituus on 55 cm ja neliön sivun pituus 71 m.

366. Ratkaistaan nopeudet.

1	Ratkaise( $12=4.3 \cdot 10^4(-3) \cdot v^2, v$ )
<input type="radio"/>	$\approx \{v = -52.82705, v = 52.82705\}$
2	Ratkaise( $57=4.3 \cdot 10^4(-3) \cdot v^2, v$ )
<input type="radio"/>	$\approx \{v = -115.1339, v = 115.1339\}$

Nopeudet eivät voi olla negatiivisia, joten ne ovat 53 km/h ja 115 km/h.

Vastaus: 53 km/h ja 115 km/h

A367. a) Ratkaistaan säde.

$$4\pi r^2 = 28 \quad || : (4\pi)$$

$$r^2 = \frac{28}{4\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{28}{4\pi}} \quad \text{tai } r = -\sqrt{\frac{28}{4\pi}}$$

$$r = 1,492\dots \quad r = -1,492\dots$$

Säde ei voi olla negatiivinen, joten se on noin 1,5 m.

TAI

$$4\pi r^2 = 28 \quad || : (4\pi)$$

$$r^2 = 2,228\dots$$

$$r = \sqrt{2,228\dots} \quad \text{tai } r = -\sqrt{2,228\dots}$$

$$r = 1,492\dots \quad r = -1,492\dots$$

$$28 / (4 * \pi)$$

$$= 2,22816920328653470076$$

$$\text{sqrt}(\text{ans})$$

$$= 1,49270533036046156566$$



b) Ratkaistaan säde.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 0,9$$

$$\frac{4\pi}{3}r^3 = 0,9 \quad \parallel \cdot \frac{3}{4\pi}$$

$$r^3 = \frac{0,9 \cdot 3}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{0,9 \cdot 3}{4\pi}}$$

$$r = 0,598\dots$$

Säde ei voi olla negatiivinen, joten se on noin 0,6 dm.

TAI

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 0,9 \quad \parallel \cdot 3$$

$$4\pi r^3 = 2,7 \quad \parallel : 4\pi$$

$$r^3 = 0,214\dots$$

$$r = \sqrt[3]{0,214\dots}$$

$$r = 0,598\dots$$

---

$$0.9*3$$
$$= 2,7$$

$$\text{ans}/(4*\text{pi})$$
$$= 0,21485917317405870329$$

$$\text{cbrt}(\text{ans})$$
$$= 0,59894181369826204565$$

Vastaus: a) 1,5 m

b) 0,6 dm

## SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

**A368. a)** Ratkaistaan ensimmäisen yhtälö.

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} &= 2 && \parallel \cdot 6 \\ 3x - 2(x-1) &= 12 \\ 3x - 2x + 2 &= 12 \\ x &= 10\end{aligned}$$

Tarkistetaan toteuttaako tämä ratkaisu toisen yhtälön.

$$1 - \left(\frac{10}{10}\right)^2 = 1 - 1^2 = 1 - 1 = 0$$

On siis osoitettu, että ensimmäisen yhtälönratkaisu toteuttaa myös toisen yhtälön.

**b)** Kohdassa a nähtiin, että  $x = 10$  on yhtälön  $1 - \left(\frac{x}{10}\right)^2 = 0$  yksi ratkaisu.

Tästä nähdään, että myös  $x = -10$  on sen ratkaisu:

$$1 - \left(\frac{-10}{10}\right)^2 = 1 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0.$$

Toisen asteen yhtälöllä ei voi olla enempää kuin kaksi ratkaisua, eli ne on molemmat löydetty. Kohdassa a nähtiin, että ratkaisu  $x = 10$  toteuttaa ensimmäisen yhtälön. Koska ensimmäinen yhtälö sieveni muotoon  $ax = b$  se on ensimmäisen asteen yhtälö, ja sillä on vain yksi ratkaisu. Joten jälkimmäisen yhtälön toinen ratkaisu  $x = -10$  ei voi olla ensimmäisen yhtälön ratkaisu.

TAI

Ratkaistaan ensimmäisen yhtälö.

$$\begin{aligned}1 - \left(\frac{x}{10}\right)^2 &= 0 \\ 1 &= \left(\frac{x}{10}\right)^2 \\ 1 &= \frac{x^2}{10^2} \\ 1 &= \frac{x^2}{100} && \parallel \cdot 100 \\ 100 &= x^2 \\ x^2 &= 100 \\ x &= 10 \text{ tai } x = -10\end{aligned}$$

Kohdassa a nähtiin, että  $x = 10$  on toisen yhtälön ratkaisu. Tarkistetaan sitten  $x = -10$ .

$$\frac{-10}{2} - \frac{-10-1}{3} = -5 - \frac{-11}{3} = \frac{-15}{3} + \frac{11}{3} = \frac{-4}{3} \neq 2$$

Ensimmäisen yhtälön ratkaistu eivät siis molemmat ole toisen yhtälön ratkaisuja.

Vastaus: **a)** –      **b)** Eivät ole.

- 369. a)** Jos leveys on  $x$  ja leveyden ja korkeuden suhde on  $\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$  niin arkin korkeus on  $\sqrt{2} \cdot x$ .

1	Ratkaise( $x*\text{sqrt}(2)*x=1$ )
<input type="radio"/>	$\approx \{x = -0.8409, x = 0.8409\}$
2	$1000*\{x = -0.8408964152537, x = 0.8408964152537\}$
<input type="radio"/>	$\approx \{1000 x = -840.89642, 1000 x = 840.89642\}$
3	$1000*\text{sqrt}(2)*\{x = -0.8408964152537, x = 0.8408964152537\}$
<input type="radio"/>	$\approx \{1414.21356 x = -1189.20712, 1414.21356 x = 1189.20712\}$

Arkin leveys on siis 0,8409... m = 841 mm ja korkeus 1189 mm.

