9 Lukujonot

9.1 Lukujono

LUVUN 9.1 YDINTEHTÄVÄT

901. **a)** Aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten erotus on aina sama vakio. Nyt $d = 7 - 4 = 3$.

Lukujonon sadas jäsen a_{100} saadaan, kun ensimmäiseen jäseneen 4 lisätään 99 kertaa luku 3:
$a_{100} = 4 + 99 \cdot 3 = 301$

Lukujonon yleinen jäsen a_n:
$a_n = a_1 + (n - 1)d = 4 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 1$.
Selvitetään, onko luku 100 jäsenenä lukujonossa eli onko $a_n = 100$ jollakin positiivisella kokonaisluvulla n.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 100 \\
3n + 1 &= 100 \\
3n &= 99 \quad \| :3 \\
n &= 33
\end{aligned}
$$

Luku 100 on siis lukujonon 33. jäsen, eli se on lukujonossa.

b) Geometrisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten suhde on aina sama vakio. Nyt $q = \frac{6}{3} = 2$.

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja suhdeluku $q = 2$, joten yleinen jäsen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$.
Selvitetään yhtälön $3 \cdot 2^{n-1} = 49152$ avulla, kuinka mones lukujonon jäsen on 49152:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot 2^{n-1} &= 49152 \quad \| :3 \\
2^{n-1} &= 16384 \\
2^{n-1} &= 2^{14} \\
n - 1 &= 14 \\
n &= 15
\end{aligned}
$$

Lukujonon $(a_n) = (3, 6, \ldots)$ 15. jäsen on 49152.

902. **a)** Lukujono on aritmeettinen, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus $a_{n+1} - a_n$ on vakio eli ei riipu järjestysnumerosta n.

$a_{n+1} - a_n = (2 - 3(n + 1)) - (2 - 3n) = 2 - 3n - 3 - 2 + 3n = -3$

Peräkkäisten jäsenten erotus –3 on vakio, joten lukujono on aritmeettinen.

b) Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ on vakio eli ei riipu järjestysnumerosta n.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-4 \cdot 5^{(n+1)-1}}{-4 \cdot 5^{n-1}} = \frac{5^n}{5^{n-1}} = 5^{n-(n-1)} = 5^1 = 5$$

Peräkkäisten jäsenten suhde 5 on vakio, joten lukujono on geometrinen.

903. **a)** Aritmeettisen lukujonon tapauksessa tutkitaan peräkkäisten jäsenten erotuksia:

$$a_2 - a_1 = {}^{2)}\frac{7}{6} - {}^{3)}\frac{7}{4} = \frac{14}{12} - \frac{21}{12} = -\frac{7}{12}$$

$$a_3 - a_2 = {}^{2)}\frac{7}{9} - {}^{3)}\frac{7}{6} = \frac{14}{18} - \frac{21}{18} = -\frac{7}{18}$$

Peräkkäisten jäsenten erotus ei ole sama vakio, joten lukujono $(a_n) = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{6}, \frac{7}{9}, \ldots\right)$ ei ole aritmeettinen.

Geometrisen lukujonon tapauksessa tutkitaan peräkkäisten jäsenten suhteita:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{7}{4}} = \frac{7}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{7}{6}} = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{3}$$

Peräkkäisten jäsenten suhde näyttäisi olevan sama vakio, joten lukujono $(a_n) = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{6}, \frac{7}{9}, \ldots\right)$ voisi olla geometrinen.

Jos lukujono on geometrinen, niin lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = \frac{7}{4}$ ja suhdeluku $q = \frac{2}{3}$, jolloin yleisen jäsen kaavalla $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ saadaan $a_n = \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

b) Aritmeettisen lukujonon tapauksessa tutkitaan peräkkäisten jäsenten erotuksia:

$$a_2 - a_1 = \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$$

Peräkkäisten jäsenten erotus näyttäisi olevan sama vakio, joten lukujono $(a_n) = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \ldots\right)$ voisi olla aritmeettinen.

Geometrisen lukujonon tapauksessa tutkitaan peräkkäisten jäsenten suhteita:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{1}{7}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{1} = 3$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$$

Peräkkäisten jäsenten suhde ei ole sama vakio, joten lukujono $(a_n) = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \ldots\right)$ ei voi olla geometrinen.

Jos lukujono on aritmeettinen, niin lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = \frac{1}{7}$ ja erotusluku $d = \frac{2}{7}$, jolloin yleisen jäsen kaavalla $a_n = a_1 + (n - 1)d$ saadaan

$$a_n = \frac{1}{7} + (n-1) \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7}n - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}n - \frac{1}{7}.$$

904. **a)** Lukujono on aritmeettinen, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus $a_{n+1} - a_n$ on vakio.

Nyt
$a_2 - a_1 = x - 2$ ja
$a_3 - a_2 = 8 - x$,
joten erotuslukujen yhtäsuuruudesta saadaan yhtälö $x - 2 = 8 - x$.

Ratkaistaan luku x yhtälöstä $x - 2 = 8 - x$:

$$x - 2 = 8 - x$$
$$x + x = 8 + 2$$
$$2x = 10 \quad \| : 2$$
$$x = 5$$

b) Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ on vakio.

Nyt
$\frac{a_2}{a_1} = \frac{x}{2}$ ja $\frac{a_3}{a_2} = \frac{8}{x}$,

joten suhdelukujen yhtäsuuruudesta saadaan yhtälö $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$.

Ratkaistaan luku x yhtälöstä $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$:

$$\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$$
$$x^2 = 2 \cdot 8$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \sqrt{16} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{16}$$
$$x = 4 \qquad\qquad x = -4$$

905. **a)** Lukujono on aritmeettinen, joten yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Lukujonon jäsenten $a_3 = -3$ ja $a_{15} = 6$ tiedoilla saadaan yhtälöpari ja sen ratkaisuna a_1 ja d.

$\begin{cases} a_3 = a_1 + (3-1)d = a_1 + 2d \\ a_{15} = a_1 + (15-1)d = a_1 + 14d \end{cases}$ eli nyt $\begin{cases} a_1 + 2d = -3 \\ a_1 + 14d = 6 \end{cases}$, josta ratkaisuna

saadaan $\begin{cases} a_1 = -\dfrac{9}{2} \\ d = \dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Yleinen jäsen on $a_n = -\dfrac{9}{2} + (n-1)\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}n - \dfrac{21}{4}$.

Toinen tapa:
Koska lukujono on aritmeettinen, lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen sama vakio d.

Siis $a_{15} = a_3 + 12d$ 2eli $6 = -3 + 12d$. Tästä saadaan $d = \dfrac{3}{4}$.

Nyt $a_1 = a_3 - 2d = -3 - 2\cdot\dfrac{3}{4} = -\dfrac{9}{2}$.

Yleinen jäsen on nyt $a_n = -\dfrac{9}{2} + (n-1)\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}n - \dfrac{21}{4}$.

b) Lukujono on geometrinen, joten yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Lukujonon jäsenten $a_2 = \dfrac{9}{4}$ ja $a_6 = \dfrac{4}{9}$ tiedoilla saadaan yhtälöpari ja sen ratkaisuna a_1 ja q.

$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} \\ a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} \end{cases}$ eli nyt $\begin{cases} a_1 \cdot q = \dfrac{9}{4} \\ a_1 \cdot q^5 = \dfrac{4}{9} \end{cases}$, josta ratkaisuna saadaan

$\begin{cases} a_1 = \dfrac{27}{8} \\ q = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ tai $\begin{cases} a_1 = -\dfrac{27}{8} \\ q = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Yleinen jäsen on joko $a_n = \dfrac{27}{8}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ tai $a_n = -\dfrac{27}{8}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

Toinen tapa:
Koska lukujono on geometrinen, lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen samalla vakiolla q.

Siis $a_6 = a_2 \cdot q^4$ eli $\frac{4}{6} = \frac{9}{4} \cdot q^4$. Tästä saadaan $q = \pm\frac{2}{3}$.

Jos $q = \frac{2}{3}$, niin $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{8}$.

Jos $q = -\frac{2}{3}$, niin $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{\frac{9}{4}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{27}{8}$.

Yleinen jäsen on siis joko $a_n = \frac{27}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ tai $a_n = -\frac{27}{8} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

906. **a)**

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \sqrt{1+3a_1} = \sqrt{1+3\cdot 1} = \sqrt{4} = 2$$
$$a_3 = \sqrt{1+3a_2} = \sqrt{1+3\cdot 2} = \sqrt{7}$$
$$a_4 = \sqrt{1+3a_3} = \sqrt{1+3\cdot\sqrt{7}} = \sqrt{1+3\sqrt{7}}$$

b)

1	1
2	2
3	2.64575
4	2.98952
5	3.1573
6	3.23603
7	3.27232
8	3.28892
9	3.29648
10	3.29991
11	3.30148

Lukujonon 11. jäsen on ensimmäinen, joka ylittää luvun 3,3.

907. Ensimmäinen välille [999, 9999] sijoittuva luvulla 7 jaollinen kokonaisluku on 1001, sillä $\frac{1001}{7}=143$.

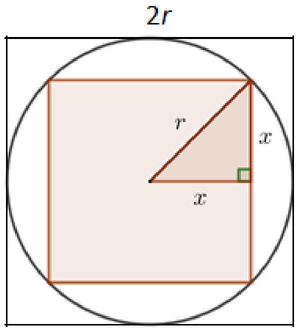
Kaikki luvulla 7 jaolliset välillä [999, 9999] olevat kokonaisluvut voidaan esittää muodossa $a_n = 1001 + (n - 1) \cdot 7 = 7n + 994$.

Selvitetään, kuinka mones lukujonon (a_n) jäsen ei vielä ylitä lukua 9999 hakemalla epäyhtälön $7n + 994 < 9999$ suurin positiivinen kokonaislukuratkaisu.

Epäyhtälön ratkaisu on $x < 1286{,}42\ldots$ Suurin tämän ehdon täyttävä kokonaisluku on siis 1286, joten lukujonon 1286. jäsen on suurin välille [999, 9999] sijoittuva luvulla 7 jaollinen kokonaisluku ($a_{1286} = 7 \cdot 1286 + 994 = 9996$).

