2. POTENSSI JA JUURI

2.1 Potenssi ja potenssin laskusäännöt

LUO PERUSTA

201. **a)** $7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$

b) $-7 \cdot 7 \cdot 7 = -(7 \cdot 7 \cdot 7) = -7^3$

c) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = (-7)^3$

Vastaus: **a)** 7^3 **b)** -7^3 **c)** $(-7)^3$

202. **a)** $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

b) $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$

c) $-4^2 = -(4 \cdot 4) = -16$

d) $-(-4)^2 = -((-4) \cdot (-4)) = -(4 \cdot 4) \ \ -16$

Vastaus:
a) $4 \cdot 4 = 16$ **b)** $(-4) \cdot (-4) = 16$ **c)** $-(4 \cdot 4) = -16$ **d)** $-(-4) \cdot (-4) = -16$

203. **a)** $1 + 2^4 - (-3)^2 = 1 + 16 - 9 = 8$

b) $2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$

c) $8 - 7 \cdot (-1)^9 = 8 - 7 \cdot (-1) = 8 + 7 = 15$

Vastaus: **a)** 8 **b)** 50 **c)** 15

204. a) $a^2 \cdot a^5 = a^{2+5} = a^7$

b) $\dfrac{a^{10}}{a^6} = a^{10-6} = a^4$

c) $\dfrac{a^3 \cdot a^{33}}{a^{35}} = \dfrac{a^{3+33}}{a^{35}} = \dfrac{a^{36}}{a^{35}} = a^{36-35} = a^1 = a$

d) $\dfrac{9^{17}}{9^{15}} = 9^{17-15} = 9^2 = 81$

e) $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$

Vastaus: a) a^7 b) a^4 c) a d) 81 e) 10 000

205. a) $(a^3)^{11} = a^{3 \cdot 11} = a^{33}$;
kun $a = -1$, lausekkeen arvo on $(-1)^{33} = -1$.

b) $a^2 \cdot (a^3)^4 = a^2 \cdot a^{3 \cdot 4} = a^2 \cdot a^{12} = a^{2+12} = a^{14}$;
kun $a = -1$, lausekkeen arvo on $(-1)^{14} = 1$.

c) $\dfrac{(a^5)^3}{a^4} = \dfrac{a^{5 \cdot 3}}{a^4} = \dfrac{a^{15}}{a^4} = a^{15-4} = a^{11}$;
kun $a = -1$, lausekkeen arvo on $(-1)^{11} = -1$.

d) $\dfrac{(a^3)^4}{a^3 a^4} = \dfrac{a^{3 \cdot 4}}{a^{3+4}} = \dfrac{a^{12}}{a^7} = a^{12-7} = a^5$;
kun $a = -1$, lausekkeen arvo on $(-1)^5 = -1$.

e) $\dfrac{5a^7}{(5a)^2} = \dfrac{5a^7}{5^2 \cdot a^2} = \dfrac{5a^7}{25a^2} = \dfrac{5}{25} \cdot \dfrac{a^7}{a^2} = \dfrac{1}{5} \cdot a^{7-2} = \dfrac{1}{5} \cdot a^5 = \dfrac{a^5}{5}$;

kun $a = -1$, lausekkeen arvo on $\dfrac{(-1)^5}{5} = \dfrac{-1}{5} = -\dfrac{1}{5}$.

Vastaus: a) a^{33} ja -1 b) a^{14} ja 1 c) a^{11} ja -1 d) a^5 ja -1 e) $\frac{a^5}{5}$ ja $-\frac{1}{5}$

206. **a)** $(10t)^3 = 10^3 \cdot t^3 = 1000t^3$

b) $\left(\frac{z}{3}\right)^3 = \frac{z^3}{3^3} = \frac{z^3}{27}$

c) $(-7x^5)^2 = (-7)^2 \cdot (x^5)^2 = 49 \cdot x^{5 \cdot 2} = 49x^{10}$

d) $\left(-\frac{5x}{8}\right)^2 = \left(-\frac{5}{8}x\right)^2 = \left(-\frac{5}{8}\right)^2 \cdot x^2 = \frac{25}{64}x^2$

e) $5(2y)^3 = 5 \cdot 2^3 \cdot y^3 = 5 \cdot 8 \cdot y^3 = 40y^3$

Vastaus: **a)** $1000t^3$ **b)** $\frac{z^3}{27}$ **c)** $49x^{10}$ **d)** $\frac{25}{64}x^2$ **e)** $40y^3$

207. **a)** $12^0 = 1$

b) $4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$

c) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

d) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{4}\right)^1 = \frac{5}{4}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