- b)** Kun A0 puolitetaan, saadaan A1.

Tällöin A0 arkin lyhyemmästä sivusta tulee A1 arkin pidempi sivu, ja A1 arkin lyhyempi sivu on A0 arkin pidemmän sivun puolikas.

Arkki	pidempi sivu	lyhyempi sivu
A0	1198,2...	840,8...
A1	840,8...	$1198,2.../2 = 594,6...$
A2	594,6...	$840,8.../2 = 420,4...$
A3	420,4...	$594,6.../2 = 297,3...$
A4	297,3...	$420,4.../2 = 210,2...$

A4 arkin mitat ovat siis 210 mm x 297 mm

Vastaus: **a)** 841 mm x 1189 mm

**b)** 210 mm x 297 mm

$$\begin{aligned} 370. \quad \text{a)} \quad \frac{1}{2}at^2 &= s && \parallel \cdot 2 \\ at^2 &= 2s && \parallel : a \neq 0 \\ t^2 &= \frac{2s}{a} \\ t &= \sqrt{\frac{2s}{a}} \text{ tai } t = -\sqrt{\frac{2s}{a}} \end{aligned}$$

Tässä aika  $t$  on positiivinen, joten  $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ .

- b) Tehtävänannossa on annettu arvot  $a = 9,81 \text{ m/s}^2$  ja  $s = 110\text{m}$ .  
Sijoitetaan ne lausekkeeseen, jolloin saadaan hypyn kesto aika  $t$ .

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 110}{9,81}} = 4,73\dots$$

$$\begin{aligned} &\text{sqrt}(2*110/9.81) \\ &= 4,73561989823837460352 \end{aligned}$$

Harry oli siis ilmassa noin 4,7 sekuntia.

$$\text{Vastaus: a) } t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \quad \text{b) } 4,7 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} 371. \quad \text{a)} \quad (x+1)^2 &= 16 \\ x+1 &= 4 \text{ tai } x+1 = -4 \\ x &= 3 \quad \quad \quad x = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (x+5)^3 &= 27 \\ x+5 &= 3 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad (2x-3)^2 &= 1 \\ 2x-3 &= 1 && \text{tai } 2x-3 = -1 \\ 2x &= 4 && \parallel :2 \quad \quad \quad 2x = 2 \quad \parallel :2 \\ x &= 2 && \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: a) } x = -5 \text{ tai } x = 3 \quad \text{b) } x = -2 \quad \text{c) } x = 1 \text{ tai } x = 2$$

372. Sijoitetaan  $x = 8$  ja ratkaistaan  $a$ .

$$a^2 \cdot 8^2 - 576 = 0$$

$$64a^2 = 576 \quad \parallel : 64$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3 \text{ tai } a = -3$$

Koska  $a^2 = 9$  yhtälö on molemmissa tapauksissa muotoa  $9x^2 - 576 = 0$ .

Koska  $x = 8$  on ratkaisu, niin yhtälöstä nähdään suoraan, että sen toinen ratkaisu on  $x = -8$ .

TAI

Ratkaistaan yhtälö.

$$9x^2 - 576 = 0$$

$$9x^2 = 576 \quad \parallel : 9$$

$$x^2 = 64$$

$$x = 8 \text{ tai } x = -8$$

Vastaus: Kun  $a = 3$  tai  $a = -3$ . Toinen ratkaisu on  $x = -8$ .

373. Siirretään kaikki vakion oikealle.

$$x^2 + 1 = a$$

$$x^2 = a - 1$$

Tällä yhtälöllä ei ole ratkaisuja, jos  $a - 1 < 0$ .

Erotus  $a - 1$  on negatiivinen täsmälleen silloin kun  $a < 1$ .

Vastaus: Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, kun  $a < 1$ .

## 3.4 Yhtälöpari

### LUO PERUSTA

374. a) Sijoitetaan arvot  $x = 2$  ja  $y = 1$  molempiin yhtälöparin yhtälöihin ja katsotaan, toteutuvatko yhtälöt.

Ylempi yhtälö:

$$\text{Vasen puoli: } x + y = 2 + 1 = 3$$

Oikea puoli: 3

Yhtälön vasemman ja oikean puolen arvot ovat samat, joten yhtälö  $x + y = 3$  toteutuu.

Alempi yhtälö:

$$\text{Vasen puoli: } x = 2$$

$$\text{Oikea puoli: } 2y = 2 \cdot 1 = 2$$

Yhtälön vasemman ja oikean puolen arvot ovat samat, joten yhtälö  $x = 2y$  toteutuu.

Molemmat yhtälöt toteutuvat, joten lukupari  $x = 2$  ja  $y = 1$  on yhtälöparin ratkaisu.

- b) Sijoitetaan arvot  $x = 2$  ja  $y = 1$  molempiin yhtälöparin yhtälöihin ja katsotaan, toteutuvatko yhtälöt.

$$x + 2y = 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4, \text{ eli yhtälö } x + 2y = 4 \text{ toteutuu.}$$

$$x - 3y = 2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1, \text{ eli yhtälö } x - 3y = 0 \text{ ei toteudu.}$$

Toinen yhtälöparin yhtälöistä ei toteudu, joten lukupari  $x = 2$  ja  $y = 1$  ei ole yhtälöparin ratkaisu.