Välillä [999, 9999] on siis 1286 luvulla 7 jaollista kokonaislukua.

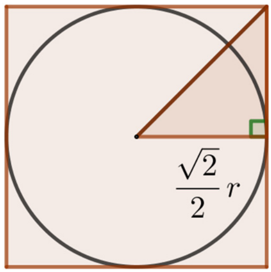
908. Olkoon isoimman neliön sivun pituus $2r$, $r > 0$, jolloin isoimman ympyrän säde on r ja sen pinta-ala πr^2.



Isoimman ympyrän, jonka säde on r, sisälle piirretyn neliön sivun pituuden puolikas x, $x > 0$, saadaan Pythagoraan lauseen avulla:

$x^2 + x^2 = r^2$, josta $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r$.

Neliön sivun puolikas on samalla neliön sisälle piirretyn ympyrän säde.
Toiseksi isoimman ympyrän pinta-ala on siis $\pi(\dfrac{\sqrt{2}}{2}r)^2 = \dfrac{\pi r^2}{2}$.



Koska kuviota toistetaan täsmälleen samanlaisina, ympyröiden pinta-alat muodostavan geometrisen lukujonon $\pi r^2, \dfrac{\pi r^2}{2}, \dfrac{\pi r^2}{4}, \ldots$ jonka suhdeluku $q = \dfrac{1}{2}$.

Lukujonon yleinen jäsen on siis $a_n = \pi r^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Selvitetään, mikä on pienin kokonaisluku n, jolla $a_n < \dfrac{1}{1000\,000} \cdot \pi r^2$.

Ratkaistaan n yhtälöstä $\pi r^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{1000\,000} \cdot \pi r^2$ ja päätellään yhtälön ratkaisusta pienin ehdot täyttävä kokonaisluku.
Yhtälön ratkaisu on $n = 20{,}93\ldots$, josta pienin ehdot täyttävä kokonaisluku on 21.

Siis 21. ympyrä on ensimmäinen, jonka pinta-ala on alle miljoonasosa alkuperäisen ympyrän pinta-alasta.

9.2 Summa

LUVUN 9.2 YDINTEHTÄVÄT

909. **a)** Yhteenlaskettavat ovat aritmeettisen lukujonon $a_n = -2n + 5$ ensimmäiset jäsenet 3, 1, –1, –3, …, $-2n + 5$, … ja 3113.

Selvitetään yhtälön $-2n + 5 = -3113$ avulla, kuinka mones aritmeettisen lukujonon (3, 1, –1, 3, …) jäsen luku 3113 on.

$$-2n + 5 = -3113$$
$$-2n = -3118 \quad \|:(-2)$$
$$n = 1559$$

Summassa on siis 1559 ensimmäistä aritmeettisen lukujonon $a_n = -2n + 5$ jäsentä.

Summa $3 + 1 - 1 - 3 - \ldots + (-2n + 5) + \ldots - 3113$ on siis

$$S_{1559} = 1559 \cdot \frac{3 + (-3113)}{2} = -2\ 424\ 245.$$

b) Yhteenlaskettavat ovat geometrisen lukujonon $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ensimmäiset jäsenet $3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \ldots, 3 \cdot 2^{n-1}, \ldots$ ja $3 \cdot 2^{10}$.

Lukujonon suhdeluku $q = \frac{3 \cdot 2}{3} = 2.$

Selvitetään yhtälön $3 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{10}$ avulla, kuinka mones geometrisen lukujonon $(3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \ldots)$ jäsen luku $3 \cdot 2^{10}$ on.

$$3 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{10} \quad \|:3$$
$$2^{n-1} = 2^{10}$$
$$n - 1 = 10$$
$$n = 11$$

Summassa on siis 11 ensimmäistä geometrisen lukujonon $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ jäsentä.
Summa $3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 3 \cdot 2^{n-1} + \ldots + 3 \cdot 2^{10}$ on siis

$$S_{11} = \frac{3 \cdot (1 - 2^{11})}{1 - 2} = 6141.$$

Toinen tapa:
Yhteenlaskettavat ovat geometrisen lukujonon $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ensimmäiset jäsenet $3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \ldots, 3 \cdot 2^{n-1}, \ldots$ ja $3 \cdot 2^{10}$.

Lausekkeesta $3 \cdot 2^{n-1}$ nähdään, että $q = 2$.
Koska $3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 3 \cdot 2^{n-1} + \ldots + 3 \cdot 2^{10}$
$= 3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 3 \cdot 2^{n-1} + \ldots + 3 \cdot 2^{10}$
nähdään, että yhteenlaskettavia on 11.

Summa $3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 3 \cdot 2^{n-1} + \ldots + 3 \cdot 2^{10}$ on siis

$$S_{11} = \frac{3 \cdot (1 - 2^{11})}{1 - 2} = 6141.$$

910.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6} \frac{3}{k} &= \frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \\
&= 3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \\
&= 4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + {}^{5)}\frac{3}{4} + {}^{4)}\frac{3}{5} \\
&= 4 + \frac{4}{2} + \frac{15}{20} + \frac{12}{20} \\
&= 6 + \frac{15}{20} + \frac{12}{20} \\
&= 6 + \frac{27}{20} \\
&= 7\frac{7}{20}
\end{aligned}$$

911. **a)** Yhteenlaskettavat ovat aritmeettisen lukujonon (5, 7, 9, …) ensimmäiset jäsenet.

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 5$ ja erotusluku $d = 7 - 5 = 2$.
Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 2 = 5 + 2n - 2 = 2n + 3$.

Summassa on 15 yhteenlaskettavaa.
Summa voidaan kirjoittaa ∑-merkkiä käyttäen siis muodossa

$$\sum_{n=1}^{15} (2n+3).$$

Aritmeettisen summan kaavalla saadaan

$$S_{15} = 15 \cdot \frac{5+33}{2} = 285.$$

b) Yhteenlaskettavat ovat geometrisen lukujonon (1, 3, 9, ...) ensimmäiset jäsenet.

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$ ja suhdeluku $q = 3$. Lukujonon yleinen jäsen on siis $a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$.

Selvitetään yhtälön $3^{n-1} = 3^{20}$ avulla, kuinka mones geometrisen lukujonon (1, 3, 9, …) jäsen luku 3^{20} on.

$$\begin{aligned} 3^{n-1} &= 3^{20} \\ n - 1 &= 20 \\ n &= 21 \end{aligned}$$

(tai $1 + 3 + 9 + \ldots 3^{20} = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots 3^{20}$, joten summassa on 21 yhteenlaskettavaa)

Summa voidaan kirjoittaa ∑-merkkiä käyttäen siis muodossa $\sum_{n=1}^{21} 3^{n-1}$.

Geometrisen summan kaavalla saadaan

$$S_{21} = \frac{1(1-3^{21})}{1-3} = 5\ 230\ 176\ 601.$$

912. **a)** Kaikki luvuilla 2 ja 3 jaolliset luvut ovat jaollisia luvulla $2 \cdot 3 = 6$.
Ensimmäinen kolminumeroinen luvulla 6 jaollinen luku on 102, sillä
$\frac{102}{6} = 17$.

Luvulla 6 jaolliset kolminumeroiset luvut ovat siis muotoa
$a_n = 102 + 6(n - 1) = 6n + 96$.
Selvitetään epäyhtälön avulla, mikä on suurin kokonaisluku, jolle
$6n + 96 \leq 999$.

$$
\begin{aligned}
6n + 96 &\leq 999 \\
6n &\leq 903 \quad \| : 6 \\
n &\leq 150{,}5
\end{aligned}
$$

Suurin epäyhtälön toteuttava kokonaisluku on siis 150, joten kolminumeroisia luvulla 6 jaollisia lukuja on 150.

Lukujonon $a_n = 6n + 96$ 150. jäsen on $a_{150} = 6 \cdot 150 + 96 = 996$.

Ehdot täyttävien lukujen summa on siis $S_{150} = 150 \cdot \frac{102 + 996}{2} = 82350$.

b) Summassa $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 1000$ on 1000 ensimmäistä positiivista kokonaislukua ja tämä aritmeettinen summa on
$S_{1000} = 1000 \cdot \frac{1 + 1000}{2} = 500500$.

Summassa $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 1000$ on viidellä jaolliset luvut 5, 10, 15, …, 995 ja 1000. Nämä luvut voidaan esittää muodossa $a_n = 5n$.
Luku 1000 on lukujonon (a_n) 200. jäsen, sillä $a_{200} = 5 \cdot 200 = 1000$.

Viidellä jaollisten lukujen 5, 10, …, 995 ja 1000 aritmeettinen summa on $S_{200} = 200 \cdot \frac{5 + 1000}{2} = 100500$.

Jäljelle jäävien yhteenlaskettavien summa on siis
$500500 - 100500 = 400000$.

913. **a)** Summa –1 + 2 + 5 + … + $3n$ – 4 = 146 171 on aritmeettisen lukujonon (–1, 2, 5, …, $3n$ – 4, …) n:n ensimmäisen jäsenen summa.

Ratkaistaan lukujonon jäsenten lukumäärä n, $n > 0$, aritmeettisen summan kaavalla $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$:

$n \cdot \frac{-1+(3n-4)}{2} = 146171$, josta $n = 313$ (tai n = –311,3…)

b) Summa 4 + 16 + … + 4^n = 89 478 484 on geometrisen lukujonon (4, 16, …, 4^n, …) n:n ensimmäisen jäsenen summa.
Lukujonon suhdeluku on $q = \frac{16}{4} = 4$.

Ratkaistaan lukujonon jäsenten lukumäärä n, $n > 0$ summakaavasta
$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}$.

Yhtälön $\frac{4(1-4^n)}{1-4} = 89\ 478\ 484$ ratkaisu on $n = 13$.

914. Säilyketölkit kerroksittain muodostavat aritmeettisen lukujonon (1, 2, 3, …), jossa lukujonon yleinen jäsen on $a_n = n$.

Summakaavasta $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ saadaan yhtälö $n \cdot \frac{1+n}{2} = 1000$, jonka ratkaisuna saadaan kerrosten lukumäärä n, $n > 0$.

