8 Integraalilaskenta

8.1 Integraalifunktio

LUVUN 8.1 YDINTEHTÄVÄT

801. Funktio g on funktion h integraalifunktio, jos $g'(x) = h(x)$ kaikissa pisteissä x, joissa funktio h on määritelty.
$g'(x) = \mathrm{D}(4x + \sin 3x + 2) = 4 + \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x + 4 = h(x)$

Funktio g on siis funktion h integraalifunktio.

802. **a)**

$$\begin{aligned}&\int (4x^6 - 2x^3 + 3x)\mathrm{d}x\\ &= 4\cdot\frac{1}{7}x^7 - 2\cdot\frac{1}{4}x^4 + 3\cdot\frac{1}{2}x^2 + C\\ &= \frac{4}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\frac{4}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C) &= \frac{4}{7}\cdot 7x^6 - \frac{1}{2}\cdot 4x^3 + \frac{3}{2}\cdot 2x + 0\\ &= 4x^6 - 2x^3 + 3x\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\int (x^2-1)^2\mathrm{d}x &= \int (x^4 - 2x^2 + 1)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{5}x^5 - 2\cdot\frac{1}{3}x^3 + x + C\\ &= \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + C) &= \frac{1}{5}\cdot 5x^4 - \frac{2}{3}\cdot 3x^2 + 1 + 0\\ &= x^4 - 2x^2 + 1\\ &= (x^2-1)^2\end{aligned}$$

c) $\int (\frac{1}{x^3} + \sqrt{x})\mathrm{d}x = \int (x^{-3} + x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{-2}x^{-2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}x^1x^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$\mathrm{D}(-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C) = \mathrm{D}(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}x^1x^{\frac{1}{2}} + C)$$
$$= \mathrm{D}(-\frac{1}{2}x^{-2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C)$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot(-2)x^{-3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 0$$
$$= x^{-3} + x^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{x^3} + \sqrt{x}$$

d) $\int (2x + t)\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + tx + C = x^2 + tx + C$

$$\mathrm{D}(x^2 + tx + C) = 2x + t$$

e) $\int (2x + t)\mathrm{d}t = \int (t + 2x)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + 2xt + C$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}t^2 + 2xt + C) = \frac{1}{2}\cdot 2t + 2x + 0 = t + 2x = 2x + t$$

f) $\int (a + b + t)\mathrm{d}t = \int (t + a + b)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + at + bt + C$

$$\mathrm{D}(\frac{1}{2}t^2 + at + bt + C) = \frac{1}{2}\cdot 2t + a + b + 0$$
$$= t + a + b$$
$$= a + b + t$$

803. **a)**
$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int (\sqrt{x}(x-2))\,\mathrm{d}x \\
&= \int (x^{\frac{1}{2}}(x-2))\,\mathrm{d}x \\
&= \int (x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{5}x^2\cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x\cdot x^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C
\end{aligned}
$$

b) Määritetään vakion C arvo tiedosta $F(4) = 7$.

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{5}\cdot 4^2\sqrt{4} - \frac{4}{3}\cdot 4\cdot\sqrt{4} + C &= 7 \\
\frac{2}{5}\cdot 16\cdot 2 - \frac{16}{3}\cdot 2 + C &= 7 \\
{}^{3)}\frac{64}{5} - {}^{5)}\frac{32}{3} + C &= 7 \\
\frac{192}{15} - \frac{160}{15} + C &= 7 \\
\frac{32}{15} + C &= 7 \\
C &= {}^{15)}\frac{7}{1} - \frac{32}{15} \\
C &= \frac{105}{15} - \frac{32}{15} \\
C &= \frac{73}{15}
\end{aligned}
$$

Kysytty integraalifunktio on siis $F(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\cdot\sqrt{x} + \frac{73}{15}$.

804. **a)** $\int e^{4x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4\cdot e^{4x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{4x} + C$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\frac{1}{4}e^{4x}+C) &= \frac{1}{4}\mathrm{D}e^{4x}+\mathrm{D}C\\ &= \frac{1}{4}\cdot(e^{4x}\cdot\mathrm{D}4x)+0\\ &= \frac{1}{4}\cdot e^{4x}\cdot 4\\ &= e^{4x}\end{aligned}$$

b) $\int 6\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x = 12\int\frac{1}{2}\cdot\sin(\frac{1}{2}x)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&= 12\cdot(-\cos\frac{x}{2})+C\\ &= -12\cos\frac{x}{2}+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(-12\cos\frac{x}{2}+C) &= -12\mathrm{D}\cos\frac{x}{2}+0\\ &= -12\cdot((-\sin\frac{x}{2})\cdot\mathrm{D}\frac{x}{2})\\ &= 12\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\\ &= 6\sin\frac{x}{2}\end{aligned}$$

c) $\int(4x-1)^5\,\mathrm{d}x = \int\frac{1}{4}\cdot 4\cdot(4x-1)^5\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4}\int 4\cdot(4x-1)^5\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(4x-1)^6+C\\ &= \frac{1}{24}(4x-1)^6+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\frac{1}{24}(4x-1)^6+C) &= \frac{1}{24}\cdot 6(4x-1)^5\cdot\mathrm{D}(4x-1)+0\\ &= \frac{6}{24}\cdot(4x-1)^5\cdot 4\\ &= \frac{24}{24}\cdot(4x-1)^5\\ &= (4x-1)^5\end{aligned}$$

d) $\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int x(x^2+1)^{-1}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int 2x(x^2+1)^{-1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\underbrace{x^2+1}_{>0}|+C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

$$\mathrm{D}(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot\mathrm{D}(x^2+1)+0$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

$$= \frac{x}{x^2+1}$$

e) $\int \frac{e^x-1}{(e^x-x)^4}\,\mathrm{d}x = \int (e^x-1)(e^x-x)^{-4}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{-3}(e^x-x)^{-3}+C$$

$$= -\frac{1}{3(e^x-x)^3}+C$$

$$\mathrm{D}(-\frac{1}{3(e^x-x)^3}+C) = \mathrm{D}(-\frac{1}{3}(e^x-x)^{-3}+0$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot(-3)(e^x-x)^{-4}\cdot\mathrm{D}(e^x-x)$$

$$= \frac{1}{(e^x-x)^4}\cdot(e^x-1)$$

$$= \frac{e^x-1}{(e^x-x)^4}$$

f) $$\begin{aligned}\int(2x^3+x)\sqrt{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int(2x^3+x)(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int 2(2x^3+x)(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int(4x^3+2x)(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^4+x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{1}{3}(x^4+x^2+1)^1(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}+C\\ &= \frac{1}{3}(x^4+x^2+1)\sqrt{x^4+x^2+1}+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}(\frac{1}{3}(x^4+x^2+1)\sqrt{x^4+x^2+1}+C)\\ &= \mathrm{D}(\frac{1}{3}(x^4+x^2+1)^1(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}})+0\\ &= \mathrm{D}(\frac{1}{3}(x^4+x^2+1)^{\frac{3}{2}})\\ &= \frac{1}{3}\mathrm{D}(x^4+x^2+1)^{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{D}(x^4+x^2+1)\\ &= \frac{1}{2}(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(4x^3+2x)\\ &= \frac{1}{2}\cdot(4x^3+2x)\sqrt{x^4+x^2+1}\\ &= (2x^3+x)\sqrt{x^4+x^2+1}\end{aligned}$$

805. A: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x\int(x^2-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-x+C$, joten eräs funktion f $(x) = x^2 - 1$ integraalifunktio on $F(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\pi$.

Siis A–II

B: Funktioiden F ja f välillä on voimassa $F'(x) = f(x)$.
Nyt $F'(x) = \mathrm{D}(\sin x) = \cos x$.
Siis B-I

C: $F(x)=\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+C$

Koska $F(0) = 1$, niin $C = 1$. Kysytty funktion $f(x) = 3x^2$ integraalifunktio on $F(x) = x^3 + 1$.
Siis C–III

D: Integraalifunktion F muutosnopeus kohdassa $x = 0$ on
$F'(0)=f(0)=e^{0^2}=e^0=1$.
Siis D–III

E: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+x+C$

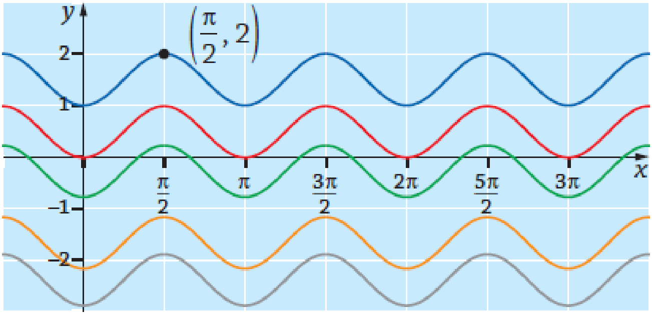
Tiedosta $f(4) = 3$ saadaan yhtälö $\frac{1}{2}\cdot 4^2+4+C=3$, josta ratkaistaan C:n arvo:

$$\frac{1}{2}\cdot 4^2+4+C=3$$
$$\frac{1}{2}\cdot 16+4+C=3$$
$$C=-9$$

Koska funktio nyt $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-9$, niin $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^2+2-9=-5$.

Siis E–I

806. $\int \sin 2x \mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{2} + C$



8.2 Määrätty integraali

LUVUN 8.2 YDINTEHTÄVÄT

807. **a)** $\int_0^1 (e^x - 1)\mathrm{d}x = \Big/_0^1 (e^x - x) = (e^1 - 1) - (e^0 - 0) = e - 1 - 1 = e - 2$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x = \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x + \sin x)$

$$
\begin{aligned}
&= (-\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}) - (-\cos 0 + \sin 0) \\
&= (-0 + 1) - (-1 + 0) \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (1 - \cos 3x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} 1\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \cos 3x\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} 1\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \cdot 3\cos 3x\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} 1\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} 3\cos 3x\mathrm{d}x \\
&= \Big/_0^{\pi} x - \frac{1}{3}\Big/_0^{\pi} \sin 3x \\
&= (\pi - 0) - \frac{1}{3}(\sin 3\pi - \sin 3 \cdot 0) \\
&= \pi - \frac{1}{3}(0 - 0) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

d)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (xe^{-x^2})\mathrm{d}x &= \int_0^1 (-\frac{1}{2}\cdot(-2x)e^{-x^2})\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2xe^{-x^2})\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\Big/_0^1 e^{-x^2} \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-1^2} - e^{-0^2}) \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-1} - e^{0}) \\ &= -\frac{1}{2}(\frac{1}{e} - 1) \\ &= -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{4x}\mathrm{d}x &= \int_1^e (\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x})\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_1^e \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\Big/_1^e \ln|x| \\ &= \frac{1}{4}(\ln|e| - \ln|1|) \\ &= \frac{1}{4}(\ln e - \ln 1) \\ &= \frac{1}{4}(1-0) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

f)

$$
\begin{aligned}
\int_1^6 \sqrt{3x-2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^6 (3x-2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^6 \frac{1}{3}\cdot 3\cdot(3x-2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int_1^6 3\cdot(3x-2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\Big/_1^6 \frac{2}{3}(3x-2)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\Big/_1^6(3x-2)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{9}\Big/_1^6((3\cdot 6-2)^{\frac{3}{2}} - ((3\cdot 1-2)^{\frac{3}{2}}) \\
&= \frac{2}{9}(16^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) \\
&= \frac{2}{9}(16^1\cdot 16^{\frac{1}{2}} - 1^1\cdot 1^{\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{2}{9}(16\cdot\sqrt{16} - 1\cdot\sqrt{1}) \\
&= \frac{2}{9}(16\cdot 4 - 1\cdot 1) \\
&= \frac{2}{9}(64-1) \\
&= \frac{126}{9} \\
&= 14
\end{aligned}
$$