Vastaus: **a)** 1 **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{9}$ **d)** $\frac{5}{4}$ **e)** $\frac{9}{4}$

208. a) $2{,}3 \cdot 10^5 = 2{,}3 \cdot 100\,000 = 230\,000$

b) $4{,}01 \cdot 10^{-3} = 4{,}01 \cdot \frac{1}{10^3} = 4{,}01 \cdot \frac{1}{1000} = 4{,}01 \cdot 0{,}001 = 0{,}00401$

Vastaus: a) 230 000 b) 0,00401

209. a) $14\,000 = 1{,}4 \cdot 10\,000 = 1{,}4 \cdot 10^4$

b) $0{,}00003 = 3 \cdot 0{,}00001 = 3 \cdot \dfrac{1}{10000} = 3 \cdot \frac{1}{10^5} = 3 \cdot 10^{-5}$

c) $0{,}00891 = 8{,}91 \cdot 0{,}001 = 8{,}91 \cdot 10^{-3}$

Vastaus: a) $1{,}4 \cdot 10^4$ b) $3 \cdot 10^{-5}$ c) $8{,}91 \cdot 10^{-3}$

VAHVISTA OSAAMISTA

210. a) $-3^2 = -9$

b) $(-3)^2 = 9$

c) $\dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

d) $(2 - (-3))^2 = (2 + 3)^2 = 5^2 = 25$

Vastaus: a) $-3^2 = -9$ b) $(-3)^2 = 9$ c) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ d) $(2 - (-3))^2 = 25$

211. **a)** $3-4\cdot(3^3-4^2)=3-4\cdot(27-16)=3-4\cdot 11=3-44=-41$

b) $\frac{2^3}{9}+(-1\frac{1}{2})^{-2}=\frac{8}{9}+\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{8}{9}+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{9}+\left(\frac{-2}{3}\right)^2=\frac{8}{9}+\frac{(-2)^2}{3^2}$
$=\frac{8}{9}+\frac{4}{9}=\frac{12}{9}^{(3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3^2}{4}+\frac{3}{4^2}=\frac{(-3)^2}{4^2}-{}^{4)}\frac{9}{4}+\frac{3}{16}=\frac{9}{16}-\frac{36}{16}+\frac{3}{16}=-\frac{24}{16}^{(8}=-\frac{3}{2}$

Vastaus: **a)** -41 **b)** $\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ **c)** $-\frac{3}{2}$

212. **a)** $\frac{8a^3}{(8a)^2}=\frac{8a^3}{8^2\cdot a^2}=\frac{8}{64}\cdot\frac{a^3}{a^2}=\frac{1}{8}a^{3-2}=\frac{1}{8}a=\frac{a}{8}$

b) $-6\cdot(2a)^3=-6\cdot 2^3\cdot a^3=-6\cdot 8\cdot a^3=-48a^3$

c) $(-\frac{a}{10})^2-\frac{a^2}{20}=\frac{a^2}{10^2}-\frac{a^2}{20}=\frac{a^2}{100}-{}^{5)}\frac{a^2}{20}=\frac{a^2}{100}-\frac{5a^2}{100}$
$=\frac{a^2-5a^2}{100}=\frac{-4a^2}{100}^{(4}=-\frac{a^2}{25}$

Vastaus: **a)** $\frac{a}{8}$ **b)** $-48a^3$ **c)** $-\frac{a^2}{25}$

213. **a)** $(-2)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=4+\frac{1^2}{2^2}=4+\frac{1}{4}=4\frac{1}{4}$

b) $(-2)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)-\frac{1^3}{2^3}=-8-\frac{1}{8}=-(8+\frac{1}{8})=-8\frac{1}{8}$

Vastaus: **a)** $(-2)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=4\frac{1}{4}$ **b)** $(-2)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3=-8\frac{1}{8}$

214. **a)** Maan säde $6{,}3675 \cdot 10^3 = 6{,}3675 \cdot 1000 = 6367{,}5$ km ja tilavuus $1{,}081 \cdot 10^{12} = 1{,}081 \cdot 1\,000\,000\,000\,000 = 1\,081\,000\,000\,000$ km^3

b) $5{,}8 \cdot 10^{-3} = 5{,}8 \cdot \frac{1}{10^3} = 5{,}8 \cdot \frac{1}{1000} = 5{,}8 \cdot 0{,}001 = 0{,}0058$ kg