Yhtälön ratkaisut ovat n = 44,22… (tai n = −45,22…).
Säilyketölkeistä voidaan pinota siis 44 kerrosta.
Tähän rakennelmaan menee yhteensä $S_{44} = 44 \cdot \frac{1+44}{2} = 990$ tölkkiä, joten tölkkejä jää yli 10.

915. Vuosittaiset hiilidioksidipäästöt muodostavat geometrisen lukujonon. Valitaan jonon ensimmäiseksi jäseneksi vuoden 2018 hiilidioksidipäästö $0{,}95 \cdot 56$ (milj. tonnia).

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla vuosien 2018–2050 hiilidioksidipäästöt ja näiden kokonaissumma, kun päästöt vähenevät 5 % vuodessa, eli tulevat 0,95.kertaisiksi.

Taulukkolaskenta

	A	B
1	Vuosi	Hiilidioksidipäästöt (milj. tonnia)
2	2018	53.2
3	2019	50.54
4	2020	48.01
5	2021	45.61
6	2022	43.33
7	2023	41.17
8	2024	39.11
9	2025	37.15
10	2026	35.29
11	2027	33.53
12	2028	31.85
13	2029	30.26
14	2030	28.75
15	2031	27.31
16	2032	25.94
17	2033	24.65
18	2034	23.41
19	2035	22.24
20	2036	21.13
21	2037	20.08
22	2038	19.07
23	2039	18.12
24	2040	17.21
25	2041	16.35
26	2042	15.53
27	2043	14.76
28	2044	14.02
29	2045	13.32
30	2046	12.65
31	2047	12.02
32	2048	11.42
33	2049	10.85
34	2050	10.31
35		
36		Vuosien 2018-2050 päästöt yht.
37		868.2

Vuoden 2050 hiilidioksidipäästöt ovat 10,3 miljoonaa tonnia, jos päästöjen väheneminen jatkuu samalla tavalla.

Vuosien 2018–2050 päästöt ovat yhteensä 868 miljoonaa tonnia.

Toinen tapa:
Vuosittaiset hiilidioksidipäästöt muodostavat geometrisen lukujonon. Valitaan jonon ensimmäiseksi jäseneksi vuoden 2018 hiilidioksidipäästö $0{,}95 \cdot 56 = 53{,}2$ (milj. tonnia).

Nyt $a_n = 53{,}2 \cdot 0{,}95^{n-1}$.
Vuonna 2050 päästöt ovat
$a_{33} = 53{,}2 \cdot 0{,}95^{32} = 10{,}305\ldots \approx 10{,}3$ miljoonaa tonnia.

Vuosien 2018 -2050 päästöt ovat yhteensä

$$S_{33} = \frac{53{,}2(1-0{,}95^{33})}{1-0{,}95} = 868{,}19\ldots \approx 868 \text{ miljoonaa tonnia.}$$

916. **a)** Aritmeettisen lukujonon 12. jäsen a_{12} voidaan esittää lukujonon 3. jäsenen a_3 ja erotusluvun d avulla:
$a_{12} = a_3 + 9d$ eli $166 = 13 + 9d$, josta $d = 17$.

$a_{12} = a_3 + 9d$ eli $166 = 13 + 9d$, josta $d = 17$.

Koska $a_3 = a_1 + 2d$, niin $13 = a_1 + 2 \cdot 17$ mistä $a_1 = -21$.

Lukujonon yleinen jäsen $a_n = a_1 + (n - 1)d$ on siten
$a_n = -21 + (n - 1) \cdot 17 = 17n - 38$.

Lukujonon (a_n) jäsenten $a_{15}, a_{16}, \ldots, a_{30}$ summa voidaan laskea lukujonon summien S_{30} ja S_{14} erotuksena. Lasketaan summissa tarvittavat lukujonon jäsenet a_{30} ja a_{14}:
$a_{30} = -21 + (30 - 1) \cdot 17 = 472$
$a_{14} = -21 + (14 - 1) \cdot 17 = 200$

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{-21 + 472}{2} = 6765$$

$$S_{14} = 14 \cdot \frac{-21 + 200}{2} = 1253$$

Lukujonon (a_n) jäsenten $a_{15}, a_{16}, \ldots, a_{30}$ summa on siis
$S_{30} - S_{14} = 6765 - 1253 = 5512$.

Toinen tapa:
Koska lukujono on aritmeettinen, lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen vakio d.
$a_{12} = a_3 + 9d$ eli $166 = 13 + 9d$, josta $d = 17$.

Nyt $a_{15} = a_{12} + 3d = 166 + 3 \cdot 17 = 217$ ja
$a_{30} = a_{12} + 18d = 166 + 18 \cdot 17 = 472$.

Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{15} = 217$, viimeinen $a_{30} = 472$, ja yhteenlaskettavia lukuja on 16.
Aritmeettisen summan kaavalla saadaan

$$16 \cdot \frac{217 + 472}{2} = 5512.$$

b) Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, joten tiedoista $a_5 = 163\ 840$ ja $a_{10} = -5120$ saadaan yhtälöpari ja sen ratkaisuna a_1 ja q:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^{5-1} = 163\ 840 \\ a_1 \cdot q^{10-1} = -5120 \end{cases},$$

josta $a_1 = 2\ 621\ 440$ ja $q = -\frac{1}{2}$.

Lukujonon (a_n) jäsenten $a_{15}, a_{16}, \ldots, a_{30}$ summa voidaan laskea lukujonon summien S_{30} ja S_{14} erotuksena:

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{14} &= \frac{2\ 621\ 440 \cdot (1-(-\frac{1}{2})^{30})}{1-(-\frac{1}{2})} - \frac{2\ 621\ 440 \cdot (1-(-\frac{1}{2})^{14})}{1-(-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{109225}{1024} \\ &= 106\frac{681}{1024} \end{aligned}$$

Lukujonon (a_n) jäsenten $a_{15}, a_{16}, \ldots, a_{30}$ summa on siis $S_{30} - S_{14} = 6765 - 1253 = 5512$.

Toinen tapa:
Koska lukujono on geometrinen, lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen vakiolla q.

$a_{10} = a_5 \cdot q^5$ eli $-5120 = 163840 \cdot q^5$, josta $q = -\frac{1}{2}$.

Nyt $a_{15} = a_{10} \cdot q^5 = -5120 \cdot (-\frac{1}{2})^5 = 160$.

Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{15} = 160$,

yhteenlaskettavia lukuja on 16 ja $q = -\frac{1}{2}$.

Geometrisen summan kaavalla saadaan

$$\frac{160(1-(-\frac{1}{2})^{16})}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{109225}{1024} = 106\frac{681}{1024}.$$

Luvun 9 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

917. **a)** Aritmeettisesta lukujonosta tiedetään $a_3 = 6$ ja $a_5 = 12$. Lukujonon viides jäsen saadaan, kun kolmanteen jäseneen lisätään erotusluku d kaksi kertaa: $a_5 = a_3 + 2d$.
Nyt $12 = 6 + 2d$, josta $2d = 6$ ja edelleen $d = 3$.

Lukujonon kolmas jäsen saadaan, kun ensimmäiseen jäseneen lisätään erotusluku d kaksi kertaa: $a_3 = a_1 + 2d$.
Siis $6 = a_1 + 2 \cdot 3$, josta $a_1 = 0$.

Lukujonon toinen jäsen saadaan, kun ensimmäiseen jäseneen lisätään erotusluku d: $a_2 = a_1 + d$.
Siis $a_2 = 0 + 3 = 3$.

Loput puuttuvat lukujonon jäsenet ovat
$a_4 = a_3 + d = 6 + 3 = 9$
$a_6 = a_5 + d = 12 + 3 = 15$
$a_7 = a_6 + d = 15 + 3 = 18$.

Siis $\underline{0}$, $\underline{3}$, 6, $\underline{9}$, 12, $\underline{15}$, $\underline{18}$, …

Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen $a_n = a_1 + (n - 1)d$ on siten
$a_n = 0 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 3$ ja $a_{10} = 3 \cdot 10 - 3 = 27$.
Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{0 + 27}{2} = 135.$$

Toinen tapa:
Aritmeettisesta lukujonosta tiedetään $a_3 = 6$ ja $a_5 = 12$. Lukujonon viides jäsen saadaan, kun kolmanteen jäseneen lisätään erotusluku d kaksi kertaa: $a_5 = a_3 + 2d$.
Nyt $12 = 6 + 2d$, josta $2d = 6$ ja edelleen $d = 3$.

$a_2 = a_3 - d = 6 - 3 = 3$
$a_1 = a_2 - d = 3 - 3 = 0$
$a_4 = a_3 + d = 6 + 3 = 9$
$a_6 = a_5 + d = 12 + 3 = 15$
$a_7 = a_6 + d = 15 + 3 = 18.$

Siis $\underline{0}$, $\underline{3}$, 6, $\underline{9}$, 12, $\underline{15}$, $\underline{18}$, …

$a_{10} = a_7 + 3d = 18 + 3 \cdot 3 = 27.$
Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on
$S_{10} = 10 \cdot \frac{0+27}{2} = 135.$

b) Geometrisesta lukujonosta tiedetään $a_3 = 6$ ja $a_5 = 12$. Lukujonon viides jäsen saadaan, kun kolmas jäsen kerrotaan suhdeluvulla q kaksi kertaa: $a_5 = a_3 \cdot q^2$.
Nyt $12 = 6 \cdot q^2$, josta $q^2 = 2$ ja edelleen $q = \sqrt{2}$ tai $q = -\sqrt{2}$.

Tapaus $q = \sqrt{2}$:
Lukujonon kolmas jäsen saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan suhdeluvulla q kaksi kertaa: $a_3 = a_1 \cdot q^2$.
Siis $6 = a_1 \cdot (\sqrt{2})^2$, josta $6 = a_1 \cdot 2$ ja edelleen $a_1 = 3$.