Vastaus: a) on            b) ei ole

375. a) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$  sijoitusmenetelmällä.

Sijoitetaan  $y = 2x - 1$  alempaan yhtälöön muuttujan  $y$  paikalle ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä muuttuja  $x$ .

$$2x - 1 = x + 1$$

$$x = 2$$

Sijoitetaan  $x = 2$  ylempään yhtälöön ja ratkaistaan siitä muuttuja  $y$ .  
 $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = 2$  ja  $y = 3$ .

**b)** Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} x + y = 3 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$  sijoitusmenetelmällä.

Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä  $x + y = 3$  muuttuja  $y$ , jolloin saadaan  $y = 3 - x$ . Sijoitetaan lauseke  $y = 3 - x$  muuttujan  $y$  paikalle alempaan yhtälöön  $y - 2x = 0$  ja ratkaistaan saatavasta yhtälöstä muuttuja  $x$ .

$$\begin{array}{r} y - 2x = 0 \\ 3 - x - 2x = 0 \\ -3x = -3 \quad || : (-3) \\ x = 1 \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = 1$  ylempään yhtälöön  $x + y = 3$  ja ratkaistaan muuttuja  $y$ .  
 $1 + y = 3$   
 $y = 2$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = 1$  ja  $y = 2$ .

Vastaus: **a)**  $x = 2$  ja  $y = 3$

**b)**  $x = 1$  ja  $y = 2$

**376. a)** Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + y = -6 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $x$  eliminoiduu.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + y = -6 \end{cases} \\ + \\ \hline 3y = -3 \quad || : 3 \\ y = -1 \end{array}$$

Sijoitetaan  $y = -1$  alempaan yhtälöön  $-x + y = -6$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $x$ .

$$\begin{aligned} -x - 1 &= -6 \\ -x &= -5 && \parallel : (-1) \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = 5$  ja  $y = -1$ .

- b) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x = 3y + 7 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Muokataan alemmaa yhtälöä niin, että muuttujaa sisältävät termit ovat yhtälön vasemmalla puolella.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x = 3y + 7 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla  $-2$ , jolloin yhtälöiden muuttujan  $x$  kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $x$  eliminoituu.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \\ + \\ \hline -5y = 5 \quad \parallel : (-5) \\ y = -1 \end{array}$$

Sijoitetaan  $y = -1$  ylempään yhtälöön  $x + y = 1$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $x$ .

$$\begin{aligned} x - 1 &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = 2$  ja  $y = -1$ .



Vastaus: **a)**  $x = 5$  ja  $y = -1$     **b)**  $x = 2$  ja  $y = -1$

377. **a)** Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 2x = 5y \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Muokataan alemmaa yhtälöä niin, että muuttujaa sisältävät termit ovat yhtälön vasemmalla puolella.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 2x = 5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$$

Kerrotaan alempi yhtälö luvulla  $-1$ , jolloin yhtälöiden muuttujan  $x$  kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $x$  eliminoiduu.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases} \\ \hline 8y = 8 \quad \parallel : 8 \\ y = 1 \end{array}$$

Sijoitetaan  $y = 1$  alempaan yhtälöön  $2x = 5y$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $x$ .

$$\begin{array}{r} 2x = 5y \\ 2x = 5 \cdot 1 \\ 2x = 5 \quad \parallel : 2 \\ x = \frac{5}{2} \end{array}$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla saadaan:

21	$2x + 3y = 8$ <input type="radio"/> $\rightarrow 2x + 3y = 8$
22	$2x = 5y$ <input type="radio"/> $\rightarrow 2x = 5y$
23	$\{\$21, \$22\}$ <input type="radio"/> Ratkaise: $\left\{ \left\{ x = \frac{5}{2}, y = 1 \right\} \right\}$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = \frac{5}{2}$  ja  $y = 1$ .

- b) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} 2x - 3y = -3 \\ y = -\frac{1}{3}x \end{cases}$  sijoitusmenetelmällä.

Sijoitetaan  $y = -\frac{1}{3}x$  ylempään yhtälöön muuttujan  $y$  paikalle ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä muuttuja  $x$ .

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -3 \\ 2x - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}x\right) &= -3 \\ 2x + x &= -3 \\ 3x &= -3 && \parallel :3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan  $x = -1$  alempaan yhtälöön  $y = -\frac{1}{3}x$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $y$ .

$$y = -\frac{1}{3}x = -\frac{1}{3} \cdot (-1) = \frac{1}{3}$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla saadaan:

24	$2x - 3y = -3$ <input type="radio"/> $\rightarrow 2x - 3y = -3$
25	$y = -1/3x$ <input type="radio"/> $\rightarrow y = -\frac{1}{3}x$
26	$\{24, 25\}$ <input type="radio"/> Ratkaise: $\left\{ \left\{ x = -1, y = \frac{1}{3} \right\} \right\}$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = -1$  ja  $y = \frac{1}{3}$ .

Vastaus: **a)**  $x = \frac{5}{2}$  ja  $y = 1$    **b)**  $x = -1$  ja  $y = \frac{1}{3}$

378. **a)** Kussakin moottoripyörässä on 2 rengasta. Jos moottoripyörien lukumäärää merkitään kirjaimella  $x$ , on niissä renkaita yhteensä  $2x$ .

Kussakin henkilöautossa on 4 rengasta. Jos autojen määrää merkitään kirjaimella  $y$ , on niissä renkaita yhteensä  $4y$ .

Täydennetään taulukko.

