7 Differentiaalilaskenta

7.1 Raja-arvo ja jatkuvuus

LUVUN 7.1 YDINTEHTÄVÄT

701. **a)** $\lim_{x\to 2-} f(x) \approx 3$, $\lim_{x\to 2+} f(x) \approx 1$ ja $f(2) \approx 1$.

b) $\lim_{x\to -2} f(x) \approx 1$, $\lim_{x\to -1} f(x) \approx 1{,}5$ ja $\lim_{x\to 5} f(x) \approx 1$

Raja-arvoa kohdassa 2 ei ole olemassa.

c) Funktio on jatkuva kohdassa $x = 5$. Funktio on epäjatkuva kohdissa $x = -1$ ja $x = 2$. Funktion jatkuvuutta ei voida tarkastella kohdassa $x = -2$, koska funktiota ei ole määritelty tässä kohdassa.

702. **a)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$

b)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -7}\frac{x+7}{2x^2+10x-28}\\
&=\lim_{x\to -7}\frac{x+7}{2(x^2+5x-14)}\\
&=\lim_{x\to -7}\frac{\cancel{x+7}}{2(\cancel{x+7})(x-2)}\\
&=\lim_{x\to -7}\frac{1}{2(x-2)}\\
&=\frac{1}{2(-7-2)}\\
&=-\frac{1}{18}
\end{aligned}$$

$x^2+5x-14$ voidaan jakaa tekijöihin nollakohtien avulla.

$x^2+5x-14=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot 1\cdot(-14)}}{2\cdot 1}=\frac{-5\pm 9}{2}$$

$x=2$ tai $x=-7$

c)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 6}\frac{x^2-6x}{x^3-12x^2+36x}\\
&=\lim_{x\to 6}\frac{x(x-6)}{x(x^2-12x+36)}\\
&=\lim_{x\to 6}\frac{\cancel{x}(\cancel{x-6})}{\cancel{x}(x-6)^{\cancel{2}}}\\
&=\lim_{x\to 6}\frac{1}{x-6}
\end{aligned}$$

Koska osoittaja on 1 ja nimittäjä lähestyy lukua 0, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $x=6$.

d)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{1-e^x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(e^x-1)}(e^x+1)}{-\cancel{(e^x-1)}}\\
&=\lim_{x\to 0}(-(e^x+1))\\
&=-(e^0+1)\\
&=-(1+1)\\
&=-2
\end{aligned}
$$

703. **a)** $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, \text{kun } x<1 \\ \ln x+1, \text{kun } x\geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} e^{x-1}=e^{1-1}=e^0=1$
$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} (\ln x+1)=\ln 1+1=0+1=1$
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

Funktio *f* on jatkuva väleillä $x < 1$ ja $x > 1$. Tarkastellaan jatkuvuutta kohdassa $x = 1$.

$f(1) = \ln 1 + 1 = 1$
Funktion arvo ja raja-arvo kohdassa $x = 1$ ovat yhtä suuret, joten funktio *f* on jatkuva myös kohdassa $x = 1$. Funktio *f* on jatkuva.

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, \text{kun } x<1 \\ 3, \text{kun } x=1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, \text{kun } x>1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1-} (x+1)=1+1=2$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}}=\lim\limits_{x\to 1+} (\sqrt{x}+1)=\sqrt{1}+1=2$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

Funktion arvo kohdassa $x = 1$ on 3 eli $f(1) = 3$.
Funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = 1$, joten funktio ei ole jatkuva.

704. Jotta funktio olisi jatkuva kohdassa $x = -2$, tulee olla $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2)$.

$f(-2) = (-2)^2 + a^2 \cdot (-2) - 1 = 4 - 2a^2 - 1 = 3 - 2a^2$

$$\lim_{x\to -2-} f(x) = \lim_{x\to -2-} (ax^2 + 3) = a\cdot(-2)^2 + 3 = 4a + 3$$

$$\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2+} (x^2 + a^2x - 1) = (-2)^2 + a^2\cdot(-2) - 1 = 3 - 2a^2$$

Ehdosta $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2)$ saadaan

$$\begin{aligned}
3 - 2a^2 &= 4a + 3\\
-2a^2 - 4a &= 0\\
-2a(a + 2) &= 0\\
-2a = 0 \text{ tai } a + 2 &= 0\\
a = 0 \qquad a &= -2.
\end{aligned}$$

Funktio on jatkuva, kun $a = -2$ tai $a = 0$.

705. **a)** Rationaalifunktio on jatkuva määrittelyjoukossaan. Välillä]1, 3[on kohta $x = 2$, jossa funktiota ei ole määritelty. Annettujen tietojen avulla ei voida päätellä, onko funktiolla nollakohtaa välillä]1, 3[.

b) $f(3) > 0$ ja $f(4) < 0$ ja funktio f on jatkuva välillä]3, 4[. Bolzanon lauseen mukaan funktiolla on nollakohta välillä]3, 4[ja siis myös välillä]1, 4[.

c) Nollakohtien lukumäärää ei voida päätellä annettujen tietojen perusteella.