Lukujonon toinen jäsen saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan suhdeluvulla q: $a_2 = a_1 \cdot q$.
Siis $a_2 = 3 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$

Loput puuttuvat lukujonon jäsenet ovat

$a_4 = a_3 \cdot q = 6 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$a_6 = a_5 \cdot q = 12 \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

$a_7 = a_6 \cdot q = 12\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 24.$

Siis $\underline{3}, \underline{\ 3\sqrt{2}}, 6, \underline{\ 6\sqrt{2}}, 12, \underline{12\sqrt{2}}, 24, ...$

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{3(1-(\sqrt{2})^{10})}{1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{3(1-((\sqrt{2})^2)^5}{1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{3(1-2^5)}{1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{3(1-32)}{1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{-93}{-(\sqrt{2}-1)} \\ &= \frac{93}{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$

Tapaus $q = -\sqrt{2}$:

Lukujonon kolmas jäsen saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan suhdeluvulla q kaksi kertaa: $a_3 = a_1 \cdot q^2$.

Siis $6 = a_1 \cdot (-\sqrt{2})^2$, josta $6 = a_1 \cdot 2$ ja edelleen $a_1 = 3$.

Lukujonon toinen jäsen saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan suhdeluvulla q: $a_2 = a_1 \cdot q$.

Siis $a_2 = 3 \cdot (-\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}$.

Loput puuttuvat lukujonon jäsenet ovat

$a_4 = a_3 \cdot q = 6 \cdot (-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}$

$a_6 = a_5 \cdot q = 12 \cdot (-\sqrt{2}) = -12\sqrt{2}$

$a_7 = a_6 \cdot q = -12\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = 24.$

Siis $\underline{3}, \underline{\ -3\sqrt{2}}, 6, \underline{\ -6\sqrt{2}}, 12, \underline{-12\sqrt{2}}, 24, ...$

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on

$$
\begin{aligned}
S_{10} &= \frac{3(1-(-\sqrt{2})^{10})}{1-(-\sqrt{2})} \\
&= \frac{3(1-((-\sqrt{2})^{2})^{5}}{1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{3(1-2^{5})}{1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{3(1-32)}{1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{-93}{\sqrt{2}+1} \\
&= -\frac{93}{\sqrt{2}+1}.
\end{aligned}
$$

Toinen tapa:
Geometrisesta lukujonosta tiedetään $a_3 = 6$ ja $a_5 = 12$. Lukujonon viides jäsen saadaan, kun kolmas jäsen kerrotaan suhdeluvulla q kaksi kertaa: $a_5 = a_3 \cdot q^2$.
Nyt $12 = 6 \cdot q^2$, josta $q^2 = 2$ ja edelleen $q = \sqrt{2}$ tai $q = -\sqrt{2}$.

Tapaus $q = \sqrt{2}$:

$$a_2 = \frac{a_3}{q} = {}^{\sqrt{2})}\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 6 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$a_6 = a_5 \cdot q = 12 \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$$a_7 = a_6 \cdot q = 12\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 24.$$

Siis $\underline{3}$, $\underline{3\sqrt{2}}$, 6, $\underline{6\sqrt{2}}$, 12, $\underline{12\sqrt{2}}$, 24, ...

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_{10} = \frac{3(1-(\sqrt{2})^{10})}{1-\sqrt{2}} = \frac{-93}{1-\sqrt{2}} = \frac{93}{-(1-\sqrt{2})} = \frac{93}{\sqrt{2}-1}.$$

Tapaus $q = -\sqrt{2}$:

$$a_2 = \frac{a_3}{q} = {}^{\sqrt{2})}\ \frac{6}{-\sqrt{2}} = -\frac{6\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{-3\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 3$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 6 \cdot (-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}$$

$$a_6 = a_5 \cdot q = 12 \cdot (-\sqrt{2}) = -12\sqrt{2}$$

$$a_7 = a_6 \cdot q = -12\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = 24.$$

Siis $\underline{3}$, $\underline{-3\sqrt{2}}$, 6, $\underline{-6\sqrt{2}}$, 12, $\underline{-12\sqrt{2}}$, 24, ...

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_{10} = \frac{3(1-(-\sqrt{2})^{10})}{1-(-\sqrt{2})} = \frac{-93}{1+\sqrt{2}} = -\frac{93}{\sqrt{2}+1}.$$

918. A: Jos lukujono on aritmeettinen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, joka ei riipu järjestysnumerosta n.

$a_{n+1} - a_n = (3 - (n + 1)) - (3 - n) = 3 - n - 1 - 3 + n = -1$

Peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, joka ei riipu järjestysnumerosta n. Lukujono $a_n = 3 - n$ on siis aritmeettinen.

Jos lukujono on geometrinen, niin peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, joka ei riipu järjestysnumerosta n.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3-(n+1)}{3-n} = \frac{2-n}{3-n}$$

Peräkkäisten jäsenten suhde riippuu järjestysnumerosta n. Lukujono $a_n = 3 - n$ ei siis voi olla geometrinen.

Koska lukujono on aritmeettinen ja erotusluku $d = -1$, niin lukujono $a_n = 3 - n$ ei voi olla vakiojono.

Siis A–I

B: Aloitetaan tutkimalla peräkkäisten jäsenten erotusta

$a_{n+1} - a_n = \sin(\pi(n + 1)) - \sin(\pi n) = \sin(k\pi) = 0$

Peräkkäisten jäsenten erotus on vakio 0, joka ei riipu järjestysnumerosta n.

Lukujono $a_n = \sin(\pi n)$ on aritmeettinen.

Koska lukujonon $a_n = \sin(\pi n)$ jokainen jäsen on 0, ei peräkkäisten jäsenten suhdetta voi määrittää. Lukujono $a_n = \sin(\pi n)$ ei siis voi olla geometrinen.

Lukujono $a_n = \sin(\pi n)$ on vakiojono (0, 0, 0, 0, …).

Siis B–I, III

C: $a_{n+1} - a_n = e^{n+1} - e^n$, joka riippuu järjestysnumerosta n. Lukujono $a_n = e^n$ ei voi olla aritmeettinen.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{e^n} = e^{n+1-n} = e^1 = e$$

Peräkkäisten jäsenten suhde on vakio eli sen arvo ei riipu järjestysnumerosta n. Lukujono $a_n = e^n$ on siis geometrinen.

Lukujono on e, e^2, e^3, … ei voi olla vakiojono.

Siis C–II

D: Osamäärä on $\frac{a_{100}}{a_{99}} = \frac{\cancel{5} \cdot 7^{100}}{\cancel{5} \cdot 7^{99}} = 7^{100-99} = 7^1 = 7.$

Siis D–II

Toinen tapa:
Lausekkeesta $a_n = 5 \cdot 7^n$ nähdään, että lukujono on geometrinen ja $q = 7$. Näin ollen peräkkäisten jäsenten a_{100} ja a_{99} suhde on 7.

E: Erotus
$$\begin{aligned} a_{100} - a_{99} &= (5 + 7 \cdot 100) - (5 + 7 \cdot 99) \\ &= 5 + 7 \cdot 100 - 5 - 7 \cdot 99 \\ &= 100 \cdot 7 - 99 \cdot 7 \\ &= (100 - 99) \cdot 7 \\ &= 1 \cdot 7 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Siis E–II

Toinen tapa:
Lausekkeesta $a_n = 5 + 7n$ nähdään, että lukujono on aritmeettinen ja $d = 7$. Näin ollen peräkkäisten jäsenten a_{100} ja a_{99} erotus on 7.

F: Summa 1 + 2 + 3+ … + 99 + 100 on aritmeettisen lukujonon (1, 2, 3, …, 99, 100, …) sadan ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{1+100}{2} = 5050.$$

Siis F–III

919. **a)** Lukujono (5, 10, 15, 20, …, $5n$) on aritmeettinen. Määritetään n:n, $n \geq 1$, arvo summakaavan $S_n = n \cdot \frac{5+5n}{2}$ ja tiedon $S_n = 1050$ avulla.

$$n \cdot \frac{5+5n}{2} = 1050 \quad || \cdot 2$$
$$n(5+5n) = 2 \cdot 1050$$
$$5n^2 + 5n - 2100 = 0 \quad || :5$$
$$n^2 + n - 420 = 0$$
$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420)}}{2 \cdot 1}$$
$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2}$$
$$n = \frac{-1 \pm 41}{2}$$
$$n = \frac{-1+41}{2} \quad (\text{tai } n = \frac{-1-41}{2})$$
$$n = 20$$

b) Kirjoitetaan yhtälön vasemmanpuolen lauseke tulomuotoon:
$3^x + 2 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x + \ldots + 30 \cdot 3^x = (1 + 2 + 3 + \ldots + 30) \cdot 3^x$.

Summa $1 + 2 + 3 + \ldots + 30$ on

$S_{30} = 30 \cdot \frac{1+30}{2} = 465$, joten yhtälö

$3^x + 2 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x + \ldots + 30 \cdot 3^x = 15 \cdot 31 \cdot 81$
voidaan kirjoittaa muotoon
$465 \cdot 3^x = 15 \cdot 31 \cdot 81$ josta saadaan $3^x = 81$.

Koska $3^4 = 81$, niin yhtälön ratkaisu on $x = 4$.

c) Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = \frac{3}{100}$ ja suhdeluku

$$q = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{100}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{100}{3} = 10.$$

Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on

$$a_n = \frac{3}{100} \cdot 10^{n-1} = \frac{3}{100} \cdot 10^n \cdot 10^{-1} = \frac{3}{100} \cdot 10^n \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{1000} \cdot 10^n.$$

Selvitetään kysytty *n*:n arvo yleisen termin $\frac{3}{1000} \cdot 10^n$ avulla.

Funktio 10^x on kasvava funktio, joten lausekkeen $\frac{3}{1000} \cdot 10^n$ arvot kasvavat tuntemattoman *n* kasvaessa.

Koska $\frac{3}{1000} \cdot 10^9 = 3\ 000\ 000$ ja $\frac{3}{1000} \cdot 10^{10} = 30\ 000\ 000,$ niin pienin ehdot täyttävä kokonaisluku *n* on 10.