808. **a)** Paraabeli leikkaa x-akselin kohdissa $x = 4$ ja $x = -1$. Paraabeli $y = (x - 4)(x + 1) = x^2 - 3x - 4$ on ylöspäin aukeva, joten paraabeli ja x-akseli rajoittavat paraabelin leikkauskohtien välissä tasoalueen x-akselin alapuolelle.

$$\begin{aligned}
A &= -\int_{-1}^{4} (x^2 - 3x - 4)\mathrm{d}x \\
&= -\mathop{/}_{-1}^{4} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x\right) \\
&= -\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{3}{2}\cdot 4^2 - 4\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1)\right)\right) \\
&= -\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16 - 16\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1) - \frac{3}{2}\cdot 1 + 4\right)\right) \\
&= -\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 64 - 24 - 16\right) - \left(-{}^{2)}\frac{1}{3} - {}^{3)}\frac{3}{2} + 4\right)\right) \\
&= -\left(\left(\frac{64}{3} - 40\right) - \left(-\frac{2}{6} - \frac{9}{6} + 4\right)\right) \\
&= -\left(\left(\frac{64}{3} - \frac{120}{3}\right) - \left(-\frac{11}{6} + \frac{24}{6}\right)\right) \\
&= -\left(-{}^{2)}\frac{56}{3}\right) - \left(\frac{13}{6}\right)) \\
&= -\left(-{}^{2)}\frac{112}{6} - \frac{13}{6}\right) \\
&= -\left(-\frac{125}{6}\right) \\
&= \frac{125}{6}
\end{aligned}$$

b) Ratkaistaan suoran ja paraabelin leikkauskohdat yhtälöparista.

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x^2 + 2x + 1 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
x - 1 &= -x^2 + 2x + 1 \\
x^2 - x - 2 &= 0 \\
x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} \\
x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \\
x &= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \\
x &= 2 \text{ tai } x = -1
\end{aligned}$$

Leikkauskohtien välissä eli välillä]–1, 2[alaspäin aukeava paraabeli on suoran yläpuolella.
Käyrien rajoittaman tasoalueen pinta-ala saadaan määrätystä integraalista:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} ((-x^2+2x+1)-(x-1))\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{2} (-x^2+2x+1-x+1)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{2} (-x^2+x+2)\mathrm{d}x \\
&= \mathop{/}_{-1}^{2}(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x) \\
&= (-\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{2}\cdot 2^2+2\cdot 2)-(-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)) \\
&= (-\frac{1}{3}\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot 4+4)-(-\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1-2) \\
&= (-{}^{2)}\frac{8}{3}+2+4)-({}^{2)}\frac{1}{3}+{}^{3)}\frac{1}{2}-2) \\
&= (-\frac{16}{6}+6)-(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}-2) \\
&= -\frac{16}{6}+6-\frac{2}{6}-\frac{3}{6}+2 \\
&= -\frac{21}{6}^{(3}+8 \\
&= -\frac{7}{2}+\frac{16}{2} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

809. Määritetään paraabelien leikkauskohdat.

$$
\begin{aligned}
x^2 - x + 1 &= -x^2 + 3x + 1 \\
2x^2 - 4x &= 0 \\
2x(x-2) &= 0 \\
2x = 0 \quad &\text{tai} \quad x - 2 = 0 \\
x = 0 \quad &\qquad\quad x = 2
\end{aligned}
$$

Leikkauskohtien välissä alaspäin aukeava paraabeli $y = -x^2 + 3x + 1$ on ylöspäin aukeavaa paraabelia ylempänä, joten paraabelien rajoittaman alueen pinta-ala saadaan määrätystä integraalista:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 ((-x^2 + 3x + 1) - (x^2 - x + 1))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (-x^2 + 3x + 1 - x^2 + x - 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_0^2 (-2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2}x^2) \\
&= \Big/_0^2 (-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2) \\
&= (-\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2) - 0 \\
&= -\frac{2}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 4 \\
&= -\frac{16}{3} + 8 \\
&= -\frac{16}{3} + \frac{24}{3} \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

810. **a)** Ratkaistaan käyrien $y = x^3 - x^2 - 2x$ ja $y = 0$ (x-akseli) leikkauskohdat.

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^2 - x - 2) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$x = \frac{1+3}{2} \text{ tai } x = \frac{1-3}{2}$$
$$x = 2 \qquad x = -1$$

Käyrät leikkaavat toisensa kohdissa $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 2$.
Selvitetään miten käyrä $y = x^3 - x^2 - 2x$ sijaitsee x-akseliin nähden väleillä]–1, 0[ja]0, 2[.

Lasketaan välin]–1, 0[testikohdassa $x = -\frac{1}{2}$ lausekkeen $x^3 - x^2 - 2x$ arvo:

$$(-\frac{1}{2})^3 - (-\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} - {}^{2)}\frac{1}{4} + 1 = -\frac{1}{8} - \frac{2}{8} + 1 = -\frac{3}{8} + 1 = \frac{5}{8}.$$

Kun $-1 < x < 0$, niin käyrä $y = x^3 - x^2 - 2x$ on x-akselin yläpuolella.

Välillä]0, 2[käyrä $y = x^3 - x^2 - 2x$ on x-akselin alapuolella, sillä testikohdassa $x = 1$ lausekkeen lausekkeen $x^3 - x^2 - 2x$ arvo on negatiivinen:
$1^3 - 1^2 - 2 \cdot 1 = -2$.

Kaksiosaisen alueen pinta-ala saadaan siis määrätyistä integraaleista summana:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\mathrm{d}x + (-\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)\mathrm{d}x) \\
&= \overset{0}{\underset{-1}{/}}(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2) - \overset{2}{\underset{0}{/}}(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2) \\
&= (0-(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-(-1)^2)) - ((\frac{1}{4}\cdot 2^4-\frac{1}{3}\cdot 2^3-2^2)-0) \\
&= (-(\frac{1}{4}\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot(-1)-1)) - ((\frac{1}{4}\cdot 16-\frac{1}{3}\cdot 8-4)-0) \\
&= (-({}^{3)}\frac{1}{4}+{}^{4)}\frac{1}{3}-1)) - (\frac{16}{4}-{}^{4)}\frac{8}{3}-4) \\
&= (-(\frac{3}{12}+\frac{4}{12}-1)) - (4-\frac{32}{12}-4) \\
&= -(-\frac{5}{12})+\frac{32}{12} \\
&= \frac{5}{12}+\frac{32}{12} \\
&= \frac{37}{12}
\end{aligned}$$

b) Ratkaistaan käyrien $y = 3x$ ja $y = x^3 + 2x^2$ leikkauskohdat.

$$x^3 + 2x^2 = 3x$$
$$x^3 + 2x^2 - 3x = 0$$
$$x(x^2 + 2x - 3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$
$$x = \frac{-2+4}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2-4}{2}$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = -3$$

Käyrät siis leikkaavat toisensa kohdissa $x = -3$, $x = 0$ ja $x = 1$. Selvitetään miten käyrät $y = 3x$ ja $y = x^3 + 2x^2$ sijaitsevat toisiinsa nähden väleillä]–3, 0[ja]0, 1[.

Lasketaan välin]–3, 0[testikohdassa $x = -1$ lausekkeiden $3x$ ja $x^3 + 2x^2$ arvot:

$3x$: $3 \cdot (-1) = -3$
$x^3 + 2x^2$: $(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 = -1 + 2 = 1$

Kun $-3 < x < 0$, niin käyrä $y = x^3 + 2x^2$ on käyrän $y = 3x$ yläpuolella.

Lasketaan välin]0, 1[testikohdassa $x = \frac{1}{2}$ lausekkeiden $3x$ ja $x^3 + 2x^2$ arvot:

$3x$: $3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$x^3 + 2x^2$: $(\frac{1}{2})^3 + 2 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{8} + {}^{2)}\frac{2}{4} = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$

Kun $0 < x < 1$, niin käyrä $y = 3x$ on käyrän $y = x^3 + 2x^2$ yläpuolella.

Kaksiosaisen alueen pinta-ala saadaan siis määrätyistä integraaleista summana $\int\limits_{-3}^{0}(x^3+2x^2-3x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}(3x-(x^3+2x^2)\mathrm{d}x.$

$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_{-3}^{0}(x^3+2x^2-3x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}(3x-(x^3+2x^2)\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-3}^{0}(x^3+2x^2-3x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}(3x-x^3-2x^2)\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{-3}^{0}\left(\frac{1}{4}x^4+2\cdot\frac{1}{3}x^3-3\cdot\frac{1}{2}x^2\right)+\Big/_{0}^{1}\left(3\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4-2\cdot\frac{1}{3}x^3\right) \\
&= (0-(\frac{1}{4}\cdot(-3)^4+2\cdot\frac{1}{3}\cdot(-3)^3-3\cdot\frac{1}{2}\cdot(-3)^2)+(3\cdot\frac{1}{2}\cdot1^2-\frac{1}{4}\cdot1^4-2\cdot\frac{1}{3}\cdot1^3-0) \\
&= -\frac{81}{4}-\frac{2}{3}\cdot(-27)+\frac{3}{2}\cdot9+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{2}{3} \\
&= -\frac{81}{4}+\frac{54}{3}+\frac{27}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{2}{3} \\
&= -\,^{3)}\frac{82}{4}+\,^{4)}\frac{52}{3}+\frac{30}{2} \\
&= -\frac{246}{12}+\frac{208}{12}+15 \\
&= -\frac{38}{12}+15 \\
&= -3\frac{1}{6}+15 \\
&= 11\frac{5}{6} \\
&= \frac{71}{6}
\end{aligned}
$$

811. **a)** Välillä $[-1, 2]$ $f(x) \geq 0$, joten integraalin arvo on sama kuin funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala.

$$\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 3.$$

b) Välillä $[2, 6]$, $f(x) \leq 0$, joten integraalin arvo on funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan vastaluku.

