

MAA_Prel_i_MFKA_K2023

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0 – 12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmässä olevaa taulukkokirjaa ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 4 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Useimmissa tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

Sisällys

Osa 1: A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

- | | |
|---|-------|
| 1. Funktioitehtäviä | 12 p. |
| 2. Yhtälöitä ja derivaatan nollakohta | 12 p. |
| 3. Integraaleja | 12 p. |
| 4. Lapset hiekkalaatikolla | 12 p. |

Osa 2: B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

- | | |
|---|-------|
| 5. Ympyrä kolmion sisällä | 12 p. |
| 6. Trigonometrisia yhtälöitä | 12 p. |
| 7. Taso- ja avaruusgeometriaa | 12 p. |
| 8. Vektoreista | 12 p. |
| 9. Alueen tuhoeläinkanta | 12 p. |

Osa 3: B2-osa


Vastaa kolmeen tehtävään.

- | | | |
|--|--------------------------|-------|
| 10. Lentomäen maailmancup 2022 | Aineisto | 12 p. |
| 11. Lukuteoriaa ja Ankkalinnan logiikkaa | | 12 p. |
| 12. Nollakohta puolitusmenetelmällä | | 12 p. |
| 13. Derivoituvuus | | 12 p. |

Koe yhteensä

120 p.

Osa 1: A-osa

 Vastaa neljään tehtävään.

1. Funktiotehtäviä 12 p.

1.1 Mikä on funktion $f(x) = \sqrt{2 - 5x}$ määrittelyjoukko? 2 p.

- $x < \frac{2}{5}$
 $x \leq \frac{2}{5}$
 $x = \frac{2}{5}$
 $x > \frac{2}{5}$

1.2 Funktion $f(x) = |3 - x|$ arvot ovat aina 2 p.

- kokonaislukuja
 ei-negatiivisia
 negatiivisia
 positiivisia

1.3 Olkoon funktiot $f(x) = 2x^2 - x$ ja $g(x) = x^2 - x + 4$. Funktio $f(x)$ saa suuremman arvon kuin funktio $g(x)$ kun 2 p.

- kaikki muut vastausvaihtoehdot ovat väärä
 $x > 2$ tai $x < -2$
 $|x| \geq 2$
 $|x| \leq 2$

1.4 Määritä aritmeettisen lukujonon $x, 2x + 1, 4x - 1, \dots$ neljäs termi. 2 p.

- kaikki muut vastausvaihtoehdot ovat väärä
 15
 16
 14

1.5 Epäyhtälön

$$\lg(3) + \lg\left(\frac{5}{3}\right) + \lg\left(\frac{7}{5}\right) + \dots + \lg\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) > 10$$
 ratkaisu on

2 p.

- $x \geq 10^9$
 $x > 5 \cdot 10^9 - \frac{1}{2}$
 $x > 10^{10}$
 $x \geq 5 \cdot 10^9$

1.6 Luvulla 13 jaollisten nelinumeroisten luonnollisten lukujen summa on 2 p.

- kaikki muut vastausvaihtoehdot ovat väärä
 3 816 306
 3 810 807

○ 3 805 308

2. Yhtälöitä ja derivaatan nollakohta 12 p.2.1 Ratkaise $16^{3x} = \frac{1}{128}$. 4 p.2.2 Ratkaise funktion $f(x) = \frac{3x - \sqrt{x}}{2x^2}$ derivaatan nollakohdat. 4 p.2.3 Ratkaise $\log_5(2x + 4) - \log_5(x + 3) = \log_5(x + 2)$. 4 p.**3. Integraaleja 12 p.**3.1 Määritä $\int (\sin x + \sin 2x) dx$. 3 p.3.2 Määritä $\int_1^5 |x - 3| dx$. 3 p.3.3 Määritä funktion $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ integraalifunktioista se, joka on jaollinen binomilla $x + 2$. 3 p.

3.4 Laske käyrien $y = 4\sqrt{x}$ ja $y = x\sqrt{x}$ väliin jäävän alueen pinta-alan tarkka arvo. 3 p.

4. Lapset hiekkalaatikolla 12 p.

Tiinalla ja Jarilla on menossa tavaransiirtoleikit hiekkalaatikolla. Tiinalla on 2 hiekkasankoa, 4 hiekkalapiota ja yksi hiekkasiivilä. Jarilla on ainoastaan hiekkasankoja ja hiekkasiivilöitä, joita on yhteensä 6 kappaletta.