$1 \cdot 10^{-6} = 10^{-6} = 0{,}000001$ m

Vastaus: **a)** 6367,5 km, 1 081 000 000 000 km^3 **b)** 0,0058 kg, 0,000001 m

215. **a)** $50\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 5 \cdot 10\,000\,000\,000\,000\,000\,000$
$= 5 \cdot 10^{19}$

b) $10\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 =$
$1 \cdot 10\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 1 \cdot 10^{22}$

c) $0{,}000\,004 = 4 \cdot 0{,}000\,001 = 4 \cdot 10^{-6}$
ja $0{,}000\,012 = 1{,}2 \cdot 0{,}000\,01 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$

Vastaus: **a)** $5 \cdot 10^{19}$ **b)** $1 \cdot 10^{22}$ **c)** $4 \cdot 10^{-6}$ m ja $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ m

216. **a)** $5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$
$= 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}01$
$= 500 + 30 + 7 + 0{,}8 + 0{,}04$
$= 537{,}84$

b) $609{,}23 = 600 + 9 + 0{,}2 + 0{,}03$
$= 6 \cdot 100 + 9 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}01$
$= 6 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$

Vastaus: **a)** 537,84 **b)** $6 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$

217. Lasketaan luvun $2\frac{1}{4}$ neliön ja luvun $1\frac{1}{2}$ kuution erotus.

$$(2\frac{1}{4})^2-(1\frac{1}{2})^3=\left(\frac{9}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9^2}{4^2}-\frac{3^3}{2^3}=\frac{81}{16}-{}^{2)}\frac{27}{8}$$

$$=\frac{81}{16}-\frac{54}{16}=\frac{27}{16}$$

Koska erotus on positiivinen, luvun $2\frac{1}{4}$ neliö on suurempi kuin luvun $1\frac{1}{2}$ kuutio.

Vastaus: Luvun $2\frac{1}{4}$ neliö.

218. **a)** Ilona käytti kertolaskun vaihdannaisuutta, jonka mukaan tulon tekijöiden järjestyksellä ei ole merkitystä. Helmi käytti tulon potenssin laskusääntöä, jonka mukaan $4^2 \cdot 5^2 = (4 \cdot 5)^2$.

b) $2^3 \cdot 0{,}5^3 = (2 \cdot 0{,}5)^3 = 1^3 = 1$

$8 \cdot 5^3 = 2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$

$36 \cdot 5^3 = 6^2 \cdot 5^3 = 6^2 \cdot 5^2 \cdot 5 = (6 \cdot 5)^2 \cdot 5 = 30^2 \cdot 5 = 900 \cdot 5 = 4500$

Vastaus: **a)** Ilona: potenssiin korotus, kertolaskun vaihdantalaki
Helmi: tulon potenssi **b)** 1; 1000; 4500

219.

$$\frac{3{,}1\ \text{MW}}{6\ \text{kW}}=\frac{3{,}1\cdot 10^6\ \text{W}}{6\cdot 10^3\ \text{W}}=516{,}666...$$

Vastaus: Tuulivoimalan teho riittää noin 520 kiukaan tarpeisiin.

220. **a)** 2 µm = $2 \cdot 10^{-6}$ m

30 nm = $30 \cdot 10^{-9}$ m = $3 \cdot 10 \cdot 10^{-9}$ m = $3 \cdot 10^{-8}$ m

60 µm = $60 \cdot 10^{-6}$ m = $6 \cdot 10 \cdot 10^{-6}$ m = $6 \cdot 10^{-5}$ m

b) $$\frac{0{,}5\ \text{mm}}{30\ \text{nm}} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-9}} = 16666{,}66... \approx 17000$$

$$\frac{0{,}5\ \text{mm}}{60\ \mu\text{m}} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{60 \cdot 10^{-6}} = 8{,}33... \approx 8$$

Vastaus: **a)** 2 µm = $2 \cdot 10^{-6}$ m; 30 nm = $3 \cdot 10^{-8}$ m; 60 µm = $6 \cdot 10^{-5}$ m
b) Noin 17 000 rhinovirusta tai noin 8 siitepölyhiukkasta

221. **a)** $4^{-1} + 2^{-3} + 0{,}5^2 =$

$$\tfrac{1}{4^1} + \tfrac{1}{2^3} + (\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1^2}{2^2} =^{2)} \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} +^{2)} \tfrac{1}{4} = \tfrac{2}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} = \tfrac{5}{8}$$

b) $$3 \cdot 2^{-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

c) $5^{670} \cdot 0{,}2^{671} = 5^{670} \cdot 0{,}2^{670} \cdot 0{,}2 = (5 \cdot 0{,}2)^{670} \cdot 0{,}2$

$= 1^{670} \cdot 0{,}2 = 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 = \frac{1}{5}$