	Moottoripyörä	Henkilöauto	Yhteensä
Ajoneuvojen lukumäärä	$x$	$y$	191
Renkaiden lukumäärä	$2x$	$4y$	734

Ajoneuvojen lukumäärästä saadaan yhtälö  $x + y = 191$  ja renkaiden lukumäärästä yhtälö  $2x + 4y = 734$ .

$$\text{Yhtälöpari on siis } \begin{cases} x + y = 191 \\ 2x + 4y = 734 \end{cases}.$$

b) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} x + y = 191 \\ 2x + 4y = 734 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Kerrotaan alempi yhtälö luvulla  $-2$ , jolloin yhtälöiden muuttujan  $x$  kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\begin{cases} -2x - 2y = -382 \\ 2x + 4y = 734 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $x$  eliminoituu.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -2x - 2y = -382 \\ 2x + 4y = 734 \end{cases} \\ + \\ \hline 2y = 352 \quad \parallel : 2 \\ y = 176 \end{array}$$

Sijoitetaan  $y = 176$  ylempään yhtälöön  $x + y = 191$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $x$ .

$$\begin{aligned} x + y &= 191 \\ x + 176 &= 191 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Parkkipaikalla on 15 moottoripyörää ja 176 autoa.

Vastaus: **a)**

	Moottoripyörä	Henkilöauto	Yhteensä
Ajoneuvojen lukumäärä	$x$	$y$	191
Renkaiden lukumäärä	$2x$	$4y$	734

$$\begin{cases} x + y = 191 \\ 2x + 4y = 734 \end{cases}$$

b) 15 moottoripyörää ja 176 autoa

379. Merkitään kysytyjä lukuja kirjaimilla  $x$  ja  $y$ .

- a) Lukujen summa on neljä, eli  $x + y = 4$ .  
Lukujen erotus on kuusi, eli  $x - y = 6$ .

Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 6 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $y$  eliminoituu.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 6 \end{cases} \\ + \\ \hline 2x = 10 \quad \parallel : 2 \\ x = 5 \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = 5$  ylempään yhtälöön  $x + y = 4$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $y$ .

$$\begin{array}{r} x + y = 4 \\ 5 + y = 4 \\ y = -1 \end{array}$$

Luvut ovat 5 ja  $-1$ .

- b) Lukujen summa on kaksi, eli  $x + y = 2$ .  
Lukujen erotus on yksi, eli  $x - y = 1$ .

Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $y$  eliminoituu.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \\ + \\ \hline 2x = 3 \quad \parallel : 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = \frac{3}{2}$  ylempään yhtälöön  $x + y = 2$  ja ratkaistaan siitä

muuttuja  $y$ .

$$x + y = 2$$

$$\frac{3}{2} + y = 2$$

$$y = 2 - \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{4}{2} - \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Luvut ovat  $\frac{3}{2}$  ja  $\frac{1}{2}$ .

Vastaus: **a)** 5 ja  $-1$       **b)**  $\frac{3}{2}$  ja  $\frac{1}{2}$

**380.** Merkitään 10 euron setelien lukumäärää kirjaimella  $x$  ja 20 euron setelien lukumäärää kirjaimella  $y$ .

Seteleitä on yhteensä 46, joten saadaan yhtälö  $x + y = 46$ .

Rahaa on yhteensä 730 euroa, joten saadaan yhtälö  $10x + 20y = 730$ .

Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} x + y = 46 \\ 10x + 20y = 730 \end{cases}$  ohjelmalla.

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan  $x = 19$  ja  $y = 27$ .

Kassassa oli 19 kpl 10 euron seteliä ja 27 kpl 20 euron seteliä.

Vastaus: 19 kpl 10 euron seteliä ja 27 kpl 20 euron seteliä

## VAHVISTA OSAAMISTA

381. a) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x = 4 - 2y \end{cases}$  sijoitusmenetelmällä.

Sijoitetaan  $y = 3x - 5$  alempaan yhtälöön muuttujan  $y$  paikalle ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä muuttuja  $x$ .

$$x = 4 - 2 \cdot (3x - 5)$$

$$x = 4 - 6x + 10$$

$$7x = 14 \quad || :7$$

$$x = 2$$

Sijoitetaan  $x = 2$  ylempään yhtälöön  $y = 3x - 5$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $y$ .

$$y = 3x - 5 = 3 \cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1.$$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = 2$  ja  $y = 1$ .

- b) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x = 4 - 2y \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Muokataan molempia yhtälöitä niin, että muuttujaa sisältävät termit ovat yhtälöiden vasemmalla puolella.

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x = 4 - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + y = -5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Kerrotaan alempi yhtälö luvulla 3, jolloin yhtälöiden muuttujan  $x$  kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\begin{cases} -3x + y = -5 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $x$  eliminoituu.

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} -3x + y = -5 \\ + \left\{ \begin{array}{l} 3x + 6y = 12 \end{array} \right. \\ \hline 7y = 7 \end{array} \right. \quad \parallel : 7 \\ y = 1 \end{array}$$

Sijoitetaan  $y = 1$  alempaan yhtälöön  $x = 4 - 2y$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $x$ .

$$x = 4 - 2y = 4 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2$$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = 2$  ja  $y = 1$ .

Vastaus:  $x = 2$  ja  $y = 1$

382. a) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Kerrotaan alempi yhtälö luvulla  $-3$ , jolloin yhtälöiden muuttujan  $y$  kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 3y = 2 \\ -12x - 3y = -30 \end{array} \right.$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $y$  eliminoituu.