$$\int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = -4.$$

c) $\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = 3 + (-4) = -1$

d) $2\int_{6}^{10} f(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot 8 = 16$

e) $\int_{10}^{6} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{6}^{10} f(x)\mathrm{d}x = -8$

f) $F(10) - F(2) = \int_{2}^{10} f(x)\mathrm{d}x = \int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{10} f(x)\mathrm{d}x = -4 + 8 = 4$

812. Lasketaan funktion $f(x)=x\sqrt{x+1}$ ja x-akselin leikkauskohdat.

$$
\begin{aligned}
&x\sqrt{x+1}=0\\
&x=0 \text{ tai } \sqrt{x+1}=0\\
&\qquad\qquad x+1=0\\
&\qquad\qquad\quad x=-1
\end{aligned}
$$

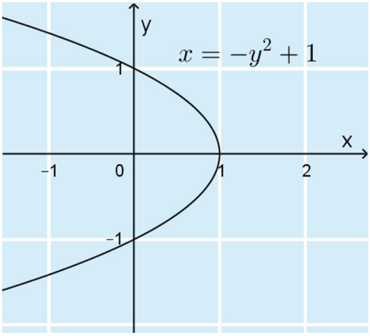
Pyörähdyskappaleen, joka muodostuu funktion f kuvaajan pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, tilavuus on määrätty integraali

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_{-1}^{0}(x\sqrt{x+1})^2\,\mathrm{d}x\\
&=\pi\int_{-1}^{0}x^2(x+1)\mathrm{d}x\\
&=\pi\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)\mathrm{d}x\\
&=\pi\mathop{/}_{-1}^{0}\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right)\\
&=\pi\left(0-\left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4+\frac{1}{3}\cdot(-1)^3\right)\right)\\
&=\pi\left({}^{3)}-\frac{1}{4}+{}^{4)}\frac{1}{3}\right)\\
&=\pi\left(-\frac{3}{12}+\frac{4}{12}\right)\\
&=\frac{\pi}{12}
\end{aligned}
$$

813. **a)**



Käyrä $x + y^2 - 1 = 0$ eli $x = -y^2 + 1$ leikkaa y-akselin, kun $x = 0$.
Yhtälön $-y^2 + 1 = 0$ ratkaisut ovat $y = -1$ tai $y = 1$.
Kysytyn alueen pinta-ala saadaan määrättynä integraalina

$$A = \int_{-1}^{1} (-y^2 + 1)\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}.$$

b) Pyörähdyskappaleen, joka muodostuu funktion f kuvaajan pyörähtäessä y-akselin ympäri välillä $[a, b]$, on määrätty integraali

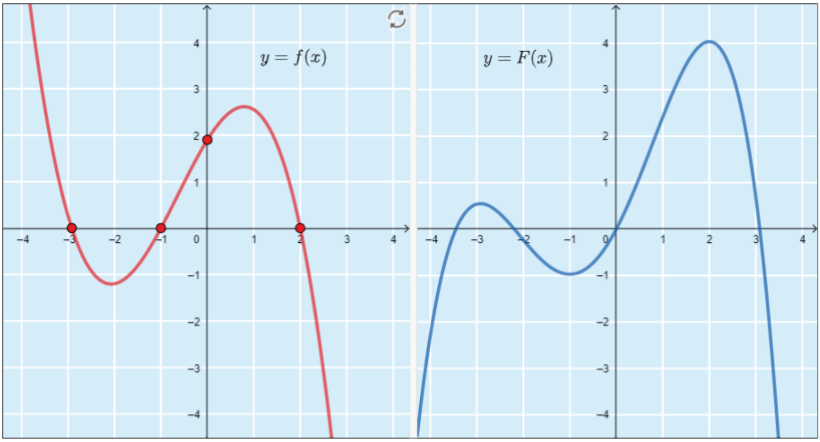
$$V = \pi \int_a^b f(y)^2\,\mathrm{d}y.$$

Nyt $V = \pi \int_{-1}^{1} (-y^2 + 1)^2\,\mathrm{d}y = \frac{16\pi}{15}.$

Luvun 8 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

814. Funktio *f* on funktion *F* derivaattafunktio. Väleillä, joilla funktio *F* on kasvava, on derivaattafunktion arvot negatiivisia ja derivaattafunktion *f* kuvaaja *x*-akselin alapuolella.



815. A: Määrätty integraali $\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x$ kertoo kuvassa II esitetyn väritetyn alueen pinta-alan, koska $f(x) \geq 0$ välillä [1, 6]. Siis A-II

B: Määrätty integraali $-\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ kuvaa funktion f kuvaajan välillä [1, 3] rajaaman alueen pinta-alan vastaluvun, koska tällä välillä $f(x) \leq 0$. Välillä [3, 6] määrätty integraali $\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x$ kuvaa ei-negatiivisen funktion f kuvaajan rajaaman alueen pinta-alaa. Kuva I liittyy edellä kuvattuun tilanteeseen. Siis B-I.

C: Määrätty integraali $-\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x$ kuvaa funktion f kuvaajan välillä [1, 6] rajaaman alueen pinta-alan vastaluvun, koska tällä välillä $f(x) \leq 0$. Kuva III liittyy edellä kuvattuun tilanteeseen. Siis C-III.

D: Määrätty integraali $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ kuvaa funktion f kuvaajan välillä [1, 4] rajaaman alueen pinta-alan, koska tällä välillä $f(x) \geq 0$. Välillä [4, 6] määrätty integraali $-\int_4^6 f(x)\mathrm{d}x$ kuvaa funktion f kuvaajan rajaaman alueen pinta-alan vastaluvun, koska tällä välillä $f(x) \leq 0$. Kuva IV liittyy edellä kuvattuun tilanteeseen. Siis D-IV.

816. **a)** $\int(2x+1)(2x-1)\mathrm{d}x = \int(4x^2-2x+2x-1)\mathrm{d}x$

$$= \int(4x^2-1)\mathrm{d}x$$

$$= 4\cdot\frac{1}{3}x^3 - x + C$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - x + C$$

b)

$$\int \sin x\cos x\mathrm{d}x = \int \cos x(\sin x)^1\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x)^2 + C$$

$$= \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

Toinen tapa:

$$\int \sin x\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2\sin x\cos x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \underbrace{2}_{s'(x)}\cdot\underbrace{\sin 2x}_{u(s(x))}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(-\cos 2x) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

c)

$$\int\frac{x^4-1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int\frac{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)}{\cancel{x^2+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \int(x^2-1)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + C$$

d)

$$\begin{aligned}\int (\frac{x+1}{x})^2 \mathrm{d}x &= \int \frac{x^2+2x+1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int (\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x \\ &= \int (1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x \\ &= \int (1+2\cdot\frac{1}{x}+x^{-2})\mathrm{d}x \\ &= x+2\ln|x|+(\frac{1}{-1}\cdot x^{-1}) \\ &= x+2\ln x-\frac{1}{x}+C,\ x>0\end{aligned}$$

817. $F(x)=\int F'(x)+C=\int(1+\frac{1}{x})\mathrm{d}x = x+\ln|x|+C = x+\ln(-x)+C,\ x<0$

Ehdosta $F(-1) = 1$ määritetään integroimisvakion C arvo.
$F(-1) = -1 + \ln(-(-1) + C = -1 + \ln 1 + C = -1 + C$

Koska $F(-1) = 1$, niin saadaan yhtälö $-1 + C = 1$, josta $C = 2$.

Kysytty funktio F on siis $F(x) = x + \ln(-x) + 2$.

818. **a)** $\int_0^a (2x+a)\mathrm{d}x = \Big/_0^a (x^2+ax) = a^2+a\cdot a-0 = 2a^2$

Ehdosta $\int_0^a (2x+a)\mathrm{d}x = 1$ saadaan yhtälö $2a^2 = 1$, jonka ratkaisut ovat

$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ tai $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Jos funktio $h(x)$ on funktion $g(x)$ integraalifunktio, niin on voimassa
$h'(x) = g(x)$.
$h'(x) = \mathrm{D}\sin^2 x = \mathrm{D}\,(\sin x)^2 = 2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$.

Koska $h'(x) = g(x)$, niin funktio $h(x)$ on funktion $g(x)$ integraalifunktio.

819. Matti: Lisätty kerroin 2, jotta on saatu sisäfunktion derivaatta, mutta ei ole lisätty korjauskerrointa 2.

Teppo: Kerroin $\frac{1}{5}$ on väärä, tulisi olla $\frac{1}{6}$.

Oikea ratkaisu:

$$\begin{aligned}\int x(x^2+1)^5\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int 2x\cdot(x^2+1)^5\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(x^2+1)^6+C\\ &= \frac{1}{12}(x^2+1)^6+C\end{aligned}$$

820. **a)** Funktio $F(x)$ on funktion $f(x)$ integraalifunktio, jos on voimassa $F'(x)=f(x)$.

Nyt

$$F_1'(x)=\frac{0\cdot(1-x)-1\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2} \text{ ja}$$

$$F_2'(x)=\frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2},$$

joten molemmat funktiot $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ ovat funktion f integraalifunktioita, kun $x > 1$.

b) $F_1(x)-F_2(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{x}{1-x}=\frac{1-x}{1-x}=1.$

c) Funktio $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, kun $x > 1$, saa positiivisia arvoja, joten kysytyn alueen pinta-ala saadaan määrättynä integraalina $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$.

Nyt

$$\begin{aligned}
\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x &= \int_2^5 \frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \mathop{/}_2^5 \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-5}-\frac{1}{1-2} \\
&= -\frac{1}{4}-(-1) \\
&= 1-\frac{1}{4} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

821. **a)** Funktio $\sqrt{5-x}$ on määritelty, kun $5 - x \geq 0$ eli $x \leq 5$.
Funktio $\sqrt{x+2}$ on määritelty, kun $x + 2 \geq 0$ eli $x \geq -2$.

Käyrät $y=\sqrt{5-x}$ ja $y=\sqrt{x+2}$ rajaavat suoran $y = 0$ eli x-akselin kanssa alueen välillä [–2, 5]. Lasketaan käyrien $y=\sqrt{5-x}$ ja $y=\sqrt{x+2}$ leikkauskohta yhtälöstä $\sqrt{5-x}=\sqrt{x+2}$.

Välillä [–2, 5] yhtälön molemmat puolet ovat määriteltyjä ja ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$\begin{aligned}
\sqrt{5-x} &= \sqrt{x+2} \\
(\sqrt{5-x})^2 &= (\sqrt{x+2})^2 \\
5-x &= x+2 \\
5-2 &= x+x \\
2x &= 3 \quad \| :2 \\
x &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Käyrät siis leikkaavat toisensa kohdassa $x=\frac{3}{2}$.

Välillä $[-2, \frac{3}{2}]$ käyrä $y=\sqrt{5-x}$ on ylempänä kuin käyrä $y=\sqrt{x+2}$, sillä esimerkiksi testikohdassa $x = 0$ on $\sqrt{5-0}=\sqrt{5} > \sqrt{0+2}=\sqrt{2}$.