Vastaus: **a)** $\frac{5}{8}$ **b)** 0 **c)** $0{,}2 = \frac{1}{5}$

222. **a)** Koska $(-a)^2 = a^2$, niin
$a \cdot a^2 \cdot a^{-4} \cdot (-a)^2 = a^1 \cdot a^2 \cdot a^{-4} \cdot a^2 = a^{1+2-4+2} = a^1 = a.$

b) $(-5a)^2 + \dfrac{a^7}{a^5} = (-5)^2 \cdot a^2 + a^{7-5} = 25a^2 + a^2 = 26a^2$

c)
$$\begin{aligned}(-a)^{12} + (2a^4)^3 &= (-1 \cdot a)^{12} + 2^3 \cdot (a^4)^3 \\ &= (-1)^{12} \cdot a^{12} + 8 \cdot a^{4\cdot 3} \\ &= 1 \cdot a^{12} + 8 \cdot a^{12} \\ &= 9a^{12}\end{aligned}$$

Vastaus: **a)** a **b)** $26a^2$ **c)** $9a^{12}$

223. **a)** $3^p \cdot 3^p \cdot 3^p = 3^{p+p+p} = 3^{3p}$

b) $3^p \cdot (3^p)^p = 3^p \cdot 3^{p\cdot p} = 3^p \cdot 3^{p^2} = 3^{p+p^2} = 3^{p^2+p}$

c) $3^p + 3^p + 3^p = 3 \cdot 3^p = 3^1 \cdot 3^p = 3^{p+1}$

Vastaus: **a)** 3^{3p} **b)** 3^{p^2+p} **c)** 3^{p+1}

224. **a)** $\left(2^n\right)^{n+1} \cdot \left(2^{n-1}\right)^n = 2^{n(n+1)} \cdot 2^{(n-1)n} = 2^{n^2+n} \cdot 2^{n^2-n} = 2^{n^2+n+n^2-n} = 2^{2n^2}$

b) $8^n \cdot 2^n = (2^3)^n \cdot 2^n = 2^{3n} \cdot 2^n = 2^{3n+n} = 2^{4n}$

c) $\dfrac{2^{2n} \cdot 4}{2^{n-1}} = \dfrac{2^{2n} \cdot 2^2}{2^{n-1}} = \dfrac{2^{2n+2}}{2^{n-1}} = 2^{(2n+2)-(n-1)} = 2^{2n+2-n+1} = 2^{n+3}$

Vastaus: **a)** 2^{2n^2} **b)** 2^{4n} **c)** 2^{n+3}

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

225. **a)** $8^a = (2^3)^a = 2^{3a} = (2^a)^3 = 3^3 = 27$

b) $2^{-a} + 2^0 = \dfrac{1}{2^a} + 1 = \dfrac{1}{3} + 1 = 1\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$

c) $2^{a+1} = 2^a \cdot 2^1 = 3 \cdot 2 = 6$

d) $4^{a-1} = \dfrac{4^a}{4} = \dfrac{(2^2)^a}{4} = \dfrac{2^{2a}}{4} = \dfrac{(2^a)^2}{4} = \dfrac{3^2}{4} = \dfrac{9}{4}$

Vastaus: **a)** 27 **b)** $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ **c)** 6 **d)** $\frac{9}{4}$

226. **a)** Potenssin määritelmän mukaan $(a^2)^4 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$. Koska $a^2 = aa$, niin $a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = aa \cdot aa \cdot aa \cdot aa = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$. Käyttämällä jälleen potenssin määritelmää saadaan lopulta $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8$.

b) $$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ kappaletta}} = \underbrace{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ kpl}} \cdot \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ kpl}} \cdot \ldots \cdot \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ kpl}}}_{n \text{ kappaletta}}$$

$$= \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{mn \text{ kappaletta}} = a^{mn}$$

Vastaus: **a)** - **b)** -

227. **a)** Kirjoitetaan potenssit tuloina ja supistetaan osamäärää.

$$\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot \cancel{a\cdot a\cdot a}}{\underset{1}{\cancel{a\cdot a\cdot a}}}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a}{1}=a\cdot a\cdot a\cdot a$$

Kirjoitetaan lopuksi tulo potenssina: $a\cdot a\cdot a\cdot a=a^4$.

b) Kirjoitetaan potenssit tuloina ja supistetaan osamäärää.

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m\text{ kpl}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ kpl}}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m-n\text{ kpl}}\cdot\overbrace{\cancel{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}}^{n\text{ kpl}}}{\underbrace{\cancel{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}}_{n\text{ kpl}}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m-n\text{ kpl}}}{1}=a^{m-n}$$

$(m>n>0)$.