Toinen tapa:
Geometrisen lukujonon

ensimmäinen jäsen $a_1 = \frac{3}{100}$ ja suhdeluku $q = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{100}} = 10.$

Lukujonon yleinen jäsen on siis $a_n = \frac{3}{100} \cdot 10^{n-1}$

Selvitetään kysytty *n*:n arvo yhtälön avulla.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{100} \cdot 10^{n-1} &= 3\ 000\ 001 \quad \| \cdot \frac{100}{3} \\
10^{n-1} &= \frac{300000100}{3} \\
n - 1 &= \log_{10} \frac{300000100}{3} \\
n - 1 &= 8{,}0000001.... \\
n &= 9{,}0000001...
\end{aligned}$$

Koska lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellistä luvulla 10, lukujonon jäsenet ovat sitä suurempia mitä suurempi *n* on. Siis ensimmäisen luvun 3000001 ylittävä jäsen on lukujonon 10. luku.

920. **a)** Kolmion kaksi muuta kulmaa ovat 100° + *d* ja 100° + 2*d*.
Koska kolmion kulmien summa on 180°, saadaan yhtälö
$100 + (100 + d) + (100 + 2d) = 180$, josta $d = -40$.

Kysytyt kulmat ovat siis
100°, 100° – 40° = 60° ja 100° – 2 · 40° = 20°.

Toinen tapa:
Kolmion suurin kulma on 100°, joten kolmion kulmat ovat 100° – 2*d*, 100° – *d* ja 100°.

Koska kolmion kulmien summa on 180°, saadaan yhtälö
$(100 - 2d) + (100 - d) + 100 = 180$, josta $d = 40$.

Kysytyt kulmat ovat siis
100° – 2 · 40° = 20°, 100° – 40° = 60° ja 100°.

b) Kolmion kaksi muuta kulmaa ovat $\frac{9\pi}{13} \cdot q$ ja $\frac{9\pi}{13} \cdot q^2$.
Koska kolmion kulmien summa on π, saadaan yhtälö
$\frac{9\pi}{13} + \frac{9\pi}{13} \cdot q + \frac{9\pi}{13} \cdot q^2 = \pi$, josta $q = -\frac{4}{3}$ tai $q = \frac{1}{3}$.

Koska kulmat positiivisia, niin $q = \frac{1}{3}$.

Kysytyt kulmat ovat $\frac{9\pi}{13}$, $\frac{9\pi}{13} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3\pi}{13}$ ja $\frac{9\pi}{13} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{9\pi}{13} \cdot \frac{1}{9} = \frac{\pi}{13}$.

Toinen tapa:

$\frac{9\pi}{13} = \frac{9 \cdot 180°}{13} = 124,6...°$, joten $\frac{9\pi}{13}$ on kolmion suurin kulma.

Kolmion kulmat ovat siis $\frac{\frac{9\pi}{13}}{q^2}$, $\frac{\frac{9\pi}{13}}{q}$, ja $\frac{9\pi}{13}$.

Koska kolmion kulmien summa on π, saadaan yhtälö

$\frac{\frac{9\pi}{13}}{q^2} + \frac{\frac{9\pi}{13}}{q} + \frac{9\pi}{13} = \pi$, josta $q = 3$.

Kysytyt kulmat ovat siis $\frac{\frac{9\pi}{13}}{3^2} = \frac{\pi}{13}$, $\frac{\frac{9\pi}{13}}{3} = \frac{3\pi}{13}$ ja $\frac{9\pi}{13}$.

921. **a)** Nyt $a_1 = -5$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, josta $a_n - a_{n-1} = 2$. Koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, joka ei riipu järjestysluvusta n, lukujono on aritmeettinen. Lukujonon yleinen jäsen on siis
$a_n = -5 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 7$.

b) Lueteltujen jäsenten perusteella juurrettavana oleva luku on edellinen juurrettava kaksinkertaisena.
Siis

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \sqrt{2 \cdot a_1} = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$$

$$a_3 = \sqrt{2 \cdot a_2} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

$$a_4 = \sqrt{2 \cdot a_3} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},$$

joten rekursiokaava on $a_1 = 1$ ja $a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$

922. **a)** Lukujonon jäsenten osoittajat näyttäisivät olevan aritmeettisen lukujonon (1, 2, 3, …) jäseniä ja nimittäjät aritmeettisen lukujonon (3, 5, 7, …) jäseniä.

Osoittaja: Lukujono on muotoa $a_n = n$.

Nimittäjä: Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$ ja erotusluku $d = 7 - 5 = 2$.
Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 1$.

Lukujonon $(a_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, ...\right)$ analyyttinen sääntö on

esimerkiksi $a_n = \frac{n}{2n+1}$.

Lukujonon 100. jäsen on tällöin $a_{100} = \frac{100}{2 \cdot 100 + 1} = \frac{100}{201}$.

b) Lukujono (2, 0, 2, …) voidaan kirjoittaa muotoon
(1 + 1, 1 − 1, 1 + 1, 1 − 1 …), jolloin nähdään, että jokaisessa jäsenessä on ensin luku 1, johon sitten joko lisätään tai vähennetään luku 1,
Luvut 1, −1, 1, −1, … ovat lukujonon $(-1)^{n-1}$ jäseniä.

Lukujonon $(a_n) = (2, 0, 2, 0, …)$ analyyttinen sääntö on esimerkiksi
$a_n = 1 + (-1)^{n-1}$.

Lukujonon 100. jäsen on tällöin
$a_{100} = 1 + (-1)^{100-1} = 1 + (-1)^{99} + 1 = 1 - 1 = 0$.

923. **a)** Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, joka ei riipu järjestysnumerosta n.

Nyt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{(n+1)-1}}{4^{n+1}}}{\frac{3^{n-1}}{4^n}} = \frac{3}{4}$, joka ei riipu järjestysnumerosta n.

Lukujono $a_n = \frac{3^{n-1}}{4^n}$, n = 1, 2, 3, … on siis geometrinen.

Ensimmäinen jäsen, joka alittaa luvun 0,001 saadaan epäyhtälön $\frac{3^{n-1}}{4^n} < 0{,}001$ avulla. Epäyhtälön ratkaisu on n > 20,19…
Siis jäsenestä 21 alkaen kaikki lukujonon jäsenet ovat pienempiä kuin 0,001.

21. jäsen alittaa ensimmäisenä luvun 0,001.

b) Lukujono on aritmeettinen, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio joka ei riipu järjestysnumerosta n.

Nyt $a_{n+1} - a_n = (3 + 2(n + 1)) - (3 + 2n) = 2$, joka ei riipu järjestysnumerosta n.
Lukujono $a_n = 3 + 2n$, n = 1, 2, 3, … on siis aritmeettinen.

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 5$ ja $d = 2$.
Lasketaan peräkkäisten jäsenten $a_{25}, a_{26}, \ldots, a_{90}$ summa summien S_{90} ja S_{24} erotuksena.

Nyt $a_{90} = 3 + 2 \cdot 90 = 183$ ja $a_{24} = 3 + 2 \cdot 24 = 51$, joten $S_{90} = 90 \cdot \frac{5+183}{2} = 8460$ ja $S_{24} = 24 \cdot \frac{5+51}{2} = 672$, joten peräkkäisten jäsenten $a_{25}, a_{26}, \ldots, a_{90}$ summa on $S_{90} - S_{24} = 8460 - 672 = 7788$.

Toinen tapa:
Lukujono on aritmeettinen, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio joka ei riipu järjestysnumerosta n.

Nyt $a_{n+1} - a_n = (3 + 2(n + 1)) - (3 + 2n) = 2$, joka ei riipu järjestysnumerosta n.
Lukujono $a_n = 3 + 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ on siis aritmeettinen.

Aritmeettisessa summassa $a_{25} + a_{26} + \ldots + a_{90}$ ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{25} = 3 + 2 \cdot 25 = 53$, viimeinen yhteenlaskettava on $a_{90} = 3 + 2 \cdot 90 = 183$ ja yhteenlaskettavia lukuja on 66.
Summa on siis $66 \cdot \frac{53+183}{2} = 7788.$

924. Olkoon $P(x) = ax + b$, $a \neq 0$.
Osoitetaan, että peräkkäisten jäsenten $P(x + 1)$ ja $P(x)$ erotus on aina vakio, kun x on positiivinen kokonaisluku.

Nyt $P(x + 1) = a(x + 1) + b = ax + a + b$ ja $P(x) = ax + b$, joten
$P(x + 1) - P(x) = (ax + a + b) - (ax + b) = ax + a + b - ax - b = a$.

Koska a on jokin reaaliluku eli vakio, niin lukujono $P(1), P(2), P(3), \ldots$ on aritmeettinen.

925. Kun rekursiokaavan yhtälö $a_n = -2 \cdot a_{n-1}$ kirjoitetaan muotoon $\frac{a_n}{a_{n-1}} = -2$,

nähdään peräkkäisten jäsenten suhteen olevan järjestysnumerosta riippumaton vakio -2.

Lukujono (a_n) on siis geometrinen ja sen ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja $q = -2$. Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$.

$$\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} 3 \cdot (-2)^{n-1} = \frac{3 \cdot (1-(-2)^{15})}{1-(-2)} = 32769.$$

926. **a)** Lasketaan tilanne istutuksen jälkeen, lisäämällä istutusta edeltävään tilanteeseen 150 taimenta. Ennen istutusta taimenista on jäljellä kolmen neljännestä eli 75 %.

Taulukkolaskenta

	A	B	C
1	Istutuksen numero	Taimenia ennen istutusta	Taimenia istutuksen jälkeen
2	1	0	150
3	2	112.5	262.5
4	3	196.88	346.88
5	4	260.16	410.16
6	5	307.62	457.62
7	6	343.21	493.21
8	7	369.91	519.91
9	8	389.93	539.93
10	9	404.95	554.95
11	10	416.21	566.21

Taimenia on siis juuri ennen 10:tä istutusta 416.

b) Ennen toista istutusta taimenia on
$0{,}75 \cdot 150$
ja istutuksen jälkeen $0{,}75 \cdot 150 + 150$.

Ennen kolmatta istutusta taimenia on
$0{,}75 \cdot (0{,}75 \cdot 150 + 150) = 0{,}75^2 \cdot 150 + 0{,}75 \cdot 150$
ja kolmannen istutuksen jälkeen $0{,}75^2 \cdot 150 + 0{,}75 \cdot 150 + 150$.