Välillä $[\frac{3}{2}, 5]$ käyrä $y=\sqrt{5-x}$ on alempana kuin käyrä $y=\sqrt{x+2}$, sillä esimerkiksi testikohdassa $x = 3$ on $\sqrt{5-3}=\sqrt{2} < \sqrt{3+2}=\sqrt{5}$.

Lasketaan käyrien $y=\sqrt{5-x}$ ja $y=\sqrt{x+2}$ sekä suoran $y = 0$ rajoittaman alueen pinta-ala kahtena alueena määrättyjen integraalien $A_1=\int_{-2}^{\frac{3}{2}}\sqrt{x+2}\mathrm{d}x$ ja $A_2=\int_{\frac{3}{2}}^{5}\sqrt{5-x}\mathrm{d}x$ summana.

$$
\begin{aligned}
A_1&=\int_{-2}^{\frac{3}{2}}\sqrt{x+2}\mathrm{d}x\\
&=\int_{-2}^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\
&=\int_{-2}^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\
&=\Big/_{-2}^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\\
&=\Big/_{-2}^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}(x+2)^{1+\frac{1}{2}}\\
&=\Big/_{-2}^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}(x+2)^{1}(x+2)^{\frac{1}{2}}\\
&=\Big/_{-2}^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\\
&=\frac{2}{3}\Big/_{-2}^{\frac{3}{2}}(x+2)\sqrt{x+2}\\
&=\frac{2}{3}((\frac{3}{2}+\frac{4}{2})\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{4}{2}}-(-2+2)\sqrt{-2+2})\\
&=\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{7}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{7}{2}}-0\\
&=\frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$A_2 = \int_{\frac{3}{2}}^{5} \sqrt{5-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\frac{3}{2}}^{5} (5-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= -1 \cdot \int_{\frac{3}{2}}^{5} (-1)\cdot(5-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{\frac{3}{2}}^{5} (-1)\cdot(5-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\Big/_{\frac{3}{2}}^{5} \frac{2}{3}(5-x)^{\frac{3}{2}}$$
$$= -\Big/_{\frac{3}{2}}^{5} \frac{2}{3}(5-x)^{1+\frac{1}{2}}$$
$$= -\Big/_{\frac{3}{2}}^{5} \frac{2}{3}(5-x)^{1}(5-x)^{\frac{1}{2}}$$
$$= -\frac{2}{3}\Big/_{\frac{3}{2}}^{5}(5-x)\sqrt{5-x}$$
$$= -\frac{2}{3}((5-5)\sqrt{5-5} - (\frac{10}{2}-\frac{3}{2})\sqrt{\frac{10}{2}-\frac{3}{2}})$$
$$= -\frac{2}{3}(0\cdot\sqrt{0} - \frac{7}{2}\sqrt{\frac{7}{2}})$$
$$= -\frac{\cancel{2}}{3}(-\frac{7\sqrt{7}}{\cancel{2}\sqrt{2}})$$
$$= \frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}$$

Kysytyn alueen pinta-ala on summa $A_1 + A_2$:

$$A_1 + A_2 = \frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} + \frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} = {}^{\sqrt{2})}\frac{14\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\overset{7}{\cancel{14}}\sqrt{14}}{3\cdot\cancel{2}} = \frac{7\sqrt{14}}{3}.$$

b) Lasketaan käyrän $y = 2x^3 + x^2 - 6x$ ja x-akselin leikkauskohdat yhtälöstä $2x^3 + x^2 - 6x = 0$:

$$2x^3 + x^2 - 6x = 0$$
$$x(2x^2 + x - 6) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x^2 + x - 6 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4}$$
$$x = \frac{-1 \pm 7}{4}$$
$$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x = -2$$

Käyrän leikkaa x-akselin kohdissa $x = –2$, $x = 0$ ja $x = \frac{3}{2}$.

Lasketaan lausekkeen merkki välille]–2, 0[testikohdan $x = –1$ avulla. Kohdassa $x = –1$ lausekkeen arvo on
$2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 2 \cdot (-1) + 1^2 + 6 = -2 + 1 + 6 = 5$, joten välillä [–2, 0] lauseke $2x^3 + x^2 - 6x$ saa ei-negatiivisia arvoja.
Välillä $[0, \frac{3}{2}]$ lauseke $2x^3 + x^2 - 6x$ saa negatiivisia arvoja, sillä esimerkiksi testikohdassa $x = 1$ lausekkeen arvo on
$2 \cdot 1^3 + 1^2 - 6 \cdot 1 = 2 \cdot 1 + 1 - 6 = 2 + 1 - 6 = -3$.

Kysytyn alueen pinta-ala saadaan siis määrättyjen integraalien

$$\int_{-2}^{0} (2x^3 + x^2 - 6x)\mathrm{d}x \text{ ja } -\int_{0}^{\frac{3}{2}} (2x^3 + x^2 - 6x)\mathrm{d}x \text{ summana.}$$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} (2x^3 + x^2 - 6x)\mathrm{d}x + \left(-\int_{0}^{\frac{3}{2}} (2x^3 + x^2 - 6x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_{-2}^{0} (2x^3 + x^2 - 6x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{\frac{3}{2}} (2x^3 + x^2 - 6x)\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{-2}^{0}\left(2\cdot\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 6\cdot\frac{1}{2}x^2\right) - \Big/_{0}^{\frac{3}{2}}\left(2\cdot\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 6\cdot\frac{1}{2}x^2\right) \\
&= \Big/_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right) - \Big/_{0}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right) \\
&= \left(0 - \left(\frac{1}{2}\cdot(-2)^4 + \frac{1}{3}\cdot(-2)^3 - 3\cdot(-2)^2\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 0\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2}\cdot 16 - \frac{8}{3} - 12\right) - \left(\frac{81}{32} + {}^{4)}\frac{9}{8} - {}^{8)}\frac{27}{4}\right) \\
&= -\left(8 - \frac{8}{3} - 12\right) - \left(\frac{81}{32} + \frac{36}{32} - \frac{216}{32}\right) \\
&= -8 + \frac{8}{3} + 12 - \left(-\frac{99}{32}\right) \\
&= 4 + {}^{32)}\frac{8}{3} + {}^{3)}\frac{99}{32} \\
&= {}^{96)}\frac{4}{1} + \frac{256}{96} + \frac{297}{96} \\
&= \frac{384}{96} + \frac{256}{96} + \frac{297}{96} \\
&= \frac{937}{96} \\
&= 9\frac{73}{96}
\end{aligned}
$$

822. Paraabelin $y = 9 - x^2$ ja x-akselin leikkauskohdat saadaan yhtälöstä $9 - x^2 = 0$, josta saadaan $x = 3$ tai $x = -3$.

Alaspäin aukeavan paraabelin $y = 9 - x^2$ ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala on $\int_{-3}^{3}(9 - x^2)\mathrm{d}x = 36$.

Paraabelin $y = 9 - x^2$ ja suoran $x - y + 7 = 0$ eli $y = x + 7$ leikkauskohdat saadaan yhtälöstä $9 - x^2 = x + 7$, josta $x = -2$ tai $x = 1$.

Välillä $]-2, 1[$ paraabeli on suoraa ylempänä, sillä esimerkiksi kohdassa $x = 0$ on paraabelin piste $(0, 9 - 0^2) = (0, 9)$ kun suoran piste on vastaavassa kohdassa $(0, 0 + 7) = (0, 7)$.

Käyrien rajaaman alueen pinta-ala saadaan siis määrätystä integraalista

$$\int_{-2}^{1}((9 - x^2) - (x + 7))\mathrm{d}x = \frac{9}{2}.$$

Suoran $y = x + 7$ alapuolella olevan paraabelin ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala on $36 - \frac{9}{2} = \frac{63}{2}$. Kysytty pinta-alojen suhde on $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{63}{2}} = \frac{1}{7}$.

823. Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax(x - 4)$. Paraabeli kulkee pisteen (1, 3) kautta, joten tämä piste toteuttaa paraabelin yhtälön.

$$a(1 - 4) = 3$$
$$-3a = 3$$
$$a = -1$$

Paraabelin yhtälö on siis $y = -x(x - 4) = -x^2 + 4x$.

Suora $y = kx + b$ kulkee pisteiden (1, 3) ja (2, 0) kautta.
Suoran kulmakerroin on $\dfrac{0-3}{2-1} = -3$.
Suoran yhtälö on

$$y - 0 = -3(x - 2)$$
$$y = -3x + 6.$$

Paraabeli $y = -x^2 + 4x$ rajoittaa x-akselin kanssa alueen, jonka pinta-ala saadaan määrätystä integraalista ja se on $\int_0^4 (-x^2 + 4x)\mathrm{d}x = \dfrac{32}{3}$.

Välillä [0, 1] paraabelin ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on $\int_0^1 (-x^2 + 4x)\mathrm{d}x = \dfrac{5}{3}$ ja välillä [1, 2] suoran ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala $\int_1^2 (-3x + 6)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}$.

Kysytyn alueen pinta-ala on siis $\dfrac{32}{3} - \dfrac{5}{3} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{15}{2}$.

824. Funktion $f(x) = -2x + 4$ integraalifunktiot ovat muotoa
$\int(-2x+4)\mathrm{d}x = -x^2 + 4x + C.$ Integraalifunktioiden kuvaajat ovat
paraabeleja, joten funktion suurin arvo saavutetaan paraabelin huipussa, kohdassa joka on funktion derivaatan nollakohta.
Siis $F'(x) = -2x + 4$, josta $F'(x) = 0$ kun $x = 2$.
Integraalifunktion suurin arvo saavutetaan kohdassa $x = 2$, joten nyt oltava $F(2) = 5$.
$-2^2 + 4 \cdot 2 + C = 5$, josta $C = 1$

Kysytty integraalifunktio on siten $F(x) = -x^2 + 4x + 1$.

825. Ratkaistaan käyrien $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ välillä $[0, \pi]$ olevat leikkauskohdat.

$$\sin x = \sin 2x$$

$$\begin{aligned} x &= 2x + n \cdot 2\pi \quad &\text{tai}\quad x &= \pi - 2x + n \cdot 2\pi \\ x - 2x &= n \cdot 2\pi & x + 2x &= \pi + n \cdot 2\pi \\ -x &= n \cdot 2\pi \;\; \|: (-1) & 3x &= \pi + n \cdot 2\pi \;\; \|:3 \\ x &= n \cdot 2\pi & x &= \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Välillä $[0, \pi]$ on nollakohdista ainoastaan kohta $x = \frac{\pi}{3}$.

Selvitetään välin $]0, \frac{\pi}{3}[$ testikohdan avulla, kumpi käyristä on ylempänä välillä $]0, \frac{\pi}{3}[$. Valitaan testikohdaksi $x = \frac{\pi}{4}$.

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, joten välillä $]0, \frac{\pi}{3}[$ käyrä $y = \sin 2x$ on ylempänä.

Välillä $]\frac{\pi}{3}, \pi[$ testikohdaksi voidaan valita esimerkiksi kohta $x = \frac{\pi}{2}$.