Vastaus: **a)** - **b)** -

228. **a)**

$1+3+5+7+5+3+1$
$=3^2+\ 4^2$
$=9\ +\ 16$
$=25$

b) Summaa 1 + 3 + 5 + ... + 197 + 199 + 197 + ... + 5 + 3 + 1 voidaan hahmottaa kuviolla, jossa vinoriveillä olevien alkioiden lukumäärät ovat summan yhteenlaskettavat 1, 3, …, 197, 199, 197, …, 3 ja 1. Kuvio voidaan hajottaa kahdeksi neliöksi, joista suuremmassa rivejä on yhtä monta kuin summassa on erisuuria yhteenlaskettavia lukuja (100 kpl). Pienemmässä neliössä rivejä on yksi vähemmän.

$1+3+5+\ldots+197+199+197+\ldots+3+2+1$
$=99^2+100^2$
$=19\ 801$

Vastaus: **a)** 25 **b)** 19 801

229. **a)**

$1^2 = 1$
$2^2 = 1 + 3$
$3^2 = 1 + 3 + 5$
$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$
$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$
$6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

Neliön sivulla oleva ympyröiden lukumäärä antaa neliön kantaluvun. Neliössä, jonka sivun pituus on 4, on uloimpia violetteja ympyröitä $4 + 4 – 1 = 2 \cdot 4 – 1 = 7$.

Seuraavia vihreitä neliöitä on $3 + 3 – 1 = 2 \cdot 3 – 1 = 5$ jne.

Kaksi kertaa luku on parillinen, siitä vähennetään yksi ja siten yhteenlaskettavat ovat aina parittomia lukuja. Vastaavan neliön sivun pituus saadaan laskemalla esimerkiksi summassa $1 + 3 + 5 + 7$ viimeisen yhteenlaskettavan avulla.

$$\frac{7+1}{2} = 4$$

b) Summaa voidaan hahmottaa a-kohdan tapaan kuviolla, jossa erivärisiä ”kerroksia” on saman verran kuin yhteenlaskettavia lukuja. Yhteenlaskettavia on 50 kpl, koska lasketaan yhteen parittomia kokonaislukuja väliltä 1–99.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 99 = 50^2 = 2500$$

c) n:n ensimmäisen parittoman luonnollisen luvun summa on sama kuin luvun n neliö.

Vastaus: **a)** $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$, $6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$
b) 2500 **c)** n:n ensimmäisen parittoman luonnollisen luvun summa on sama kuin luvun n neliö.

230. $5^2 - 4^2 = 25 – 16 = 9 = 5 + 4$ ja
$100^2 - 99^2 = 10\,000 – 9801 = 199 = 100 + 99$

Vastaus: $5^2 - 4^2 = 5 + 4$ ja $100^2 - 99^2 = 100 + 99$

2.2 Neliö- ja kuutiojuuri

LUO PERUSTA

231.

Neliön pinta-ala	Neliön sivun pituus
1	$\sqrt{1}=1$
4	$\sqrt{4}=2$
9	$\sqrt{9}=3$
16	$\sqrt{16}=4$
100	$\sqrt{100}=10$

232. **a)** $\sqrt{49}=7$, sillä $7^2=49$ ja 7 on ei-negatiivinen.

b) $\sqrt{64}=8$, sillä $8^2=64$ ja 8 on ei-negatiivinen.

c) $\sqrt{0}=0$, sillä $0^2=0$ ja 0 on ei-negatiivinen.

d) Negatiivisella luvulla -100 ei ole neliöjuurta.

Vastaus: **a)** 7 **b)** 8 **c)** 0 **d)** Ei ole olemassa

233. **a)** $\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

b) $\sqrt{25}-\sqrt{16}=5-4=1$

c) $\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$

d) $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

Vastaus: **a)** 3 **b)** 1 **c)** 5 **d)** $\sqrt{13}$

234. a) $\sqrt[3]{1000}=\sqrt[3]{10^3}=10$

b) $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

c) $\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{(-1)^3}=-1$

d) $\sqrt[3]{0}=\sqrt[3]{0^3}=0$

Vastaus: a) 10 b) 2 c) −1 d) 0

235. a) $\sqrt{0,04}=0,2$

b) $\sqrt{0,25}=0,5$

c) $\sqrt[3]{729}=9$

d) $\sqrt[3]{1,728}=1,2$

Vastaus: a) 0,2 b) 0,5 c) 9 d) 1,2

236. a) $\sqrt{19}=4,35889...\approx 4,36$

b) $\sqrt[3]{-200}=-5,84803...\approx -5,85$

Vastaus: a) $\sqrt{19}\approx 4,36$ b) $\sqrt[3]{-200}\approx -5,85$

237. a) $\sqrt{169}=13$

b) $-\sqrt{25}=-5$

c) $\sqrt[3]{-343}=-7$

Vastaus: a) 13 b) −5 c) −7

238. Lasketaan luvun 12 neliöjuuri ja luvun 1,5 kuutio.

$\sqrt{12} = 3,46410... \approx 3,464$

$(1,5)^3 = 3,375$

Vastaus: Luvun 12 neliöjuuri.