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 3y = 2 \\ + \left\{ \begin{array}{l} -12x - 3y = -30 \end{array} \right. \\ \hline -7x = -28 \end{array} \right. \quad \parallel : (-7) \\ x = 4 \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = 4$  alempaan yhtälöön  $4x + y = 10$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $y$ .

$$4x + y = 10$$

$$4 \cdot 4 + y = 10$$

$$16 + y = 10$$

$$y = -6$$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = 4$  ja  $y = -6$ .



b) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} 10x - 20y = 50 \\ x + y = 2 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Jaetaan ylempi yhtälö luvulla  $-10$ , jolloin yhtälöiden muuttujan  $x$  kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\begin{cases} -x + 2y = -5 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $x$  eliminoiduu.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -x + 2y = -5 \\ x + y = 2 \end{cases} \\ + \\ \hline 3y = -3 \quad \parallel :3 \\ y = -1 \end{array}$$

Sijoitetaan  $y = -1$  alempaan yhtälöön  $x + y = 2$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $x$ .

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - 1 &= 2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = 3$  ja  $y = -1$ .

Vastaus: **a)**  $x = 4$  ja  $y = -6$     **b)**  $x = 3$  ja  $y = -1$

383. a) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} 3a - b = \frac{3}{2} \\ 2a + \frac{2}{3}b = 1 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla  $2$  ja alempi yhtälö luvulla  $3$ , jolloin yhtälöiden muuttujan  $b$  kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\begin{cases} 3a - b = \frac{3}{2} & \parallel \cdot 2 \\ 2a + \frac{2}{3}b = 1 & \parallel \cdot 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6a - 2b = 3 \\ 6a + 2b = 3 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $b$  eliminoiduu.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 6a - 2b = 3 \\ + \quad 6a + 2b = 3 \end{cases} \\ \hline 12a = 6 \quad \parallel :12 \\ a = \frac{6}{12} \\ a = \frac{1}{2} \end{array}$$

Sijoitetaan  $a = \frac{1}{2}$  alempaan yhtälöön  $2a + \frac{2}{3}b = 1$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $b$ .

$$\begin{aligned} 2a + \frac{2}{3}b &= 1 \\ 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3}b &= 1 \\ 1 + \frac{2}{3}b &= 1 \\ \frac{2}{3}b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on  $a = \frac{1}{2}$  ja  $b = 0$ .

b) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} 4a - 6b = 5 \\ a = \frac{3b}{4} \end{cases}$  sijoitusmenetelmällä.

Sijoitetaan  $a = \frac{3b}{4}$  ylempään yhtälöön muuttujan  $a$  paikalle ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä muuttuja  $b$ .

$$4a - 6b = 5$$

$$4 \cdot \frac{3b}{4} - 6b = 5$$

$$3b - 6b = 5$$

$$-3b = 5 \quad \| : (-3)$$

$$b = -\frac{5}{3}$$

Sijoitetaan  $b = -\frac{5}{3}$  ylempään yhtälöön  $4a - 6b = 5$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $a$ .

$$4a - 6b = 5$$

$$4a - 6 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = 5$$

$$4a + \frac{30}{3} = 5$$

$$4a + 10 = 5$$

$$4a = -5 \quad \| : 4$$

$$a = -\frac{5}{4}$$

Yhtälöparin ratkaisu on  $a = -\frac{5}{4}$  ja  $b = -\frac{5}{3}$ .

Vastaus: **a)**  $a = \frac{1}{2}$  ja  $b = 0$    **b)**  $a = -\frac{5}{4}$  ja  $b = -\frac{5}{3}$

384. a) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} 0,2x + 0,4y - 1 = 0 \\ x - 0,5y = 0 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Muokataan ylempää yhtälöä niin, että vakiotermit ovat yhtälön oikealla puolella.

$$\begin{cases} 0,2x + 0,4y - 1 = 0 \\ x - 0,5y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,2x + 0,4y = 1 \\ x - 0,5y = 0 \end{cases}$$

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla 10 ja alempi yhtälö luvulla  $-2$ , jolloin yhtälöiden muuttujan  $x$  kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\begin{cases} 0,2x + 0,4y = 1 & \parallel \cdot 10 \\ x - 0,5y = 0 & \parallel \cdot (-2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $x$  eliminoiduu.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \\ \hline 5y = 10 \quad \parallel : 5 \\ y = 2 \end{array}$$

Sijoitetaan  $y = 2$  alempaan yhtälöön  $x - 0,5y = 0$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $x$ .

$$\begin{array}{r} x - 0,5y = 0 \\ x - 0,5 \cdot 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x = 1 \end{array}$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla saadaan:

54 <input type="radio"/>	$0.2x + 0.4y - 1 = 0$ $\rightarrow \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y - 1 = 0$
55 <input type="radio"/>	$x - 0.5y = 0$ $\rightarrow x - \frac{1}{2}y = 0$
56 <input type="radio"/>	$\{\$54, \$55\}$ Ratkaise: $\{\{x = 1, y = 2\}\}$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = 1$  ja  $y = 2$ .

- b) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} \frac{x+3y}{3} = \frac{1}{2} \\ x+y=2 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla 6 ja alempi yhtälö luvulla  $-2$ , jolloin yhtälöiden muuttujan  $x$  kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\begin{cases} \frac{x+3y}{3} = \frac{1}{2} & \parallel \cdot 6 \\ x+y=2 & \parallel \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+3y) = 3 \\ -2x-2y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+6y = 3 \\ -2x-2y = -4 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $x$  eliminoituu.