Nyt $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ja $\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(\pi) = 0$, joten välillä $]\frac{\pi}{3}, \pi[$ käyrä $y = \sin x$ on ylempänä.

Kaksiosaisen alueen pinta-ala voidaan laskea määrättyjen integraalien $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\mathrm{d}x$ ja $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\mathrm{d}x$ summana $A_1 + A_2$.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cdot\sin 2x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\,\Big/_{0}^{\frac{\pi}{3}}(-\cos 2x) - \Big/_{0}^{\frac{\pi}{3}}(-\cos x) \\
&= -\frac{1}{2}\,\Big/_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\cos 2x) + \Big/_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\cos x) \\
&= -\frac{1}{2}(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos(2\cdot 0)) + (\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0) \\
&= -\frac{1}{2}(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos 0) + \cos\frac{\pi}{3} - \cos 0 \\
&= -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - 1) + \frac{1}{2} - 1 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 2 \cdot \sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(-\cos x) - \frac{1}{2}\Big/_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(-\cos 2x)$$

$$= -\Big/_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos x + \frac{1}{2}\Big/_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos 2x$$

$$= -(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}(\cos(2\cdot\pi) - \cos(2\cdot\frac{\pi}{3})$$

$$= -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos\frac{2\pi}{3})$$

$$= -(-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - (-\frac{1}{2}))$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2})$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= 2\frac{1}{4}$$

Kysytyn alueen pinta-ala on summa

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4}^{(2} = \frac{5}{2}.$$

826.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^n \mathrm{d}x + \int_0^1 \sqrt[n]{x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^n \mathrm{d}x + \int_0^1 x^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}x \\
&= \Big/_0^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \Big/_0^1 \frac{1}{\frac{1}{n}+1} x^{\frac{1}{n}+1} \\
&= \Big/_0^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \Big/_0^1 \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{n}{n}} x^{\frac{1}{n}+\frac{n}{n}} \\
&= \Big/_0^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \Big/_0^1 \frac{1}{\frac{n+1}{n}} x^{\frac{n+1}{n}} \\
&= \Big/_0^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \Big/_0^1 \frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} \\
&= \frac{1}{n+1}(1^{n+1} - 0^{n+1}) + \frac{n}{n+1}(1^{\frac{n+1}{n}} - 0^{\frac{n+1}{n}}) \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot 1 + \frac{n}{n+1} \cdot 1 \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{1+n}{n+1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Lausekkeen arvo on positiivisen kokonaisluvun n arvosta riippumatta aina 1.

827. **a)**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= |x-1|+1 \\
&= \begin{cases} (x-1)+1, & \text{kun } x-1 \geq 0 \\ -(x-1)+1, & \text{kun } x-1 < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 1 \\ -x+2, & \text{kun } x < 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 (-x+2)\mathrm{d}x + \int_1^2 x\mathrm{d}x \\
&= \overset{1}{\underset{0}{/}}(-\frac{1}{2}x^2+2x) + \overset{2}{\underset{1}{/}}\frac{1}{2}x^2 \\
&= (-\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1 - 0) + (\frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 1^2) \\
&= -\frac{1}{2}\cdot 1 + 2 + \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2} + 2 + 2 - \frac{1}{2} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

828. Puistoa rajaavat käyrät $y = -0{,}12x^2 + 1{,}09x + 2$ ja $y = 0{,}012x^4 - 0{,}19x^3 + x^2 - 1{,}3x + 0{,}6$ sekä suora $x = 0$ (y-akseli).

a) Käyrät leikkaavat toisensa kohdissa $x = -0{,}472\ldots$ ja $x = 6{,}766\ldots$.
Näistä vain kohta $x = 6{,}766\ldots \approx 6{,}8$ on 1. neljänneksessä.
Leikkauspisteen y-koordinaatti on arvo $f(6{,}766\ldots)$ tai $g(6{,}766\ldots)$.
Nyt $f(6{,}766\ldots) = 3{,}881\ldots \approx 3{,}9$, joten leikkauspiste on $(6{,}8; 3{,}9)$.

b) Käyrien ja suoran $x = 0$ rajoittaman alueen pinta-ala on määrätty integraali $\int_0^{6,76...} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

Nyt

$$\int_0^{6,76...} (-0{,}12x^2 + 1{,}09x + 2 - (0{,}012x^4 - 0{,}19x^3 + x^2 - 1{,}3x + 0{,}6)\,\mathrm{d}x$$

$= 14{,}056...$ (pinta-alayksikköä)

Yksi pinta-alayksikkö eli ruudun pinta-ala on $10\text{ m} \cdot 10\text{ m} = 100\text{ m}^2$.

Kysytyn alueen pinta-ala on siis
$14{,}056\ldots \cdot 100\text{ m}^2 = 1405{,}6\ldots\text{ m}^2 \approx 1400\text{ m}^2 = 14\text{ a}$ (14 aaria).

829. Vallin reunaa kuvaava paraabeli $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, voidaan sijoittaa koordinaatistoon esimerkiksi siten, että kuvaajaparaabeli kulkee pisteiden (–2, 0), (0, 3) ja (2, 0) kautta. Näistä tiedoista saadaan yhtälöryhmä ja sen ratkaisuna tarvittavat kertoimet a, b ja c:

$$\begin{cases} 0 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c \\ 3 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ 0 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \end{cases}, \text{ josta } \begin{cases} a = -\dfrac{3}{4} \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Paraabelin yhtälö on siis $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$.

Poikkileikkauksen pinta-ala on määrätty integraali

$$\int_{-2}^{2} (-\frac{3}{4}x^2 + 3)\mathrm{d}x = 8 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Meluvallin tilavuus on tällöin $V = 8 \text{ m}^2 \cdot 75 \text{ m} = 600 \text{ m}^3$. Meluvalliin tarvitaan täyttömaata $\dfrac{600 \text{ m}^3}{12 \text{ m}^3\text{/kuorma}} = 50$ kuormaa.

830. Tunnelin poikkileikkausta kuvaava paraabeli on muotoa $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$. Paraabeli voidaan sijoittaa koordinaatistoon esimerkiksi siten, että kuvaajaparaabeli kulkee pisteiden (–5, 0) ja (5, 0) kautta. Toisen asteen polynomin nollakohtiensa avulla kirjoitettuna yhtälö on $y = a(x - 5)(x - (-5))$, joka sievenee muotoon $y = ax^2 - 25a$.

Koska tehtävänannon mukaan poikkileikkauksen pinta-ala on 25,0 (m²), saadaan määrätty integraali $\int_{-5}^{5} (ax^2 - 25a)\mathrm{d}x = 25$, josta saadaan $a = -\frac{3}{20}$.

Paraabeli on siis $y = -\frac{3}{20}x^2 - 25\cdot(-\frac{3}{20}) = -\frac{3}{20}x^2 + \frac{15}{4}$.

Koska nollakohdat ovat $x = -5$ ja $x = 5$, niin paraabelin huippu sijaitsee y-akselilla ($x = 0$). Lasketaan huipun y-koordinaatti, joka on kysytty tunnelin korkeus: $y(0) = -\frac{3}{20}\cdot 0^2 + \frac{15}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$ (m).

831. a)

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+1} (x^2 + x)\mathrm{d}x &= \Big/_{t}^{t+1} (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2) \\
&= (\frac{1}{3}(t+1)^3 + \frac{1}{2}(t+1)^2) - (\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2) \\
&= \frac{1}{3}(t^2 + 2t + 1)(t+1) + \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1) - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \\
&= \frac{1}{3}(t^3 + t^2 + 2t^2 + 2t + t + 1) + \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \\
&= \frac{1}{3}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1) + \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \\
&= \cancel{\frac{1}{3}t^3} + t^2 + t + \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}t^2} + t + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}t^3} - \cancel{\frac{1}{2}t^2} \\
&= t^2 + 2t + {}^{2)}\frac{1}{3} + {}^{3)}\frac{1}{2} \\
&= t^2 + 2t + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \\
&= t^2 + 2t + \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Määritetään vakion t arvo tiedosta $t^2 + 2t + \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$.

$$
\begin{aligned}
t^2 + 2t + \frac{5}{6} &= \frac{5}{6} \\
t^2 + 2t &= 0 \\
t(t+2) &= 0 \\
t = 0 \quad \text{tai} \quad t + 2 &= 0 \\
t &= -2
\end{aligned}
$$

b) Määrätty integraalia kuvaa lauseke $t^2 + 2t + \frac{5}{6}$, jonka kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Lausekkeen pienin arvo saavutetaan derivaatan nollakohdassa:

$D(t^2 + 2t + \frac{5}{6}) = 2t + 2$, joten ratkaistaan yhtälö $2t + 2 = 0$.

$$
\begin{aligned}
2t + 2 &= 0 \\
2t &= -2 \quad \| : 2 \\
t &= -1
\end{aligned}
$$

832. $\overline{OP} = (t+1)\bar{i} + t^2\bar{j},\ \ -1 \le t \le 1$

Päätepisteen P koordinaatit ovat $(t + 1, t^2)$. Paikkavektorin päätepisteen (x, y) koordinaatit ovat $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2 \end{cases}$. Koska vakion t arvot ovat välillä $[–1, 1]$, niin x-koordinaatille on voimassa $0 \le x \le 2$.

Yhtälöstä $x = t + 1$ saadaan $t = x – 1$. Sijoitetaan yhtälöparin alempaan yhtälöön t:n paikalle lauseke $x – 1$, jolloin saadaan
$y = (x – 1)^2 = x^2 – 2x + 1$, kun $0 \le x \le 2$.