VAHVISTA OSAAMISTA

239. **a)** Negatiivisella luvulla −16 ei ole neliöjuurta, sillä minkään luvun neliö ei ole negatiivinen.

b) $-\sqrt{16} = -4$

c) Minkään luvun neliö ei ole negatiivinen, joten ei ole olemassa lukua a, jolle olisi $a^2 = -125$. Niinpä luvulla −125 ei ole neliöjuurta.

Luvulla −125 on kuutiojuuri ja $\sqrt[3]{-125} = -5$, sillä $(-5)^3 = -125$. Luvun kuutiojuuren ei tarvitse olla ei-negatiivinen.

d) Määritelmän mukaan luvun a neliöjuuri on se *ei-negatiivinen luku*, jonka neliö on a. Negatiivinen luku −5 ei siis voi olla minkään luvun neliöjuuri.

Luku −5 on luvun −125 kuutiojuuri.

Vastaus: **a)** Ei ole. **b)** $-\sqrt{16} = -4$ **c)** Luvulla −125 ei ole neliöjuurta. $\sqrt[3]{-125} = -5$. **d)** Luku −5 ei ole minkään luvun neliöjuuri, mutta on kuutiojuuri.

240. **a)** $\sqrt{\frac{64}{81}}=\frac{8}{9}$, sillä $\frac{8}{9}\geq 0$ ja $\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{8^2}{9^2}=\frac{64}{81}$.

b) $\sqrt{\frac{49}{100}}=\frac{7}{10}$, sillä $\frac{7}{10}\geq 0$ ja $\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{7^2}{10^2}=\frac{49}{100}$. Niinpä $-\sqrt{\frac{49}{100}}=-\frac{7}{10}$.

c) $\sqrt{0,09}=\sqrt{\frac{9}{100}}=\frac{3}{10}=0,3$ sillä 0,3 on ei-negatiivinen ja $0,3^2=0,09$.

d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$, sillä $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{-1}{2}\right)^3\frac{(-1)^3}{2^3}=\frac{-1}{8}=-\frac{1}{8}$.

Vastaus: **a)** $\frac{8}{9}$ **b)** $-\frac{7}{10}$ **c)** 0,3 **d)** $-\frac{1}{2}$

241. **a)** Luvun 2 neliöjuuren $\sqrt{2}$ käänteisluku on $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) $-\sqrt{9}+2^3=-3+8=5$

c) $(-4)^3=-64$

d) On, luvun 0.

Vastaus: **a)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $-\sqrt{9}+2^3=5$ **c)** -64 **d)** On.

242. **a)** Neliön pinta-ala on 338 460 km², kun sen sivun pituus on $\sqrt{338\ 460}=581,77...\approx 582$ km.

b) Kuution muotoisen ruukun tilavuus on 5 dm³ = 5 000 cm³, kun sen särmän pituus on $\sqrt[3]{5000}=17,099...\approx 17$ cm.

Vastaus: **a)** 582 km **b)** 17 cm

243. **a)** $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Sijoitetaan pituus $l = 0{,}5$ m ja putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81$ m/s^2 heilahdusajan lausekkeeseen.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}} \approx 1{,}4185\ s \approx 1{,}4\ s$$

Heilahdusaika on 1,4 sekuntia.

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Sijoitetaan $l = 1{,}3$ m ja putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81$ m/s^2 heilahdusajan lausekkeeseen.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}3\ m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}} \approx 2{,}287\ s \approx 2{,}3\ s$$

Heilahdusaika on 2,3 sekuntia.

Vastaus: **a)** 1,4 s **b)** 2,3 s

244. **a)** Luku 5 on luvun 25 neliöjuuri, sillä $5 \geq 0$ ja $5^2 = 25$.

b) Luku −1 on luvun −1 kuutiojuuri, sillä $(-1)^3 = -1$.

c) Luku $\frac{3}{4}$ on luvun $\frac{9}{16}$ neliöjuuri, sillä $\frac{3}{4}$ on ei-negatiivinen ja $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

d) Luku 0,9 on luvun $0{,}9^3 = 0{,}729$ kuutiojuuri.