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 6y = 3 \\ -2x - 2y = -4 \end{array} \right. \\ \hline 4y = -1 \quad \parallel :4 \\ y = -\frac{1}{4} \end{array}$$

Sijoitetaan  $y = -\frac{1}{4}$  alempaan yhtälöön  $x + y = 2$  ja ratkaistaan siitä

muuttuja  $x$ .

$$x + y = 2$$

$$x + \left(-\frac{1}{4}\right) = 2$$

$$x - \frac{1}{4} = 2$$

$$x = 2\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{9}{4}$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla saadaan:

57 <input type="radio"/>	$(x+3y)/3=1/2$ $\rightarrow \frac{1}{3}x + y = \frac{1}{2}$
58 <input type="radio"/>	$x+y=2$ $\rightarrow x + y = 2$
59 <input type="radio"/>	$\{\$57, \$58\}$ Ratkaise: $\left\{ \left\{ x = \frac{9}{4}, y = -\frac{1}{4} \right\} \right\}$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = \frac{9}{4}$  ja  $y = -\frac{1}{4}$ .

Vastaus: **a)**  $x = 1$  ja  $y = 2$     **b)**  $x = \frac{9}{4}$  ja  $y = -\frac{1}{4}$

385. a) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} 30x + 40y = 10 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{3} = \frac{7}{6} \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Jaetaan ylempi yhtälö luvulla 10 ja kerrotaan alempi yhtälö luvulla 6.

$$\begin{cases} 30x + 40y = 10 & \parallel :10 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{3} = \frac{7}{6} & \parallel \cdot 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$$

Kerrotaan alempi yhtälö luvulla  $-3$ , jolloin yhtälöiden muuttujan  $x$  kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ x - 2y = 7 & \parallel \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ -3x + 6y = -21 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $x$  eliminoiduu.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ -3x + 6y = -21 \end{cases} \\ \hline 10y = -20 \quad \parallel :10 \\ y = -2 \end{array}$$

Sijoitetaan  $y = -2$  ylempään yhtälöön  $30x + 40y = 10$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $x$ .

$$30x + 40 \cdot (-2) = 10$$

$$30x - 80 = 10$$

$$30x = 90 \quad \| : 30$$

$$x = 3$$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = 3$  ja  $y = -2$ .

b) Ratkaistaan yhtälöpari 
$$\begin{cases} x - \frac{y}{2} = 3 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 0 \end{cases}$$
 yhteenlaskumenetelmällä.

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla 2 ja alempi yhtälö luvulla 4, jolloin yhtälöiden muuttujan  $y$  kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\begin{cases} x - \frac{y}{2} = 3 & \| \cdot 2 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 0 & \| \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $y$  eliminoituu.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \\ + \\ \hline 4x = 6 \end{array} \quad \| : 4$$

$$x = \frac{6}{4}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Sijoitetaan  $x = \frac{3}{2}$  ylempään yhtälöön  $x - \frac{y}{2} = 3$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $y$ .



$$x - \frac{y}{2} = 3$$

$$\frac{3}{2} - \frac{y}{2} = 3 \quad \parallel \cdot 2$$

$$3 - y = 6$$

$$-y = 3 \quad \parallel \cdot (-1)$$

$$y = -3$$

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = \frac{3}{2}$  ja  $y = -3$ .

Vastaus: **a)**  $x = 3$  ja  $y = -2$    **b)**  $x = \frac{3}{2}$  ja  $y = -3$

**386.** Merkitään kysytyjä lukuja kirjaimilla  $x$  ja  $y$ .

**a)** Lukujen keskiarvo on kahdeksan, eli  $\frac{x+y}{2} = 8$ .

Lukujen erotus on kuusi, eli  $x - y = 6$ .

Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla 2, jolloin yhtälöiden muuttujan  $y$  kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 8 \\ x - y = 6 \end{cases} \quad \parallel \cdot 2$$

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $y$  eliminoituu.

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 16 \\ x - y = 6 \end{array} \right. \\ \hline 2x = 22 \quad \| : 2 \\ x = 11 \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = 11$  alempaan yhtälöön  $x - y = 6$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $y$ .

$$\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 11 - y = 6 \\ -y = -5 \quad \| \cdot (-1) \\ y = 5 \end{array}$$

Luvut ovat 5 ja 11.

**b)** Lukujen erotus on viisi, eli  $x - y = 5$ .

Lukujen vastalukujen summa on yksi, eli  $-x + (-y) = 1$ .

$$-x + (-y) = 1$$

$$-x - y = -1$$

Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} x - y = 5 \\ -x - y = -1 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja  $x$  eliminoituu.

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} x - y = 5 \\ -x - y = -1 \end{array} \right. \\ \hline -2y = 4 \quad \| : (-2) \\ y = -2 \end{array}$$

Sijoitetaan  $y = -2$  ylempään yhtälöön  $x - y = 5$  ja ratkaistaan siitä muuttuja  $x$ .

$$x - y = 5$$

$$x - (-2) = 5$$

$$x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

Luvut ovat  $-2$  ja  $3$ .

$$\text{Vastaus: a) } \begin{cases} \frac{x+y}{2} = 8 \\ x-y = 6 \end{cases}, 5 \text{ ja } 11$$

$$\text{b) } \begin{cases} x-y = 5 \\ -x-y = -1 \end{cases}, -2 \text{ ja } 3$$

- 387.** Merkitään tuntiviisarin pituutta kirjaimella  $x$  ja minuuttiviisarin pituutta kirjaimella  $y$ .  
Kello 12.00 molemmat viisarit osoittavat ylöspäin, joten niiden kärkien välinen etäisyys on  $y - x$ . Tämän pituuden tiedetään olevan 2,0 cm, joten saadaan yhtälö  $y - x = 2,0$ .