Välillä $[0, 2]$ funktio $x^2 – 2x + 1$ saa ei-negatiivisia arvoja, joten kysytyn alueen pinta-ala on määrätty integraali

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x &= \mathop{/}_0^2\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right) \\
&= \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2^2 + 2 \\
&= \frac{8}{3} - 4 + 2 \\
&= \frac{8}{3} - 2 \\
&= \frac{8}{3} - \frac{6}{3} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

833. Koska $g'(x) = f(x)$, niin funktio $g(x)$ on funktion $f(x)$ integraalifunktio.

a) $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \overset{3}{\underset{1}{/}} g(x) = g(3) - g(1) = 1 - 3 = -2$

b) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = g(1) - g(0) = 3 - 3 = 0$

834. Kysytyn pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan kaavasta

$$V=\pi\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x.$$

Integrointia varten lauseke $\sin^2 x$ muokataan kaksinkertaisen kulman kaavalla $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ muotoon, josta integrointi ilman apuvälinettä on mahdollinen:

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= 1-2\sin^2 x\\
2\sin^2 x &= 1-\cos 2x \quad \|:2\\
\sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2}
\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^2\mathrm{d}x\\
&= \pi\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x\\
&= \pi\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}2\cdot\cos 2x\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi}{2}\Big/_{-\pi}^{\pi}x-\frac{\pi}{4}\Big/_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\\
&= \frac{\pi}{2}(\pi-(-\pi))-\frac{\pi}{4}(\sin(2\cdot\pi)-\sin(2\cdot(-\pi)))\\
&= \frac{\pi}{2}(\pi+\pi)-\frac{\pi}{4}(\sin(2\pi)-\sin(-2\pi))\\
&= \frac{\pi}{2}(2\pi)-\frac{\pi}{4}(0-0)\\
&= \pi^2
\end{aligned}$$

835. **a)**

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{8} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x + \int_{3}^{8} f(x)\mathrm{d}x \\
&= -\underbrace{\frac{(3-(-1))\cdot 2}{2}}_{\text{kolmion pinta-ala}} + \underbrace{\frac{(8-3)+1}{2}\cdot 2}_{\substack{\text{puolisuunnikkaan} \\ \text{pinta-ala}}} \\
&= -\frac{4\cdot 2}{2} + \frac{6}{2}\cdot 2 \\
&= -4 + 6 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{8} |f(x)|\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{3} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{3}^{8} f(x)\mathrm{d}x \\
&= |-\underbrace{\frac{(3-(-1))\cdot 2}{2}}_{\text{kolmion pinta-ala}}| + \underbrace{\frac{(8-3)+1}{2}\cdot 2}_{\substack{\text{puolisuunnikkaan} \\ \text{pinta-ala}}} \\
&= |-\frac{4\cdot 2}{2}| + \frac{6}{2}\cdot 2 \\
&= |-4| + 6 \\
&= 4 + 6 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

c) Funktion f integraalifunktio on kasvava väleillä, joilla sen derivaattafunktio f saa ei-negatiivisia arvoja. Nyt $f(x) \geq 0$, kun $3 \leq x \leq 8$.

d) Välillä [2, 3] funktion F derivaattafunktio f saa ei-positiivisia arvoja. Tällä perusteella tällä välillä funktio F on vähenevä ja $F(2) > F(3)$.

e) Kohtaan $x = 3$ funktion f kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on positiivinen ja kuvan perusteella se on noin 1. Vastaavasti kohtaan $x = 7$ piirretyn tangentin kulmakerroin on negatiivinen ja kuvan perusteella se on noin –1. Siis väite $f'(3) < f'(7)$ on epätosi.

836. Kysytty polynomifunktio on muotoa $|a|(x-(-1))(x-1) = a(x^2-1)$. Pinta-alaehdosta saadaan määrätyn integraalin avulla yhtälö, josta esimerkiksi vakion a voidaan määrittää.

$\int_{-1}^{1} |a|(x^2-1)\,\mathrm{d}x = 5$, josta $a = -\frac{15}{4}$ tai $a = \frac{15}{4}$.

837. Ratkaisuissa käytetään kaavoja
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x \\
&= \mathop{/}_0^{\frac{\pi}{2}} x \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot(\cos 2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\mathop{/}_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \sin(2\cdot 0)\right) \\
&= \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) \\
&= \frac{1}{2}(0-0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Integraalien summasta ja erotuksesta saadaan yhtälöpari, josta saadaan ratkaistua integraalien I_1 ja I_2 arvot.

$$+\begin{cases} I_1 + I_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ I_1 - I_2 = 0 \end{cases}$$

$$2I_1 = \frac{\pi}{2} \quad \|:2$$

$$I_1 = \frac{\pi}{4}$$

Koska $I_1 - I_2 = 0$, niin $I_1 = I_2$. Siis $I_1 = I_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

838. **a)** Funktiolla f on paikallinen maksimikohta kohdassa $x = a$, jos derivaattafunktion merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi tässä kohdassa. Paikallisessa terassikohdassa derivaatan arvo on nolla, mutta kohdassa derivaatan merkki ei vaihdu. Derivaatan merkki voi olla kaikkialla ei-negatiivinen tai ei-positiivinen.

Haetun funktion f integraalifunktiolla on paikallinen maksimikohta $x = 1$ ja terassikohta $x = 2$. Funktion f integraalifunktion tapauksessa kohdat ovat integraalifunktion derivaattafunktion nollakohtia eli nyt funktion f nollakohtia. Ehdot täyttävä funktio f voisi olla esimerkiksi binomin $1 – x$ (kuvaaja laskeva suora) ja binomin neliön $(x – 2)^2$ (kuvaaja ylöspäin aukeava paraabeli) tulo. Näiden binomien tapauksessa funktion f merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi kohdassa $x = 1$, jossa laskeva suora $y = –x + 1$ leikkaa x-akselin. Lisäksi funktion $(x – 2)^2$ merkki on kaikkialla ei-negatiivinen ja arvo 0 saavutetaan kohdassa $x = 2$, jossa ylöspäin aukeava paraabeli sivuaa x-akselia.

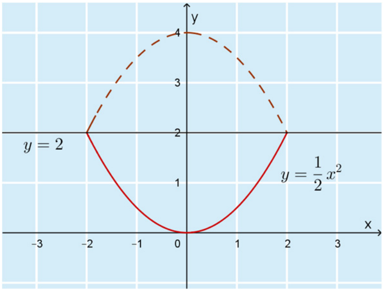
Ehdot täyttävä funktio f on esimerkiksi
$f(x) = (1 – x)(x – 2)^2 = −(x – 1)(x – 2)^2 = –x^3 + 5x^2 – 8x + 4.$

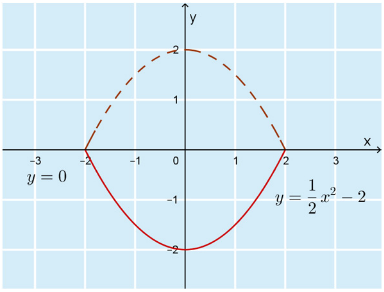
b) Välin $[–1, 1]$ pituus on $1 – (–1) = 2$, joten pinta-alaehto 20 toteutuu suorakulmiolla, jonka kanta on 2 ja korkeus 10.
Eräs ehdot täyttävä funktio f on esimerkiksi $f(x) = 10$.

c) Määrätty integraali yli välin $[1, 3]$ on 0, jos esimerkiksi sekä funktion kuvaajan ja x-akselin alapuolelle että funktion kuvaajan ja x-akselin yläpuolella jäävien alueiden pinta-alat ovat yhtä suuret. Jos funktion kuvaaja olisi nouseva tai laskeva suora, niin funktion nollakohta olisi tällöin kohdassa $x = 2$.

Eräs ehdot täyttävä funktio f on $f(x) = x – 2$.

839. Paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2$ ja suoran $y = 2$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $y = 2$ ympäri syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus on sama kuin pyörähdyskappaleella, joka syntyy paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ ja suoran $y = 0$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $y = 0$ eli x-akselin ympäri.





Paraabeli $y = \frac{1}{2}x^2$ leikkaa suoran $y = 2$ kohdissa $x = -2$ ja $x = 2$.

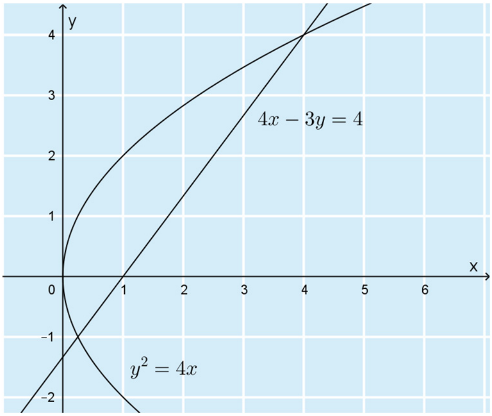
Vastaavasti paraabeli $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ leikkaa suoran $y = 0$ myös kohdissa $x = -2$ ja $x = 2$.

Syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan kaavasta

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (\frac{1}{2}x^2 - 2)^2 \mathrm{d}x = \frac{128}{15}\pi.$$

840. Paraabelin $y^2 = 4x$ ja suoran $4x - 3y = 4$ leikkauspisteet saadaan yhtälöparista $\begin{cases} y^2 = 4x \\ 4x - 3y = 4 \end{cases}$.

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = -1 \end{cases}$.



Paraabelin ja suoran rajoittaman alueen pinta-ala voidaan laskea helpommin integroimalla muuttujan y suhteen. Ratkaistaan kummankin käyrän yhtälö muuttujan x suhteen eli ilmaistaan muuttuja x muuttujan y avulla:

paraabeli: $y^2 = 4x$, josta $x = \frac{1}{4}y^2$

suora: $4x - 3y = 4$, josta $x = \frac{3}{4}y + 1$

Integroimisrajat muuttujan y suhteen integroitaessa ovat $y = -1$ ja $y = 4$. Valitaan väliltä $[-1, 4]$ testikohdaksi $y = 0$ ja selvitetään testikohdan avulla kumpi funktio muuttujan y suhteen saa suurempia arvoja välillä $[-1, 4]$:

paraabeli: $x = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$

suora: $x = \frac{3}{4} \cdot 0 + 1 = 1$

Paraabelin ja suoran väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala on

$$\int_{-1}^{4} \left(\frac{3}{4}y + 1 - \frac{1}{4}y^2\right) dy = \frac{125}{24} = 5{,}208... \approx 5{,}21.$$

841. Funktio $f(x)=1+15(x+1)^{-2}=1+\frac{15}{(x+1)^2}$ saa tarkasteluvälillä $x \geq 0$ positiivisia arvoja, joten koordinaattiakselien, suoran $x = 4$ ja käyrän $y=1+\frac{15}{(x+1)^2}$ rajoittaman alueen pinta-ala on $\int_0^4 (1+\frac{15}{(x+1)^2})\mathrm{d}x=16.$

Alue voidaan jakaa kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan (8 pinta-alayksikköä ja 8 pinta-alayksikköä) äärettömän monella tavalla. Jaetaan alue kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan y-akselin suuntaisen suoran $x = a$, $a > 0$ avulla:

$\int_0^a (1+\frac{15}{(x+1)^2})\mathrm{d}x=8,$ josta $a=-2\sqrt{6}-4<0$ tai $a=2\sqrt{6}-4.$

Suora $x=2\sqrt{6}-4$ jakaa alueen kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan.

842. Koska käyrä pyörähtää y-akselin, on käyrän yhtälö $y = 2\ln(x + 1)$, $0 \leq x \leq e - 1$, saatava muotoon $x = g(y)$.

$y = 2\ln(x + 1)$, josta saadaan $x=e^{\frac{y}{2}}-1.$

Määritetään muuttujan y suhteen tapahtuvan integroinnin rajat tiedosta $0 \leq x \leq e-1.$

Kun $x = 0$, niin $y = 2\ln(0 + 1) = 2\ln 1 = 0$.
Kun $x = e - 1$, niin $y = 2\ln(e - 1 + 1) = 2\ln e = 2$.