Vastaus: **a)** 25 **b)** −1 **c)** $\frac{9}{16}$ **d)** 0,729

245. **a)** $4^0 + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3$

b) $2^{-1} + \sqrt{\frac{1}{9}} = {}^{3)}\frac{1}{2} + {}^{2)}\frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \sqrt{\frac{9}{16}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$

d) $\left|2 - 3 \cdot \sqrt{4}\right| = |2 - 3 \cdot 2| = |2 - 6| = |-4| = 4$

Vastaus: **a)** 3 **b)** $\frac{5}{6}$ **c)** 3 **d)** 4

246. **a)** $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{169 - 144} = \frac{1}{2} + \sqrt{25} = \frac{1}{2} + 5 = 5\frac{1}{2}$

b) Luvun 64 kuutiojuuri on 4, sillä $4^3 = 64$. Luvun 36 neliöjuuri on puolestaan 6, sillä 6 on ei-negatiivinen ja $6^2 = 36$. Saadaan

$$3 \cdot \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt{36}} = {}^{1}\cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{6}_2} = \frac{4}{2} = 2$$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{5})^2 = 3 + 5 = 8$

d) Luvun 3 neliöjuuri $\sqrt{3}$ on pienempi kuin $\sqrt{4} = 2$. Niinpä $\sqrt{3} - 2 < 0$. Negatiivisen luvun itseisarvo on luvun vastaluku, joten $\left|\sqrt{3} - 2\right| = 2 - \sqrt{3}$.

Vastaus: **a)** $5\frac{1}{2}$ **b)** 2 **c)** 8 **d)** $2 - \sqrt{3}$

247. Muovailuvahapalan tilavuus on $4 \cdot 8 \cdot 16 = 512$ cm^3. Massasta muotoillaan 8 samankokoista kuutiota, joten yhden kuution tilavuus on $\frac{512}{8} = 64$ cm^3. Kuution särmän pituus on sen tilavuuden kuutiojuuri, joten kysytty särmän pituus on $\sqrt[3]{64} = 4$ cm.

Vastaus: 4,0 cm.

248. **a)** Kuutiossa on 6 keskenään yhtä suurta tahkoa, joten yhden tahkon pinta-ala on $\frac{18}{6}=3\ \text{cm}^2$. Kukin tahkoista on neliön muotoinen ja sen sivun (eli kuution särmän) pituus on pinta-alan neliöjuuri $\sqrt{3}$ cm. Kuution tilavuus on särmän kolmas potenssi eli

$(\sqrt{3})^3=3\sqrt{3}=5{,}196...\approx 5{,}2\,\text{cm}^3$

b) Kuution särmän pituus on sen tilavuuden kuutiojuuri $\sqrt[3]{18}$ cm. Yhden tahkon pinta-ala on näin ollen $(\sqrt[3]{18})^2$ cm^2, ja koko kuution pinta-ala $6\cdot(\sqrt[3]{18})^2=41{,}209...\approx 41\ \text{cm}^2$.

Vastaus: **a)** 5,2 cm^3 **b)** 41 cm^2

249. **a)** Luvuista vain $\sqrt[3]{-2}$ ja –1,2134 ovat lukua −1 pienempiä. Näistä $-1{,}2134=-\frac{12134}{10000}$ on rationaaliluku, mutta $\sqrt[3]{-2}=-1{,}25992104...$ ainakin näyttäisi olevan irrationaaliluku, sillä sen desimaaliesitys näyttäisi olevan päättymätön ja jaksoton.

b) Luvuista lukujen 3 ja 4 välissä ovat $\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$ ja $\sqrt{10}=3{,}162277660...$ Näistä $\frac{10}{3}$ on rationaaliluku. Sen sijaan $\sqrt{10}$ näyttäisi desimaaliesityksensä perusteella olevan irrationaaliluku.

c) Kohdan b ratkaisun perusteella annetuista luvuista lukujen 3 ja 4 välissä oleva irrationaaliluku on $\sqrt{10}$.

d) Annetuista luvuista ainoa, joka on lukua 2 pienempi ja positiivinen, on luku $\sqrt{2}=1{,}41421356237...$, joka desimaaliesityksensä perusteella vaikuttaisi olevan irrationaaliluku.