Kellon 6.00 tuntiviisari osoittaa suoraan alaspäin ja minuuttiviisari suoraan ylöspäin. Viisarien kärkien välinen etäisyys on  $x + y$ . Tämän pituuden tiedetään olevan 13,0 cm, joten saadaan yhtälö  $x + y = 13$ .

$$\text{Ratkaistaan pituudet } x \text{ ja } y \text{ yhtälöparista } \begin{cases} y - x = 2 \\ x + y = 13 \end{cases}.$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan ohjelmalla  $x = \frac{11}{2} = 5,5$  ja  $y = \frac{15}{2} = 7,5$ .

Tuntiviisarin pituus on 5,5 cm ja minuuttiviisarin pituus on 7,5 cm.

Vastaus: 5,5 cm ja 7,5 cm

- 388.** Merkitään maalin A tilavuutta litroina kirjaimella  $x$  ja maalin B tilavuutta litroina kirjaimella  $y$ .  
Kun valmistetaan  $x$  litraa maalia A, tarvitaan  $80x$  grammaa keltaista ja  $110x$  grammaa sinistä pigmenttiä.

Kun valmistetaan  $y$  litraa maalia B, tarvitaan  $120y$  grammaa keltaista ja  $90y$  grammaa sinistä pigmenttiä.

Keltaista pigmenttiä käytetään 3,2 kg = 3200 g, joten saadaan yhtälö  $80x + 120y = 3200$ .

Sinistä pigmenttiä käytetään 3,5 kg = 3500 g, joten saadaan yhtälö  $110x + 90y = 3500$ .

Ratkaistaan maalien määrät  $x$  ja  $y$  yhtälöparista 
$$\begin{cases} 80x + 120y = 3200 \\ 110x + 90y = 3500 \end{cases}.$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan ohjelmalla  $x = 22$  ja  $y = 12$ .

Maalia A valmistettiin 22 litraa ja maalia B 12 litraa.

Vastaus: maalia A 22 litraa ja maalia B 12 litraa

- 389.** Merkitään porkkanan satoisuutta ( $\text{kg}/\text{m}^2$ ) palstalla A kirjaimella  $x$  ja palstalla B kirjaimella  $y$ .  
Ensimmäisen vuoden tiedoista saadaan yhtälö  $300x + 450y = 5430$  ja toisen vuoden tiedoista yhtälö  $400x + 250y = 5200$ .

Ratkaistaan satoisuudet yhtälöparista 
$$\begin{cases} 300x + 450y = 5430 \\ 400x + 250y = 5200 \end{cases}.$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan ohjelmalla

$$x = \frac{131}{14} = 9,357\dots \approx 9,4 \text{ ja } y = \frac{204}{35} = 5,828\dots \approx 5,8.$$

Porkkanan satoisuus palstalla A oli keskimäärin  $9,4 \text{ kg}/\text{m}^2$  ja palstalla B  $5,8 \text{ kg}/\text{m}^2$ .

Vastaus: palstalla A:  $9,4 \text{ kg}/\text{m}^2$ , palstalla B:  $5,8 \text{ kg}/\text{m}^2$

- 390.** Merkitään Eetun alkuperäisiä käteisvaroja kirjaimella  $x$  ja Aleksin kirjaimella  $y$ .

Eetu lainasi Veetille kolmasosan käteisvaroistaan, eli  $\frac{1}{3}x$ .

Aleksi lainasi Veetille viidesosan käteisvaroistaan, eli  $\frac{1}{5}y$ .

Veeti sai Eetulta ja Aleksilta yhteensä 60 euroa. Saadaan siis yhtälö

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 60.$$

Lainauksen jälkeen Eetulle jäi käteistä  $x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$  ja Aleksille

$$y - \frac{1}{5}y = \frac{4}{5}y. \text{ Saadaan yhtälö } \frac{2}{3}x = \frac{4}{5}y.$$

Ratkaistaan Eetun ja Aleksin alkuperäiset käteisvarat yhtälöparista

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 60 \\ \frac{2}{3}x = \frac{4}{5}y \end{cases}.$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan ohjelmalla  $x = 120$  ja  $y = 100$ .

Eetulla oli alun perin 120 € ja Aleksilla 100 €.

Vastaus: Eetulla 120 euroa ja Aleksilla 100 euroa

**391.** Merkitään pöytien määrää kirjaimella  $x$  ja opiskelijoiden määrää kirjaimella  $y$ .

Jos jokaiseen pöytään laitetaan 8 tuolia, istumapaikkoja on  $8x$  kpl ja toisaalta niitä on 5 vähemmän kuin opiskelijoita, eli  $y - 5$ .

Jos jokaiseen pöytään laitetaan 9 tuolia, istumapaikkoja on  $9x$  kpl ja toisaalta niitä on 6 enemmän kuin opiskelijoita, eli  $y + 6$ .

Ratkaistaan pöytien ja opiskelijoiden määrät yhtälöparista  $\begin{cases} 8x = y - 5 \\ 9x = y + 6 \end{cases}$ .

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan  $x = 11$  ja  $y = 93$ .

Ruokalassa on 11 pöytää ja koulussa on 93 opiskelijaa.