Kysytyn pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^2 (e^{\frac{y}{2}}-1)^2\mathrm{d}y \\
&= (e^2-4e+5)\pi \\
&= 4,762... \\
&\approx 4,76.
\end{aligned}
$$

843. Funktion $\sin x$ kuvaaja leikkaa x-akselin välillä $[0, 2\pi]$ kohdissa $x = 0$, $x = \pi$ ja $x = 2\pi$. Välillä $[0, \pi]$ on $\sin x \geq 0$ ja välillä $[\pi, 2\pi]$ $\sin x \leq 0$.

Välillä $[0, \pi]$ käyrä $y = f(x) + \sin x$ on ylempänä kuin käyrä $y = f(x)$, joten tällä välillä käyrien rajaaman alueen pinta-ala on

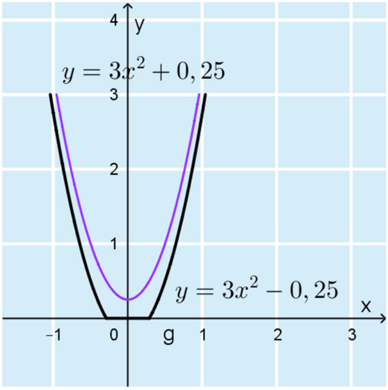
$$\int_0^\pi (f(x) + \sin x - f(x))\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2.$$

Välillä $[\pi, 2\pi]$ käyrä $y = f(x)$ on ylempänä kuin käyrä $y = f(x) + \sin x$, joten tällä välillä käyrien rajaaman alueen pinta-ala on

$$\int_\pi^{2\pi} (f(x) - (f(x) + \sin x))\mathrm{d}x = \int_\pi^{2\pi} (-\sin x)\mathrm{d}x = 2.$$

Välillä $[0, 2\pi]$ käyrien rajaaman alueen pinta-ala on siis $2 + 2 = 4$.

844. Hahmotellaan tilanteesta mallikuva.



Lasimaljakon ulkopinnan muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus on $\pi\int_0^3 g(y)^2 \mathrm{d}y$. Kirjoitetaan yhtälö $y = 3x^2 - 0,25$ suoraan muotoon $x^2 = g(y)^2$:

$$y = 3x^2 - 0,25$$
$$y + 0,25 = 3x^2 \quad \|:3$$
$$x^2 = \frac{y+0,25}{3}$$

Ulkopinnan muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus on siis $\pi\int_0^3 \frac{y+0,25}{3}\mathrm{d}y = \frac{7\pi}{4}$.

Maljakon sisäpinnan käyrä kohdassa $x = 0$ on pisteessä (0; 0,25), joten sisäpinnan muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus on $\pi\int_{0,25}^3 g(y)^2 \mathrm{d}y$.

Nyt $y = 3x^2 + 0,25$, josta saadaan $x^2 = \frac{y-0,25}{3}$.

Sisäpinnan muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus on siis

$$\pi\int_{0,25}^3 \frac{y-0,25}{3}\mathrm{d}y = \frac{121\pi}{96}.$$

Maljakon lasiosan tilavuus on siis $\frac{7\pi}{4}-\frac{121\pi}{96}=\frac{47\pi}{96}=1,53...$ tilavuuden yksikköä. Koska koordinaatiston yksikkö on 10 cm, niin tilavuuden yksikkö on $(10\text{ cm})^3 = 1000\text{ cm}^3 = 1\text{ dm}^3$.

Maljakon lasin tilavuus on siten 1,53… dm^3 ja maljakon massa $2{,}5\text{ kg/dm}^3 \cdot 1{,}53\ldots\text{ dm}^3 = 3{,}84\ldots\text{ kg} \approx 3{,}8\text{ kg}$.

845. Funktion *f* integraalifunktiot *F* ovat muotoa
$F(x)=\int(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+x+C.$

Integraalifunktion *F* kuvaajalla $y=\frac{1}{2}x^2+x+C$ ja funktion *f* kuvaajalla $y = x + 1$ on sivuamisen myötä yksi yhteinen piste. Tämä sivuamiskohta on yhtälön $\frac{1}{2}x^2+x+C=x+1$ ainoa ratkaisu. Toisen asteen yhtälöllä $\frac{1}{2}x^2+x+C=x+1$ eli yhtälöllä $\frac{1}{2}x^2+C-1=0$ on yksi ratkaisu, kun diskriminantti on 0.

Nyt $D=0^2-4\cdot\frac{1}{2}(C-1)=-2C+2,$ joten $D = 0$, kun $C = 1$.

Haettu integraalifunktio on siis $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1.$

846. Käyrän $y = x^3 + 1$ yhtälö on kirjoitettava y-akselin suuntaisen pyörähdyksen takia muotoon $x = g(y)$.

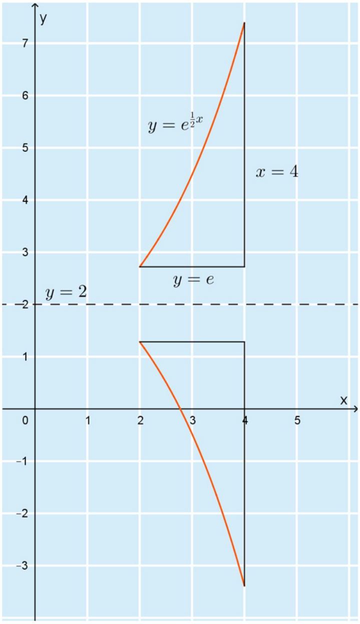
Nyt $y = x^3 + 1$, josta $x = \sqrt[3]{y-1}$.

Käyrän $x = \sqrt[3]{y-1}$ pyörähdys suoran $x = 3$ ympäri ja näin muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus on yhtä suuri kuin käyrän $x = \sqrt[3]{y-1} - 3$ pyörähdys suoran $x = 3 - 3 = 0$ eli y-akselin ympäri.

Integroimisrajat muuttujan y suhteen ovat $y = 0$ ja $y = 9$, joten muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\pi\int_0^9 (\sqrt[3]{y-1} - 3)^2 \, \mathrm{d}y = \frac{333\pi}{10}.$$

847. Hahmotellaan tilanteesta mallikuva.



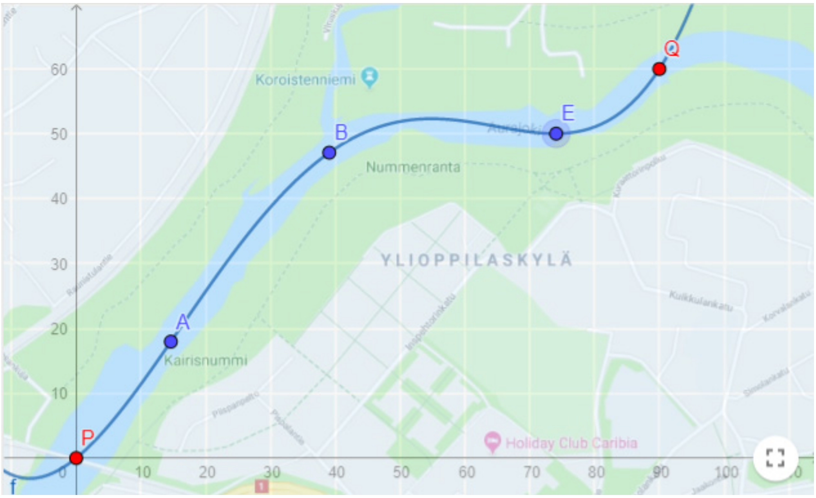
On huomattava, että muodostuva pyörähdyskappale on ontto, sillä kappaleen keskellä on ympyrälieriön muotoinen ontto tila.

Käyrän $y = e^{\frac{1}{2}x}$ ja suoran $y = e$ leikkauskohta saadaan yhtälöstä $e^{\frac{1}{2}x} = e$, ja yhtälön ratkaisu on $x = 2$. Käyrän pyörähdys x-akselin suuntaisen suoran ympäri tapahtuu välillä [2, 4]. Käyrän $y = e^{\frac{1}{2}x}$ pyörähdys välillä [2, 4] suoran $y = 2$ ympäri muodostaa pyörähdyskappaleen, jolla on sama tilavuus kuin pyörähdyskappaleella, joka syntyy käyrän $y = e^{\frac{1}{2}x} - 2$ pyörähtäessä välillä [2, 4] suoran $y = 2 - 2 = 0$ ympäri.

Nyt $\pi\int_2^4 (e^{\frac{1}{2}x} - 2)^2 \, \mathrm{d}y = (e^4 - 9e^2 + 8e + 8)\pi$.

Lasketusta pyörähdyskappaleesta on vähennettävä onton osan tilavuus, joka saadaan kaavalla $\pi(e-2)^2 \cdot (4-2) = 2(e-2)^2\pi$.
Tehtävänannon mukaisen pyörähdyskappaleen tilavuus on siis
$(e^4 - 9e^2 + 8e + 8)\pi - 2(e-2)^2\pi = (e^4 - 11e^2 + 16e)\pi$.

848. **a)** Esimerkiksi:



Funktio

$f(x) = 0.0000069683\,x^4 - 0.001128925\,x^3 + 0.0435446756\,x^2 + 0.8120686551\,x$

Piste

A = (14.60732368, 17.9520435254)

B = (39.0579902359, 47.09723806)

E = (74.071344744, 50.0313180467)

P = (0, 0)

Q = (90, 60)

b) Olkoon a-kohdassa määritelty funktio $f(x)$.

Joen pituus on $\int_0^{90} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 117{,}44\ldots\ (\text{m})$.

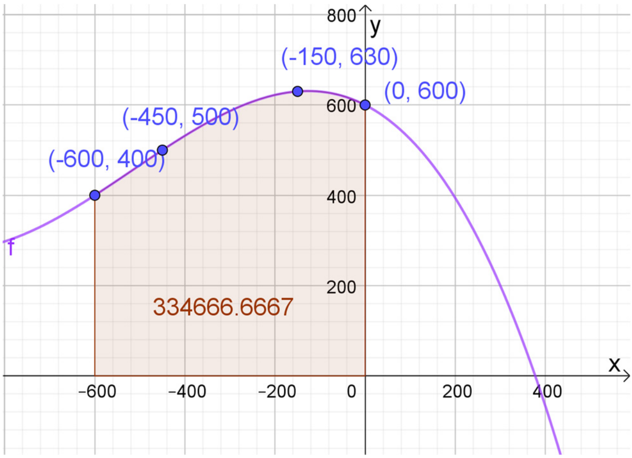
Koska koordinaatiston yksikkö on 10 m, on joen pituus
$10 \cdot 117{,}44\ldots\ \text{m} = 1174{,}4\ldots\ \text{m} \approx 1200\ \text{m}$.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

849. Asetetaan aluetta rajaavat pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan kolmannen asteen polynomi pisteisiin.

Alueen pinta-ala saadaan määrättynä integraalina $\int_{-600}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

Integraalin arvo on 334 666,66…, joten alueen pinta-ala on noin 330 000 m^2.



Vastauksesi kelpaavat myös muut järkevällä sovituksella saadut arviot.