Vastaus: **a)** II **b)** III **c)** V **d)** I

250. Kokonaisluvun neliöjuuri on joko kokonaisluku tai irrationaaliluku. Koska $\sqrt{6} > \sqrt{4} = 2$ ja $\sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$, niin $\sqrt{6}$ ei ole kokonaisluku, vaan irrationaaliluku. Samoin, koska $\sqrt{8} > \sqrt{4} = 2$ ja $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$, niin $\sqrt{8}$ ei ole kokonaisluku, vaan irrationaaliluku. Edelleen saadaan, että koska $\sqrt{17} > \sqrt{16} = 4$ ja $\sqrt{17} < \sqrt{25} = 5$, niin $\sqrt{17}$ ei ole kokonaisluku, vaan irrationaaliluku.
Sen sijaan $\sqrt{16} = 4$ ja $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$ ovat rationaalilukuja.

Kuvion osaan A kuuluvat luvut, jotka ovat irrationaalilukuja ja pienempiä tai yhtä suuria kuin 3. Annetuista luvuista tällaisia ovat $\sqrt{6}$ ja $\sqrt{8}$.

Kuvion osaan B kuuluvat luvut, jotka ovat irrationaalilukuja ja suurempia kuin 3. Osaan B kuuluu luku $\sqrt{17}$.

Osaan C kuuluvat luvut, jotka ovat rationaalilukuja ja suurempia kuin luku 3. Tällaisia ovat luvut $\sqrt{16}$ ja $\frac{17}{3}$.

Vastaus: A: $\sqrt{6}$ ja $\sqrt{8}$ B: $\sqrt{17}$ C: $\sqrt{16}$ ja $\frac{17}{3}$

251. **a)** Luku 4 on luvun 16 neliöjuuri, sillä $4 \geq 0$ ja $4^2 = 16$.

b) Luku 0,2 on luvun $0{,}2^2 = 0{,}04$ neliöjuuri, sillä $0{,}2 \geq 0$ ja $0{,}2^2 = 0{,}04$.

c) Luku π on luvun π^2 neliöjuuri, sillä $\pi \geq 0$ ja luvun π neliö on π^2.

d) Luku −1 ei ole minkään luvun neliöjuuri, sillä luvun neliöjuuri on aina ei-negatiivinen.

Vastaus: **a)** 16 **b)** 0,04 **c)** π^2 **d)** Ei minkään.

252. **a)** Verrataan lukujen desimaaliesityksiä:
$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419\ldots$
$\frac{22}{7} = 3{,}142857142857143$

Desimaaliesitysten 3 ensimmäistä numeroa ovat samoja.

b) Luvun $\frac{333}{106} = 3{,}141509433\ldots$ desimaaliesityksessä 5 ensimmäistä numeroa ovat samat kuin luvun π desimaaliesityksessä.

c) Luvun $\frac{355}{113} = 3{,}141592920...$ desimaaliesityksessä 7 ensimmäistä numeroa ovat samat kuin luvun π desimaaliesityksessä.

Vastaus: **a)** kolme **b)** viisi **c)** seitsemän

253. Luku $\sqrt{7}$ on lukujen $\sqrt{4} = 2$ ja $\sqrt{9} = 3$ välissä. Niinpä $\sqrt{7}$ = F.

Luku $-\sqrt{5}$ on lukujen –2 ja –3 välissä, sillä $-\sqrt{4} = -2$ ja $-\sqrt{9} = -3$. Niinpä $-\sqrt{5}$ = B.

Luku $-\sqrt{10}$ on pienempi kuin –3, sillä $-\sqrt{9} = -3$ ja $-\sqrt{10} = -\sqrt{9}$. Näin ollen $-\sqrt{10}$ = A.
Luku $\sqrt{0{,}5}$ on lukujen $\sqrt{0} = 0$ ja $\sqrt{1} = 1$ välissä. Niinpä $\sqrt{0{,}5}$ = D.

Vastaus: $\sqrt{7}$ ja F, $-\sqrt{5}$ ja B, $-\sqrt{10}$ ja A, $\sqrt{0{,}5}$ ja D.

254. $(2{,}1)^2 = 4{,}41$
$(2{,}2)^2 = 4{,}84$
$(2{,}3)^2 = 5{,}29$
$(2{,}4)^2 = 5{,}76$
$(2{,}5)^2 = 6{,}25$
$(2{,}6)^2 = 6{,}76$
$(2{,}7)^2 = 7{,}29$
$(2{,}8)^2 = 7{,}84$
$(2{,}9)^2 = 8{,}41$

Koska $2{,}2^2 < 5 < 2{,}3^2$, niin $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$.
Koska $2{,}4^2 < 6 < 2{,}5^2$, niin $2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$.
Koska $2{,}8^2 < 8 < 2{,}9^2$, niin $2{,}8 < \sqrt{8} < 2{,}9$.

Vastaus: $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$; $2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$; $2{,}8 < \sqrt{8} < 2{,}9$