Ennen neljättä istutusta taimenia on
$0{,}75 \cdot (0{,}75^2 \cdot 150 + 0{,}75 \cdot 150 + 150)$
$= 0{,}75^3 \cdot 150 + 0{,}75^2 \cdot 150 + 0{,}75 \cdot 150$.

Koska taimenten lukumäärän laskeminen jatkuu samalla tavalla, yhteenlaskettavat voidaan ajatella geometrisen lukujonon $(0{,}75 \cdot 150,\ 0{,}75^2 \cdot 150,\ 0{,}75^3 \cdot 150,\ 0{,}75^3 \cdot 150,\ \ldots)$ jäseneksi.

Huomaa, että ensimmäinen yhteenlaskettava on tässä 2. vuoden taimenkannan suuruus ennen 2. vuoden istutusta.

Geometrisen summan kaavalla voidaan muodostaa lauseke taimenten lukumääräksi, jossa lukujonon n:s jäsen on taimenten lukumäärä juuri ennen n + 1:ttä istutusta:

$$a_n = \frac{0,75 \cdot 150 \cdot (1-0,75^n)}{1-0,75} = 450 - 450 \cdot 0,75^n.$$

Nyt taimenten lukumäärä juuri ennen 10:ttä istutusta on

$$a_9 = 450 - 450 \cdot 0,75^9 = 416,2...$$

Taimenia on siis juuri ennen 10:ttä istutusta 416.

927. **a)** Lukujono $(a_n) = (1, 3, 5, \ldots)$ on muotoa $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$. Lukujonon (b_n) 10. jäsen on $b_{10} = 2^{2\cdot 10-1} = 2^{19} = 524\,288$.

Osoitetaan, että lukujonon (b_n) peräkkäisten jäsenten suhde on vakio järjestysnumerosta n riippumatta:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = \frac{2^{2(n+1)-1}}{2^{2n-1}} = \frac{2^{2n+1}}{2^{2n-1}} = 2^{2n+1-(2n-1)} = 2^{2n+1-2n+1} = 2^2 = 4.$$

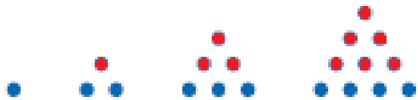
Lukujonon (b_n) peräkkäisten jäsenten suhde on järjestysnumerosta n riippumaton vakio 4, joten lukujono on geometrinen.

b) Aritmeettisen lukujonon (x_n) yleinen jäsen on $x_n = x_1 + (n-1)d$. Osoitetaan, että lukujonon (y_n) peräkkäisten jäsenten suhde on vakio järjestysnumerosta n riippumatta:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{k^{x_1+(n+1-1)d}}{k^{x_1+(n-1)d}} = k^d.$$

Koska $k \neq 0$ ja $d \in \mathbb{R}$, niin k^d on nollasta eroava vakio. Siis lukujonon (y_n) peräkkäisten jäsenten suhde on vakio järjestysnumerosta n riippumatta, joten lukujono (y_n) on geometrinen.

928. **a)** Huomataan, että seuraava kolmio saadaan, kun edelliseen kolmioon lisätään uusi rivi.



$a_1 = 1$
$a_2 = 1 + 2 = 3$
$a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
…

Kolmioluku on aritmeettisen lukujonon ensimmäisten jäsenten summa $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$ Jossa lukujonon jäsen $a_n = n$.

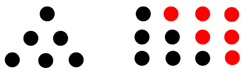
Nyt n:s kolmioluku voidaan esittää summana
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$, jossa on n yhteenlaskettavaa.
Aritmeettisen summan kaavalla saadaan

$S_{100} = 100 \cdot \frac{1+100}{2} = 5050$ ja

$S_n = n\frac{1+n}{2} = \frac{n+n^2}{2}.$

Toinen tapa:
Hahmotellaan kolmiolukujen sääntöjä pisteiden avulla.
Kun n = 2, niin pisteitä on kolme. Sijoitetaan pisteet toisella tapaa ja lisätään kuvioon samat pisteet toisella värillä:

Kun n = 3, niin pisteitä on kuusi. Sijoitetaan pisteet toisella tapaa ja lisätään kuvioon samat pisteet toisella värillä:



Kuvioiden perusteella nähdään, että pisteiden määrä on puolet muodostuvan suorakulmion pinta-alasta. Suorakulmion kanta on $n + 1$ ja korkeus n.

Kun n = 2, niin pisteiden määrä on $\frac{2\cdot 1}{2}=1$.

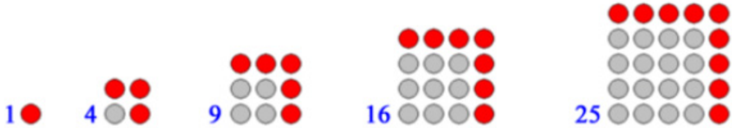
Kun n = 2, niin pisteiden määrä on $\frac{3\cdot 2}{2}=3$.

Kun n = 3, niin pisteiden määrä on $\frac{4\cdot 3}{2}=6$.

100:s kolmioluku on siten $\frac{101\cdot 100}{2}=5050$.

n:s kolmioluku on $\frac{(n+1)n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

b) Neliöluvut voidaan nähdä summina oheisten kuvien mukaisesti.



$a_1 = 1$
$a_2 = 4 = 1 + 3$
$a_3 = 9 = 1 + 3 + 5$
$a_4 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$
$a_5 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$
…

Neliöluku on aritmeettisen lukujonon ensimmäisten jäsenten summa
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$
Lukujonon yleinen jäsen $a_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1)$.

Nyt n:s neliöluku n^2 voidaan esittää summana
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1)$, jossa on n yhteenlaskettavaa.
Aritmeettisen summan kaavalla saadaan $S_n = n\dfrac{1+(2n-1)}{2} = n\dfrac{2n}{2} = n^2$.

929. Olkoon aritmeettisen lukujonon kolme peräkkäistä jäsentä $a - d$, a ja $a + d$. Nyt jäsenten $a - d$ ja $a + d$ keskiarvo on $\dfrac{(a-d)+(a+d)}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.
Siis kahden muun jäsenen keskiarvo on yhtä suuri kuin keskimmäisin jäsen.

930. Summassa $\ln 2 + \ln 4 + \ln 8 + \ldots + \ln 2^n + \ldots + \ln 2^{100}$ on yhteensä 100 yhteenlaskettavaa.

$\ln 2 + \ln 2^2 + \ln 2^3 + \ldots + \ln 2^n + \ldots + \ln 2^{100}$
$= 1 \cdot \ln 2 + 2 \cdot \ln 2 + 3 \cdot \ln 2 + \ldots + n \cdot \ln 2 + \ldots + 100 \cdot \ln 2$
$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots + 100)\ln 2$
$= (100 \cdot \dfrac{1+100}{2})\ln 2 = 5050 \ln 2$

931. Lukujono on aritmeettinen, jos peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Ehdosta saadaan yhtälö ln $(3^x - 3) - \ln 3 = \ln (3^x + 3) - \ln (3^x - 3)$. Ratkaistaan tästä x.

$$\begin{aligned}
\ln(3^x - 3) - \ln 3 &= \ln(3^x + 3) - \ln(3^x - 3) \\
\ln\left(\frac{3^x - 3}{3}\right) &= \ln\left(\frac{3^x + 3}{3^x - 3}\right) \\
\frac{3^x - 3}{3} &= \frac{3^x + 3}{3^x - 3} \\
(3^x - 3)(3^x - 3) &= 3(3^x + 3) \\
(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x \cdot 3 + 3^2 &= 3 \cdot 3^x + 9 \\
3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+1} &= 3^{x+1} \\
3^{2x} &= 3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+1} \\
3^{2x} &= 3 \cdot 3^{x+1} \\
3^{2x} &= 3^{x+2} \\
2x &= x + 2 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Toinen tapa ratkaista yhtälö:

$$\begin{aligned}
\ln(3^x - 3) - \ln 3 &= \ln(3^x + 3) - \ln(3^x - 3) \\
\ln\left(\frac{3^x - 3}{3}\right) &= \ln\left(\frac{3^x + 3}{3^x - 3}\right) \\
\frac{3^x - 3}{3} &= \frac{3^x + 3}{3^x - 3} \\
(3^x - 3)(3^x - 3) &= 3(3^x + 3) \\
(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x \cdot 3 + 3^2 &= 3 \cdot 3^x + 9 \\
(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x &= 0 \\
(3^x)^2 - 9 \cdot 3^x &= 0 \\
3^x(3^x - 9) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
3^x = 0 & \text{tai} & 3^x - 9 = 0 \\
\text{ei ratkaisua} & & 3^x = 9 \\
 & & 3^x = 3^2 \\
 & & x = 2
\end{array}$$

932. **a)** Koska jokainen uusi kierros on yhtä paljon edellistä pidempi, on kehän pituudet, kuten myös halkaisijat aritmeettisen lukujonon jäseniä.

Ensimmäisen kierroksen halkaisija on 24 (cm) ja kuudennen kierroksen 76 (cm). Halkaisijat ovat aritmeettisen lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 ja kuudes jäsen a_6.
Nyt $a_6 = a_1 + 5d$, eli$76 = 24 + 5d$, josta $d = 10{,}4$ (cm).

Letkun pituus on summa $\pi \cdot 24 + \pi \cdot 34{,}4 + \ldots + \pi \cdot 76$, joka voidaan laskea aritmeettisen summan kaavalla.

$$S_6 = 6 \cdot \frac{\pi \cdot 24 + \pi \cdot 76}{2} = 300\pi = 942{,}4...$$

Letkun pituus on siis 942,4… cm ≈ 942 cm.

b) Ulkoympyrän kehän pituus on $\pi \cdot 110$ (mm) ja sisäympyrän kehän pituus $\pi \cdot 45$ (mm).

Jokaisella kierroksella olevan paperin pituus lyhenee saman verran, joten kierrosten paperin pituudet muodostavat aritmeettisen lukujonon. Paperin yhteispituus on 12,3 m = 12 300 mm.

Aritmeettisen summan ensimmäinen yhteenlaskettava on 110π ja viimeinen 45π. Summa on 12 300, joten summakaavalla saadaan

$$n \cdot \frac{110\pi + 45\pi}{2} = 12\ 300, \text{ josta } n = 50{,}5.$$

Paperirullassa on noin 50 kierrosta paperia.