850. **a)** Välillä [0, 1] funktio kulkee pisteiden (0, 0) ja (1, 1) kautta, ja tämän puolisuoran kulmakerroin on $k=\frac{1-0}{1-0}=1$. Käyrän yhtälö on siis $y = x$.

Välillä [1, 2] funktio saa vakioarvon 1, joten tällä välillä käyrän yhtälö on siis $y = 1$.

Välillä [2, 4] funktio kulkee pisteiden (2, 1) ja (3, 0) kautta, ja tämän puolisuoran kulmakerroin on $k=\frac{0-1}{3-2}=-1$. Puolisuora on osa suoraa, joka kulkee pisteen (3, 0) kautta ja jonka kulmakerroin on –1. Käyrän yhtälö on siis $y - 0 = -(x - 3)$ eli $y = -x + 3$.

Derivaatan $f'(x)$ lauseke välillä $0 \leq x \leq 4$ on siis

$$f'(x)=\begin{cases} x, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{kun } 1 < x \leq 2. \\ -x+3, & \text{kun } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

b) Integroimalla funktion f' lausekkeet, saadaan funktion f lauseke osaväleittäin.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+C_1, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ x+C_2, & \text{kun } 1 < x \leq 2. \\ -\frac{1}{2}x^2+3x+C_3, & \text{kun } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Koska integraalifunktio on jatkuva ja lisäksi $f(0) = 0$, niin näillä tiedoilla määritetään integroimisvakioiden C_1, C_2 ja C_3 arvot.

kohta $x = 0$:
$f(0) = 0$, joten $C_1 = 0$

kohta $x = 1$:

$$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + C_1 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^-} (\frac{1}{2} x^2) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} (x + C_2) = 1 + C_2$$

Funktiolla f on raja-arvo kohdassa $x = 1$, jos $\frac{1}{2} = 1 + C_2$. Yhtälön ratkaisu on $C_2 = -\frac{1}{2}$. Funktio on myös jatkuva kohdassa $x = 1$, sillä $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

kohta $x = 2$:

$$f(2) = 2 + C_2 = 2 + (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 2^-} (x - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 2^+} (-\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + C_3) = 4 + C_3$$

Funktiolla f on raja-arvo kohdassa $x = 2$, jos $\frac{3}{2} = 4 + C_3$. Yhtälön ratkaisu on $C_3 = -\frac{5}{2}$. Funktio on myös jatkuva kohdassa $x = 2$, sillä $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Funktion $f(x)$ lauseke välillä $0 \le x \le 4$ on siis

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2, & \text{kun } 0 \le x \le 1 \\ x - \frac{1}{2}, & \text{kun } 1 < x \le 2 \\ -\frac{1}{2} x^2 + 3x - \frac{5}{2}, & \text{kun } 2 < x \le 4 \end{cases}.$$

c) Funktio f on derivoituva välillä $0 < x < 4$ ja $f'(x) = 0$ vain, kun $x = 3$. Funktion f mahdolliset ääriarvokohdat välillä $0 \le x \le 4$ ovat suljetun välin päätepisteet $x = 0$ tai $x = 4$ tai välille kuuluva derivaattafunktion nollakohta $x = 3$.

$f(0) = 0$

$f(4) = \frac{3}{2}$

$f(3) = 2$

Funktion f arvoista suurin arvo on 2 ja pienin arvo 0.

851. Kirjoitetaan lauseke $|t - 1|$ osaväleittäin ilman itseisarvomerkkejä.

$$|t-1| = \begin{cases} t-1, & \text{kun } t-1 \ge 0 \\ -(t-1), & \text{kun } t-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} t-1, & \text{kun } t \ge 1 \\ -t+1, & \text{kun } t < 1 \end{cases}$$

Määritetään integraali osissa.

Kun $0 \le x < 1$, niin $\int_0^x (-t+1)\,dt = -\frac{1}{2}x^2 + x$.

Kun $1 \le x \le 2$, niin $\int_0^x |t-1|\,dt = \int_0^1 (-t+1)\,dt + \int_1^x (t-1)\,dt = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x, & \text{kun } 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - x + 1, & \text{kun } 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

852. **a)** Sinifunktion kuvaajan perusteella voidaan todeta, että

$$\int_0^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin t \,\mathrm{d}t.$$

Koska $\int_0^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin t \,\mathrm{d}t$, niin $\int_0^{\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{2\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t$.

Nyt $f(\pi) = \int_0^{\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t$, joten tämän perusteella saadaan

$$f(2\pi) = \int_0^{\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t = 2f(\pi).$$

b) Tarkastellaan väli $[0, 2\pi]$ osaväleinä $[0, \pi]$ ja $[\pi, 2\pi]$.
Väli $0 \le x \le \pi$, jolloin $0 \le t \le \pi$ ja $|\sin t| = \sin t$.
Väli $\pi \le x \le 2\pi$, jolloin $\pi \le t \le 2\pi$ ja $|\sin t| = -\sin t$.
Määrätty integraali välillä $[0, \pi]$ on $\int_0^{x} |\sin t| \,\mathrm{d}t = \int_0^{x} \sin t \,\mathrm{d}t = 1 - \cos x$.

Kun x on välillä $[\pi, 2\pi]$, niin

$$\int_0^{x} |\sin t| \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{x} (-\sin t) \,\mathrm{d}t = 3 + \cos x.$$

Funktio $f(x)$, kun $0 \le x \le 2\pi$, on $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & \text{kun } 0 \le x \le \pi \\ 3 + \cos x, & \text{kun } \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$.

853. Funktio $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(1+\frac{1}{x})\mathrm{d}x=x+\ln|x|+C.$ Kohdassa, jossa funktion kuvaaja sivuaa suoraa $y = 2$, on voimassa $f'(x) = 0$.
Sivuamiskohta saadaan yhtälöstä $1+\frac{1}{x}=0,$ josta $x=-1.$

Koska funktion kuvaaja sivuaa suoraa $y = 2$, niin on oltava $f(-1) = 2$.
Tämän tiedon perusteella saadaan yhtälö $-1 + \ln|-1| + C = 2$, josta $C = 3$.

Kysytty funktion f lauseke on siis $f(x) = x + \ln|x| + 3$.

854. **a)** $\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t=F(4)-F(1)=1-(-1)=2$

b) Funktio $f(x)$ on vakio, kun sen integraalifunktio on lineaarinen eli integraalifunktion kuvaaja on suora. Kuvaajan perusteella integraalifunktion F kuvaaja on suora väleillä [2, 3], [3; 4,5] ja [10, 12].

c) Funktion $F(x)$ kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakertoimelle on voimassa: $k_T = f(a)$.

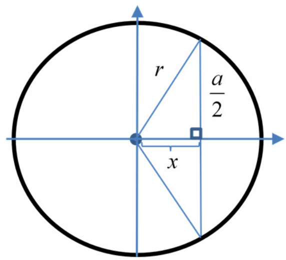
Funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä, kun tangentin kulmakertoimen arvot pienenevät. Kuvaajan perusteella tangentin kulmakertoimen arvot pienenevät eli funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä, kun $6,2 \le x \le 8,8$.

Huomautus: Tehtävässä on käytetty termiä ”aidosti kasvava” samassa merkityksessä kuin Juuressa käytetään termiä ”kasvava”.

855. Olkoon juustopalan suoran sivun päätepisteet $(0, r)$ ja $(0, -r)$. Juustopalan pohjana oleva puoliympyrä kulkee pisteiden $(0, r)$, $(0, -r)$ ja $(r, 0)$ kautta. Määritetään juustopalan tilavuus integroimalla suorakulmioiden, joiden kanta on y-akselin suuntainen, pinta-aloja. Suorakulmioiden korkeudet ovat tällöin välillä $[0, h]$, kun suorakulmion etäisyys y-akselista on välillä $[0, r]$.

Määritetään suorakulmion kannan pituus a etäisyydellä x Pythagoraan lauseen avulla.

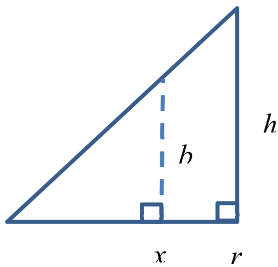
$r^2 = x^2 + (\frac{a}{2})^2$, josta $a = 2\sqrt{r^2 - x^2}$.



Määritetään suorakulmion korkeus b verrannon avulla yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista.

Nyt $\frac{h}{r} = \frac{b}{x}$, josta $b = \frac{hx}{r}$.

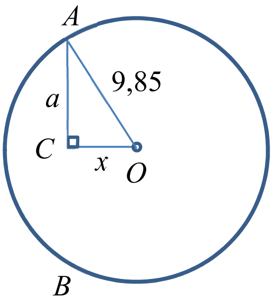
Suorakulmion kannan a pituus on muuttujan x funktio aivan kuten suorakulmion korkeus b.



Nyt suorakulmion pinta-ala on muuttujan x funktio:
$A(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{hx}{r}$, jossa $0 \leq x \leq r$.

Juustopalan tilavuus on $\int_0^r A(x)\mathrm{d}x = \int_0^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{hx}{r} = \frac{2}{3}r^2 h$.

856. Tarkastellaan rakennusta siten, että rakennuksen pohjaympyrän keskipiste on O. Pohjaympyrän tietyn halkaisijan suuntainen taso erottaa pohjaympyrästä halkaisijan suuntaisen jänteen AB. Olkoon jänteen AB keskipiste C. Olkoon suorakulmion kannan pituus $2a$, jolloin $AC = a$.



Muodostetaan suorakulmio, jonka kanta on janan AB suuntainen ja se on etäisyydellä x, $0 \le x \le 9{,}85$, pohjaympyrän keskipisteestä. Tehtävänannon mukaan suorakulmion korkeus on puolet kannasta.

Pythagoraan lauseen avulla saadaan $9{,}85^2 = x^2 + a^2$, josta $a = \sqrt{9{,}85^2 - x^2}$ ja edelleen suorakulmion kanta $2a = 2\sqrt{9{,}85^2 - x^2}$. Suorakulmion korkeus on tällöin $a = \sqrt{9{,}85^2 - x^2}$.

Suorakulmion pinta-ala A etäisyydellä x ympyrän keskipisteestä saadaan lausekkeesta $2\sqrt{9{,}85^2 - x^2} \cdot \sqrt{9{,}85^2 - x^2} = 2(9{,}85^2 - x^2)$. Suorakulmion pinta-alaa kuvaa siis funktio $A(x) = 2(9{,}85^2 - x^2)$, $0 \le x \le 9{,}85$.

Integroimalla pinta-alan lauseke yli välin [0; 9,85] saadaan tuloksena puolet rakennuksen tilavuudesta. Koko rakennuksen tilavuus saadaan määrätyn integraalin tuloksesta kertomalla se luvulla 2:

$$V = 2 \cdot \int_0^{9{,}85} 2(9{,}85^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2548{,}45\ldots\ (\mathrm{m}^3) \approx 2550\ (\mathrm{m}^3).$$