Lähde: PIXABAY (CCO)


4.1 Tiina siirtää sattumanvaraisesti yhden lelun Jarin lelukasaan ja Jari siirtää sattumanvaraisesti yhden lelun takaisin Tiinan lelukasaan. Todennäköisyys sille, että Tiinalla on leluvaihdoksen jälkeen alkuperäinen määrä erilaisia hiekkaleluja on $\frac{2}{7}$. Kuinka monta hiekkasankoa ja kuinka monta hiekkasiivilää Jarilla on siis tavaravaihtoleikin alussa? 6 p.

4.2 Lastenhoitaja kerää Jarin ja Tiinan hiekkalelut samaan laatikkoon ja nostaa sitten laatikosta kaksi lelua. Todennäköisyys sille, että molemmat lelut ovat hiekkasankkoja on $\frac{5}{26}$. Montako hiekkasankoa Jarilla siis alunperin olikaan? 6 p.

Saat estetyt laskinohjelmat käyttöön palautettuasi A-osan.

Palauta A-osa

Osa 2: B1-osa

 Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Ympyrä kolmion sisällä 12 p.

Kolmion $\Delta(ABC)$ kärkipisteet ovat $A = (-3, -4)$, $B = (9, 0)$ ja $C = (12, -9)$.

5.1 Tutki piirto-ohjelman avulla, mikä on kolmion sisään piirretyn ja mahdollisimman suuren ympyrän keskipiste. 4 p.

5.2 Määritä laskemalla kolmion sisään piirretyn ja mahdollisimman suuren ympyrän yhtälö ja esitä se yleisessä muodossa. 8 p.

6. Trigonometrisia yhtälöitä 12 p.

Esitä ratkaisussasi myös välivaiheet ja käytä kulmayksikkönä radiaaneja.

6.1 Ratkaise $\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 2x + \cos^2 x = 1$ 6 p.

6.2 Suunniteltavan kosinifunktion $f(x)$ ominaisuudet ovat seuraavat: Funktion kuvaajan y-koordinaattien arvot kuuluvat välille $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$, sen jakso on 6π ja $f(\pi) = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$. Määritä funktio $f(x)$. 6 p.

7. Taso- ja avaruusgeometriaa 12 p.

Tarkastellaan funktioiden $f(x) = x + 6$ ja $g(x) = x^2 + 3$ kuvaajien sekä koordinaattiakselien rajaamaa aluetta.

7.1 Piirrä geometriaohjelmalla funktioiden $f(x) = x + 6$ ja $g(x) = x^2 + 3$ kuvaajien sekä koordinaattiakselien rajaama alue. Määritä CAS-laskimella alueen tarkka pinta-ala. 6 p.

7.2 Piirrä geometriaohjelmalla ne pyörähdykappaleet, kun tehtävänannon mukainen alue pyörähtää x -akselin ja y -akselin ympäri. Laske x -akselin ympäri olevan pyörähdykappaleen tilavuus yhden desimaalin tarkkuudella. 6 p.

8. Vektoreista 12 p.

8.1 Kolmion kahtena sivuna ovat samasta pisteestä alkavat vektorit $2x\bar{i} + 3y\bar{j} + 4z\bar{k}$ ja $2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$. Mikä on kolmannen sivun pituuden pienin mahdollinen arvo? 6 p.

8.2 Pisteiden $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ ja $C = (1, 1, t)$ kautta asetetaan taso joka leikkaa z -akselin pisteessä P . Määritä piste P ja vakio t , kun pisteiden A , B ja P sekä origon määräämän tetraedrin tilavuus on 5. 6 p.

9. Alueen tuhoeläinkanta 12 p.

Eräällä alueella on vakiintunut noin 1000 yksilön tuhoeläinkanta, jonka säätelevät ravintotilanne ja ainoa luonnonvarainen vihollinen, ilves. Ilveksenmetsästys alueella kestää 2 viikkoa ja aiheuttaa haittaa myös tuhoeläinkannalle. Tutkimus osoittaa että tuhoeläinten määrä noudattaa yhtälöä

$$N(t) = \frac{1000 \cdot (t-1)}{e^{(2-t)^2}} + 1000, \text{ missä } t \text{ on aika metsästyskauden alusta kuukausina.}$$



Lähde: PIXABAY (CC0)

9.1 Milloin tuhoeläinten lukumäärä on pienin ja milloin suurin? Anna vastaus viikkoina yhden desimaalin tarkkuudella metsästyskauden alusta. Perustele matemaattisesti. 6 p.