933. **a)** Koska lukujono on aritmeettinen, lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen vakio d.
Nyt $a_{10} = a_5 + 5d$ eli $2 = 10 + 5d$, mistä saadaan $d = -1{,}6$.
Nyt jäsen $a_{11} = 2 - 1{,}6 = 0{,}4$ on viimeinen positiivinen, sillä $a_{12} = 0{,}4 - 1{,}6 = -1{,}2$.

Lukujonossa on siis 11 positiivista jäsentä.

b) Funktio $2 \cdot (\frac{11}{10})^n$ on kasvava, koska eksponenttifunktion kantaluku $\frac{11}{10} > 1$ ja kerroin $2 > 0$.

Selvitetään, mikä on järjestysnumeron pienin luku n, jolla lukujonon jäsen $a_n = 2 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^n$ on arvoltaan suurempi kuin 10. Epäyhtälön $2 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^n > 10$ ratkaisuna saadaan $x > 16{,}88…$. Ensimmäinen lukujonon jäsen, joka on suurempi kuin 10, on 17. lukujonon jäsen.

Vastaavasti epäyhtälön $2 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^n < 100$ ratkaisu on $x < 41{,}04…$ Suurin epäyhtälön toteuttava positiivinen kokonaisluku on 41. Lukujonon jäsenten lukumäärästä 41 vähennetään ne 16 jäsentä, jotka eivät toteuta kaksoisepäyhtälöä. Ehdot täyttäviä lukujonon jäseniä on siis $41 - 16 = 25$.

Toinen tapa:

Epäyhtälön $10 < 2 \cdot (\frac{11}{12})^n < 100$ ratkaisu on $16{,}8… < n < 41{,}94…$.
Tämän ehdon toteuttavat luvut positiiviset kokonaisluvut ovat 17, 18, … ja 41, joita on yhteensä $41 - 16 = 27$.

934.

$x_1 = 2$
$x_2 = 2$
$x_3 = x_2 - x_1 = 2 - 2 = 0$
$x_4 = x_3 - x_2 = 0 - 2 = -2$
$x_5 = x_4 - x_3 = -2 - 0 = -2$
$x_6 = x_5 - x_4 = -2 - (-2) = 0$
$x_7 = x_6 - x_5 = 0 - (-2) = 2$
$x_8 = x_7 - x_6 = 2 - 0 = 2$

$x_9 = x_8 - x_7 = 2 - 2 = 0$
$x_{10} = x_9 - x_8 = 0 - 2 = -2$
$x_{11} = x_{10} - x_9 = -2 - 0 = -2$
$x_{12} = x_{11} - x_{10} = -2 - (-2) = 0$
$x_{13} = x_{12} - x_{11} = 0 - (-2) = 2$
$x_{14} = x_{13} - x_{12} = 2 - 0 = 2$
$x_{15} = x_{14} - x_{13} = 2 - 2 = 0$
$x_{16} = x_{15} - x_{14} = 0 - 2 = -2$

tai taulukko-laskennassa

	A
1	2
2	2
3	0
4	-2
5	-2
6	0
7	2
8	2
9	0
10	-2
11	-2
12	0
13	2
14	2
15	0
16	-2

Olkoon $x_1 = x_2 = a$, jolloin
$x_1 = a$
$x_2 = a$
$x_3 = x_2 - x_1 = a - a = 0$
$x_4 = x_3 - x_2 = 0 - a = -a$
$x_5 = x_4 - x_3 = -a - 0 = -a$
$x_6 = x_5 - x_4 = -a - (-a) = 0$
$x_7 = x_6 - x_5 = 0 - (-a) = a$
$x_8 = x_7 - x_6 = a - 0 = a$

Tämän jälkeen kierto alkaa alusta, sillä lukujonon jäsen lasketaan kahden edellisen perusteella, ja nyt kaksi peräkkäistä jäsentä ovat täsmälleen samat kuin alussa,

Ilmiö eli $x_1 = x_7$, $x_2 = x_8$, $x_3 = x_9$, … toteutuu siis aina kun $x_1 = x_2$.

Jos $x_1 \neq x_2$, niin merkitään $x_1 = a$ ja $x_2 = b$ missä $a \neq b$, jolloin
$x_1 = a$
$x_2 = b$
$x_3 = x_2 - x_1 = b - a$
$x_4 = x_3 - x_2 = b - a - b = -a$
$x_5 = x_4 - x_3 = -a - (b - a) = -b$
$x_6 = x_5 - x_4 = -b - (-a) = a - b$
$x_7 = x_6 - x_5 = a - b - (-b) = a$
$x_8 = x_7 - x_6 = a - (a - b) = b$

Tämän jälkeen kierto alkaa alusta, sillä lukujonon jäsen lasketaan kahden edellisen perusteella, ja nyt kaksi peräkkäistä jäsentä ovat täsmälleen samat kuin alussa,

Ilmiö eli $x_1 = x_7$, $x_2 = x_8$, $x_3 = x_9$, … toteutuu myös, jos $x_1 \neq x_2$.

935. Ratkaistaan tehtävä laskemalla luvut taulukkolaskentaohjelmassa.

Taulukkolaskenta

	A	B	C
1	Talletusvuosi	Talletus vuoden alussa	Talletus vuoden lopussa
2	1	4000	4120
3	2	8120	8363.6
4	3	12363.6	12734.51
5	4	16734.51	17236.54
6	5	21236.54	21873.64
7	6	25873.64	26649.85
8	7	30649.85	31569.34
9	8	35569.34	36636.42
10	9	40636.42	41855.52
11	10	45855.52	47231.18
12	11	51231.18	52768.12
13	12	56768.12	58471.16
14	13	62471.16	64345.3
15	14	68345.3	70395.66
16	15	74395.66	76627.53
17	16	80627.53	83046.35
18	17	87046.35	89657.74
19	18	93657.74	96467.47
20	19	100467.47	103481.5

Vuoden alussa tilillä edellisen vuoden lopussa olevaan summaan lisätään 4000 euroa.
Vuoden lopussa tilillä vuoden alussa oleva rahasumma kasvaa 3 % eli tulee 1,03-kertaiseksi.

Säästösumma kasvaa kymmenen vuoden kuluessa saldoon 47231,18 €.
Säästösumma on kasvanut 100 000 €:n suuruiseksi 19 vuoden kuluttua.

936. Koska kolmio on tasasivuinen, taulukosta löytyvien kaavojen perusteella sen sisälle piirretyn ympyrän säde on $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Isoimman ympyrän pinta-ala on siis $A_1 = \pi \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{6})^2 = \frac{1}{12} \cdot \pi a^2$.

Taulukosta löytyvien kaavojen perusteella tasasivuisenkolmion, jonka sivun pituus on x, ympäri piirretyn ympyrän säde on $\frac{x\sqrt{3}}{3}$. Ensimmäisen ympyrän, jonka säde siis on $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, sisällä olevan toiseksi suurimman tasasivuisen kolmion sivun pituus x saadaan yhtälöstä $\frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, jonka ratkaisu on $x = \frac{a}{2}$.

Koska toisen tasasivuisen kolmion sivun pituus on $\frac{a}{2}$, niin sen sisälle piirretyn ympyrän säde on $\frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$. Toiseksi isoimman ympyrän pinta-ala on tällöin $A_2 = \pi \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{12})^2 = \frac{1}{48} \cdot \pi a^2 = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\frac{1}{12} \cdot \pi a^2}_{A_1} = \frac{1}{4} \cdot A_1$.

Seuraavat kolmioiden sivut, ympyröiden säteet ja pinta-alat saadaan samalla päättelyllä. Näin ollen ympyröiden pinta-alat ovat

$A_1,\ \frac{1}{4}A_1,\ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}A_1,\ \ldots$

Kyseessä on geometrinen lukujono $(A_1,\ \frac{1}{4}A_1,\ \frac{1}{16}A_1,\ ...)$, jossa A_1 on isoimman ympyrän pinta-ala ja $q=\frac{1}{4}$. Sadan suurimman ympyrän pinta-alojen summa saadaan geometrisen summan kaavalla

$$S_{100}=\frac{A_1(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{100})}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{12}\cdot\pi a^2\cdot(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{100}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}}\cdot\pi a^2\cdot(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{100}$$

$$=(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{100})\cdot\frac{\pi a^2}{9}.$$

937. Jos louhintatahti on *a* tonnia/vuosi, niin nykyisellä louhintatahdilla kivihiilivarat olisivat riittäneet 50 vuotta. Siis kivihiilivarat ovat vuoden 2015 alussa 50*a* tonnia.

Jos määrää lisätään vuosittain 2,5 % edellisen vuoden louhintamäärään verrattuna, niin ensimmäisten vuosien louhintamäärät olisivat

Vuosi	**Louhintamäärä vuoden lopussa**	**Louhintamäärä yhteensä**
2015	a	a
2016	$1{,}025a$	$a + 1{,}025a$
2017	$1{,}025^2a$	$a + 1{,}025a + 1{,}025^2a$
…	…	…
$2015 + t$	$1{,}025^ta$	$a + 1{,}025a + 1{,}025^2a + \ldots + 1{,}025^ta$

Louhintamäärä yhteensä on geometrinen summa, jossa $a_1 = a$ ja $q = 1{,}025$. Koska summa on oltava 50*a*, niin geometrisen summan kaavalla saadaan yhtälö ja sen ratkaisuna haettu *t*:n arvo.

$$\frac{a(1-1{,}025^t)}{1-1{,}025} = 50a, \text{ josta } t = 32{,}84\ldots$$

Laskennallisesti ajankohta olisi vuonna 2015 + 32,84… = 2047,84…
Kivihiilivarat loppuisivat vuoden 2047 aikana.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