Vastaus: 11 pöytää ja 93 opiskelijaa

## SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

392. Merkitään seoksessa olevan veden määrää litroina kirjaimella  $x$  ja etanolin määrää litroina kirjaimella  $y$ .  
Seosta on yhteensä 1,50 litraa, joten saadaan yhtälö  $x + y = 1,50$ .

Koska tiheys =  $\frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}}$ , on massa = tiheys  $\cdot$  tilavuus.

Vettä on  $x$  litraa ja sen tiheys on  $1,00 \text{ kg/dm}^3$ , joten seoksessa oleva vesi painaa  $1,00 \text{ kg/dm}^3 \cdot x \text{ dm}^3 = x \text{ kg}$ .

Etanolia on  $y$  litraa ja sen tiheys on  $0,79 \text{ kg/dm}^3$ , joten seoksessa oleva etanoli painaa  $0,79 \text{ kg/dm}^3 \cdot y \text{ dm}^3 = 0,79y \text{ kg}$ .

Seos painaa yhteensä 1,44 kg, joten saadaan yhtälö  $x + 0,79y = 1,44$ .

Ratkaistaan tilavuudet yhtälöparista  $\begin{cases} x + y = 1,50 \\ x + 0,79y = 1,44 \end{cases}$ .

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan ohjelmalla  $x = 1,2142\dots$  ja  $y = 0,28571\dots$

Seosta on yhteensä 1,5 litraa ja siitä alkoholia on 0,28571... litraa.  
Seoksen alkoholipitoisuus on

$$\frac{0,28571\dots \text{ dm}^3}{1,50 \text{ dm}^3} = 0,190476\dots \approx 0,19 = 19 \%$$

Vastaus: 19 %

393. Merkitään kirjaimella  $x$  kuljettua matkaa (km) ja kirjaimella  $y$  matkaan kulunutta aikaa (h).

Keskinopeus on matkan ja ajan osamäärä, eli  $v = \frac{s}{t}$ . Ratkaistaan yhtälöstä

matka  $s$ .

$$v = \frac{s}{t} \quad || \cdot t$$

$$s = vt$$

Aino kulkee polkupyörällä ja hänen keskinopeutensa on 15 km/h.  
Ainon kulkema matka on  $x = 15 \text{ km/h} \cdot y \text{ h} = 15y$ .

Emma kulkee skootterilla ja hänen keskinopeutensa on 45 km/h.  
Emmalla kestää 4 minuuttia ennen, kun hän pääsee ajamaan skootterilla.

Koska  $4 \text{ min} = \frac{4}{60} \text{ h} = \frac{1}{15} \text{ h}$ , Emma ajaa skootterilla  $y - \frac{1}{15}$  tuntia.

Emma kulkee matkan  $x = 45 \text{ km/h} \cdot (y - \frac{1}{15}) \text{ h} = 45(y - \frac{1}{15})$ .

Emma saavuttaa Ainon, kun heidän kulkemat matkat ovat yhtä suuret, siis

$$15y = 45(y - \frac{1}{15}).$$

Ratkaistaan yhtälö ohjelmalla, jolloin ratkaisuksi saadaan  $y = 0,1$ .

Sijoitetaan  $y = 0,1$  Emman matkaa kuvaavaan lausekkeeseen  $45(y - \frac{1}{15})$ .

Emman pitää ajaa  $45(0,1 - \frac{1}{15}) \text{ km} = 1,5 \text{ km}$  ennen kuin hän saavuttaa Ainon.

Vastaus: 1,5 km

**394.** Merkitään murtolukua  $\frac{x}{y}$ .

Kun murtoluvun osoittajaan lisätään luku 1, on murtoluku  $\frac{x+1}{y}$ . Tämä on

yhtä suuri kuin  $\frac{2}{3}$ , joten saadaan yhtälö  $\frac{x+1}{y} = \frac{2}{3}$ .

Kun murtoluvun  $\frac{x}{y}$  nimittäjään lisätään luku 1, on murtoluku  $\frac{x}{y+1}$ .

Tämä on yhtä suuri kuin  $\frac{1}{2}$ , joten saadaan yhtälö  $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2}$ .

Ratkaistaan luvut  $x$  ja  $y$  yhtälöparista 
$$\begin{cases} \frac{x+1}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{x}{y+1} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan ohjelmalla  $x = 5$  ja  $y = 9$ .

Kysytty murtoluku on siis  $\frac{5}{9}$ .

Vastaus:  $\frac{5}{9}$

**395.** Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$  sijoitusmenetelmällä.

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä  $y - 2x = 0$  muuttuja  $y$ , jolloin saadaan  $y = 2x$ . Sijoitetaan lauseke  $y = 2x$  muuttujan  $y$  paikalle ylempään yhtälöön  $x^2 - y^2 = -3$  ja ratkaistaan saatavasta yhtälöstä muuttuja  $x$ .

$$x^2 - (2x)^2 = -3$$

$$x^2 - 4x^2 = -3$$

$$-3x^2 = -3 \quad \| :(-3)$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$x = 1$$

tai

$$x = -\sqrt{1}$$

$$x = -1$$

Sijoitetaan  $x = 1$  yhtälöön  $y = 2x$ , jolloin saadaan  $y = 2 \cdot 1 = 2$ .

Sijoitetaan  $x = -1$  yhtälöön  $y = 2x$ , jolloin saadaan  $y = 2 \cdot (-1) = -2$ .

Yhtälöparin ratkaisu on  $x = 1$  ja  $y = 2$  sekä  $x = -1$  ja  $y = -2$ .

Vastaus:  $x = 1$  ja  $y = 2$  sekä  $x = -1$  ja  $y = -2$