9.2 Piirrä geometriaohjelmalla kuvaaja funktiosta ja sen derivaattafunktiosta alueessa $t \in [0,6]$. Millä muuttujan t arvoilla mainitulla välillä derivaattafunktion arvot ovat positiiviset? Mitä tapahtuu, mallin mukaan, tulevaisuudessa tuhoeläinkannalle? Anna sekä matemaattinen että mielestäsi eläinlooginen perustelu. 6 p.

Osa 3: B2-osa

 Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Lentomäen maailmancup 2022 12 p.

Aineistossa on esitetty Planican lentomäen maailmancupin tulokset 25.3.2022. Ensimmäisenä tehtävänä on tehdä tilasto 20 parhaimman mäkihyppäjän mäkihyppyjen pituuksista. Luokittele aineisto kuuteen tasaväliseen luokkaan. Ensimmäisen luokan alaraja on lyhimmän mäkihypyn pituus ja vastaavasti viimeisen luokan yläraja on pisimmän luokan mäkihypyn pituus.



Lähde: PIXABAY (CC0)

Aineisto

10.A Lentomäen maailmancup 2022 tulokset

10.1 Tee luokitellusta aineistosta histogrammi, jossa eri luokkien osuudet on esitetty prosentteina, prosentin kymmenyksen tarkkuudella. Laita vastaukseesi esille myös kuvankaappaus tilastosta, jota olet käsitellyt. 3 p.

10.2 Määritä luokitellusta aineistosta mäkihyppyjen pituuksien keskiarvo. Anna vastaus $\frac{1}{2}$ metrin tarkkuudella, kuten aineistossakin. 3 p.

10.3 Määritä luokitellusta aineistosta mäkihyppyjen pituuksien moodi. Anna vastaus $\frac{1}{2}$ metrin tarkkuudella, kuten aineistossakin. 3 p.

10.4 Määritä luokitellusta aineistosta mäkihyppyjen pituuksien mediaani. Anna vastaus $\frac{1}{2}$ metrin tarkkuudella, kuten aineistossakin. 3 p.

11. Lukuteoriaa ja Ankkalinnan logiikkaa 12 p.

11.1 Luvut $26 + 38^{25}$ ja $43 + 4^{25}$ jaetaan luvulla 17. Osoita, että tällöin jakojäännökset ovat yhtäsuuret. Paljonko tämä jakojäännös on? Huomaa: Älä käytä suoraa laskinkomentoa jakojäännökselle. 6 p.

11.2 Ankkalinnassa kuohuu ja poliisi tutkii tapausta. Roope Ankan tarkoin vartioitu euronkolikko on varastettu. Koska Kalle Ankan veljenpojat Hupu, Tupu ja Lupu myös aikaisemmin ovat otettu kiinni vastaavista rikoksista heitä epäillään taas kerran tapahtuneesta. Ankkapoliisi on selvittänyt eräitä faktoja: (1) Jos Tupu on syyllinen niin Hupu ja Lupu ovat syyttömiä. (2) Vähintään yksi veljeksistä on syytön. (3) Lupu on syyllinen jos ja vain jos Hupu on syytön tai Tupu on syytön. Voisitko auttaa ankkapoliisia langettamaan tuomiot veljeksille? Formalisoi faktalauseet ja käytä totuustaulukkoa lähtien merkinnöistä: H=Hupu on syyllinen, T=Tupu on syyllinen ja L=Lupu on syyllinen. 6 p.



Lähde: PIXABAY (CC0)

12. Nollakohta puolitusmenetelmällä 12 p.

Olkoon funktio $f(x) = x^3 - 9x + e^x + 7$

12.1 Perustele, miksi funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta. 4 p.

12.2 Määritä funktion $f(x)$ nollakohta numeerisesti soveltaen puolitusmenetelmää. Käytä taulukkolaskentaohjelmaa tai vaihtoehtoisesti ohjelmointia apunasi. Valitse ensimmäiselle iteraatiokierrokselle nollakohdan ympäristöstä lähimmät kokonaisluvut, jolloin välin pituudeksi tulee yksi. Sovella puolitusmenetelmää niin monta iteraatiokierrosta, että funktion arvo nollakohdassa poikkeaa nolasta vähemmän kuin 10^{-2} verran. 8 p.

13. Derivoituvuus 12 p.

13.1 Määritä ilman laskinta $f'(16)$ kun $f(x) = (\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}$. Käytä derivaatan määritelmää ja näytä kaikki välivaiheet. 6 p.

13.2 Todista: Derivoituva funktio on jatkuva. 6 p.

Kokeen tehtävät loppuvat tähän.