938. **a)**

$$\sum_{k=1}^{15}(2^k + 2k)$$

$$= (2^1 + 2\cdot 1) + (2^2 + 2\cdot 2) + \ldots + (2^{15} + 2\cdot 15)$$

$$= 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{15} + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + \ldots + 2\cdot 15$$

$$= \underbrace{2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{15}}_{\substack{\text{geometrinen summa,} \\ \text{jossa } a_1=2 \text{ ja } q=2}} + 2(\underbrace{1 + 2 + \ldots + 15}_{\substack{\text{aritmeettinen summa,} \\ \text{jossa } a_1=1 \text{ ja } a_{15}=15}})$$

$$= \frac{2(1-2^{15})}{1-2} + 2(15\cdot\frac{1+15}{2})$$

$$= \frac{2(-32767)}{-1} + 2\cdot 120$$

$$= 65\ 774$$

b)

$$\sum_{k=1}^{20}(2^k - 2^{k-1})$$

$$= (2^1 - 2^{1-1}) + (2^2 - 2^{2-1}) + (2^3 - 2^{3-1}) + \ldots + (2^{19} - 2^{19-1}) + (2^{20} - 2^{20-1})$$

$$= (\cancel{2^1} - 2^0) + (\cancel{2^2} \cancel{-2^1}) + (\cancel{2^3} \cancel{-2^2}) + \ldots + (\cancel{2^{19}} \cancel{-2^{18}}) + (2^{20} \cancel{-2^{19}})$$

$$= -2^0 + 2^{20}$$

$$= 1\ 048\ 575$$

c)

$$\sum_{k=1}^{100}(k^3 - (k-1)^3)$$

$$= (1^3 - (1-1)^3) + (2^3 - (2-1)^3) + \ldots + (99^3 - (99-1)^3) + (100^3 - (100-1)^3)$$

$$= (\cancel{1^3} - 0^3 \cancel{+2^3} \cancel{-1^3} \cancel{+3^3} \cancel{-2^3} + \ldots \cancel{+99^3} \cancel{-98^3} + 100^3 \cancel{-99^3}$$

$$= 100^3$$

$$= 1\ 000\ 000$$

939. Geometrisen lukujonon (a_n) yleinen jäsen on $a_n = a_1 q_1{}^{n-1}$ ja geometrisen lukujonon (b_n) yleinen jäsen $b_n = b_1 q_2{}^{n-1}$, missä $q_1 \neq 0$ ja $q_2 \neq 0$.

Tulojonon $(c_n) = (a_n b_n)$ yleinen jäsen on
$c_n = a_n b_n = a_1 q_1{}^{n-1} b_1 q_2{}^{n-1} = (a_1 b_1) q_1{}^{n-1} q_2{}^{n-1} = (a_1 b_1)(q_1 q_2)^{n-1}$.
Merkitään $a_1 b_1 = c$ ja $q_1 q_2 = q \neq 0$, jolloin tulojonon (c_n) yleinen jäsen on $c_n = cq^{n-1}$. Tulojono (c_n) on siis geometrinen.

Osamääräjonon $(d_n) = (a_n/b_n)$ yleinen jäsen on

$$d_n = \frac{a_1 q_1^{n-1}}{b_1 q_2^{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{q_1^{n-1}}{q_2^{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \left(\frac{q_1}{q_2} \right)^{n-1}.$$

Merkitään $a_1 b_1 = d$ ja $\left(\frac{q_1}{q_2} \right) = q \neq 0,$ jolloin osamääräjonon (d_n) yleinen jäsen on $d_n = dq^{n-1}$. Osamääräjono (d_n) on siis geometrinen.

940. **a)** Korkotekijä on $q = 1{,}015$.

Tammikuun alussa talletettu summa kasvaa korkoa koko vuoden eli talletuksen tuottama korko on $0{,}015 \cdot 200$ (€).

Helmikuun alussa talletettu summa 200 (€) kasvaa korkoa $\frac{11}{12}$ – osan vuoden korosta eli talletuksen tuottama korko on $\frac{11}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200$ (€).

Samalla tavalla jatkuen marraskuun alussa talletettu summa 200 (€) kasvaa korkoa $\frac{2}{12}$ – osan vuoden korosta eli talletuksen tuottama korko on $\frac{2}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200$ (€) ja joulukuun alussa talletettu summa tuottaa korkoa $\frac{1}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200$ (€).

Yhden vuoden aikana korkoa kertyy kaiken kaikkiaan

$$\begin{aligned}
&\frac{12}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200 + \frac{11}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200 + \ldots + \frac{2}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200 \\
&= \left(\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \ldots + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}\right) \cdot 0{,}015 \cdot 200 \\
&= \frac{78}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200 \\
&= 19{,}5 \text{ (€)}.
\end{aligned}$$

Yhden vuoden aikana talletetaan $12 \cdot 200$ € = 2400 €, joten yhden vuoden aikana talletuksista kertyy pääomaa 2419,50 €.

Merkitään tätä pääomaa kirjaimella K.
Ensimmäisen vuoden jälkeen tilillä oleva pääoma K kasvaa vuosittain korkoa korolle 1,5 % 17 vuoden ajan, joten 18 vuoden kuluttua tämä ensimmäisen vuoden aikana säästetty pääoma on $1{,}025^{17} \cdot K$.

Toisen vuoden loppuun mennessä sinä vuonna tehdyistä talletuksista ja korosta kertynyt pääoma K on pojan täyttäessä 18 vuotta ehtinyt kasvaa korkoa korolle 16 vuotta eli toisen vuoden aikana säästetty pääoma on tällöin $1{,}025^{16} \cdot K$.

Jokaisen vuoden aikana kertyy ensimmäisen vuoden tapaan pääoma K joka kasvaa korkoa seuraavat vuodet siihen saakka, kun poika täyttää 18 vuotta.

Kun poika täyttää 18 vuotta, on tilillä rahaa kaiken kaikkiaan
$1{,}015^{17} \cdot K + 1{,}015^{16} \cdot K + 1{,}015^{15} \cdot K + \ldots + 1{,}015^{1} \cdot K + K$
$= (1 + 1{,}015 + \ldots + 1{,}015^{15} + 1{,}015^{16} + 1{,}015^{17})K$

$$= \frac{1(1-1{,}015^{18})}{1-1{,}015} \cdot K$$

$$= \frac{1(1-1{,}015^{18})}{1-1{,}015} \cdot 2419{,}50$$

$$= 49574{,}044...$$

$$\approx 49574{,}04 \text{ (€)}.$$

b) Kaksion hinta 135 000 € edellyttää n vuoden säästöaikaa. Ratkaistaan n yhtälöstä $= \dfrac{1(1-1{,}015^{n})}{1-1{,}015} \cdot 2419{,}50 = 135\ 000,$ josta $n = 40{,}84\ldots \approx 41$.

Aikaa tarvitaan siis 41 vuotta.

941. **a)** Koska lukujono (a_n) on geometrinen, niin peräkkäisten jäsenten suhde on vakio eli $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, kuten myös $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

Koska suhdeluku $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, niin $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$.

Koska lukujonon kaikki jäsenet ovat positiivisia tästä saadaan

$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$.

Toinen tapa:

Koska lukujono (a_n) on geometrinen, niin $a_{n-1} = \dfrac{a_n}{q}$ ja $a_{n+1} = a_n q$,

missä $q \neq 0$ kun $n = 2, 3, \ldots$

Nyt $\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+2}} = \sqrt{\dfrac{a_n}{q} \cdot a_n q} = \sqrt{a_n^{\ 2}} = |a_n| = a_n$.

b) Koska $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, ja koska lukujonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, niin $b_n^{\ 2} = (\sqrt{b_{n-1}b_{n+1}})^2 = b_{n-1}b_{n+1}$. Muokataan tätä yhtälöä.

$$b_n^{\ 2} = b_{n-1}b_{n+1} \quad \| : b_n b_{n-1} \neq 0$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Koska peräkkäisten jäsenten b_n ja b_{n-1} (tai b_{n+1} ja b_n) suhde on vakio, lukujono on geometrinen.

942. Lasketaan lukujonon $a_1 = 2$ ja $a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + 1$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$

ensimmäisiä jäseniä:

$a_1 = 2$

$$a_2 = \frac{2}{3}a_1 + 1 = \frac{2}{3}\cdot 2 + 1$$

$$a_3 = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2 + 1\right) + 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 2 + \frac{2}{3} + 1$$

$$a_4 = \frac{2}{3}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 2 + \frac{2}{3} + 1\right) + 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 1$$

$$a_5 = \frac{2}{3}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 1\right) + 1$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\cdot 1 + 1$$

…

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot 2 + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 1}_{\text{geometrinen summa, jossa } a_1=1,\ q=\frac{2}{3} \text{ ja yhteenlaskettavia on } n-1}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot 2 + \frac{1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\ \text{kun } n = 1,\ 2,\ \ldots$$

943. Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on a_1, toinen jäsen $a_2 = a_1q$, kolmas jäsen $a_3 = a_1q^2$ ja neljäs jäsen $a_4 = a_1q^3$.

Tehtävänannon tiedoista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a_1 + a_1q = 1 \\ a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 5 \end{cases}, \text{ josta saadaan}$$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ q = -2 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{3}. \\ q = 2 \end{cases}$$

Kun $a_1 = -1$ ja $q = -2$, niin $S_8 = \dfrac{-1(1-(-2)^8)}{1-(-2)} = 85.$

Kun $a_1 = \dfrac{1}{3}$ ja $q = 2$, niin $S_8 = \dfrac{\frac{1}{3}(1-2^8)}{1-2} = 85.$

944. Summa $\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ on geometrinen, jossa $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $q = \dfrac{1}{3}$ ja summassa on n yhteenlaskettavaa. Summakaavalla

$$S_n = \frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}.$$

Koska $0 < 2 \cdot 3^n < 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$, niin $\dfrac{3^n-1}{2\cdot 3^n} > \dfrac{3^n-1}{3\cdot 3^n} = \dfrac{3^n-1}{3^{n+1}}.$

Koska $2 \cdot 3^n > 3^n > 0$, niin $\dfrac{3^n-1}{2\cdot 3^n} < \dfrac{3^n-1}{3^n}.$

Kaksoisepäyhtälönä saadaan $\dfrac{3^n-1}{3^{n+1}} < \dfrac{3^n-1}{2\cdot 3^n} < \dfrac{3^n-1}{3^n}$ eli

$$\frac{3^n-1}{3^{n+1}} < \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{3^n-1}{3^n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$