706. Määritetään janan AB pituus.

$$\sqrt{(a-a)^2 + (g(a) - f(a))^2} = |g(a) - f(a)| = \left|\frac{2}{a-1} - \frac{a^2+a}{a-1}\right| = |-a-2|$$

$$\lim_{a\to 1}|-a-2| = |-1-2| = 3$$

Janan AB pituus lähenee lukua 3.

7.2 Derivaatta

LUVUN 7.2 YDINTEHTÄVÄT

707. **a)** Pisteet A ja B ovat derivaattafunktion $f\,'$ nollakohtia, joten ne ovat funktion f ääriarvokohtia. Siis $A = (1, 0)$ ja $B = (4, 0)$.

b) $f\,'(0) = 4$

c) $f\,'(2) = -2$

d) $f(2) = 1$

708. **a)** $\mathrm{D}(3x^5 - 2x + \pi) = 3 \cdot 5x^4 - 2 + 0 = 15x^4 - 2$

b) $\mathrm{D}(\sin x \cos x) = \cos x \cos x + \sin x\,(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

c) $\mathrm{D}(4x^2 + 5x)^5$
$= 5(4x^2 + 5x)^4\,\mathrm{D}(4x^2 + 5x)$
$= 5(4x^2 + 5x)^4(8x + 5)$
$= (40x + 25)(4x^2 + 5x)^4$

709. **a)** $f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

$f'(-3) = \dfrac{(-3)^2 + 2 \cdot (-3)}{(-3+1)^2} = \dfrac{3}{4}$

b) Paraabelin huippu on derivaatan nollakohdassa.
$\mathrm{D}(3x^2 - 12x + 4) = 6x - 12$
$6x - 12 = 0$
$x = 2$
$y = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 4 = -8$

Huipun koordinaatit ovat $(2, -8)$.

c) Tangentin sivuamispisteen y-koordinaatti on $f(1) = e^0 + 3\ln 1 + 2 = 3$.
Tangentin sivuamispiste on $(1, 3)$.
Tangentin kulmakerroin on $f'(1)$.
$f'(x) = e^{2x-2} \cdot 2 + 3 \cdot \dfrac{1}{x} = 2e^{2x-2} + \dfrac{3}{x}$
$f'(1) = 2e^0 + 3 = 2 + 3 = 5$

Tangentin yhtälö on
$y - 3 = 5(x - 1)$
$y = 5x - 2.$

710. Jotta tangentti ei leikkaisi suoraa $y = 2x$, sen tulee olla yhdensuuntainen suoran $y = 2x$ kanssa, eli tangentin kulmakertoimen tulee olla 2.

$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2 = -2\sin 2x$

$$-2\sin 2x = 2 \quad \| : (-2)$$
$$\sin 2x = -1$$
$$2x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \| : 2 \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \| : 2$$
$$x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi \qquad x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi,$$

n on kokonaisluku

Vastaukset voidaan yhdistää.

Funktion f kuvaajalle kohtiin $x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$, piirretty tangentti ei leikkaa suoraa y.

711. $f'(x) = 2axe^x + ax^2e^x + be^x + bxe^x = ax^2e^x + (2a + b)xe^x + be^x$
$ax^2e^x + (2a + b)xe^x + be^x = 2x^2e^x + xe^x - 3e^x$

On oltava
$a = 2$, $2a + b = 1$ ja $b = -3$

Luvut $a = 2$ ja $b = -3$ toteuttavat myös ehdon $2a + b = 1$.

712.

$$\begin{aligned}
f'(-1) &= \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \\
&= \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - ((-1)^2 - 3 \cdot (-1))}{x + 1} \\
&= \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} \\
&= \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x - 4)}{\cancel{x+1}} \\
&= -1 - 4 \\
&= -5
\end{aligned}$$

713. **a)** Muutosnopeuden ilmoittaa derivaatta.
$f'(10) = -2{,}36\ldots \approx -2{,}4$ astetta minuutissa.

b) Ratkaistaan yhtälö $f'(t) = -0{,}5$.
$t = 41{,}08\ldots \approx 41$ minuuttia

c) $f'(0) = -3{,}9$
Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 0{,}5\ f'(0)$.
$x = 13{,}86\ldots \approx 14$ minuuttia

7.3 Funktion tutkiminen derivaatan avulla

LUVUN 7.3 YDINTEHTÄVÄT

714. **a)** $]-5, -3[$ ja $]-1, 2[$

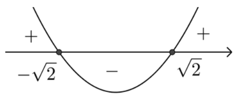
b) $x \approx -5$, $x \approx -3$, $x \approx -1$ ja $x \approx 2$

c) $[-6, -5[$, $]-3, -1[$ ja $]2, 3]$

d) Derivaatta on pienin, kun kuvaaja laskee jyrkimmin, eli kohdassa $x \approx 0{,}5$.

715. Tarkastellaan funktion kulkua derivaatan avulla. Funktion f derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2 - 6$.

$f'(x) = 0$, kun
$3x^2 - 6 = 0$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}$



Derivaatta on negatiivinen välillä $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ ja funktio on vähenevä välillä $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Funktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$f(0) = 1$
$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$

Välillä $[0, 2]$ on derivaatan nollakohdista $x = \sqrt{2}$.
$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - 6 \cdot \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 1 = -4\sqrt{2} + 1 = 1 - 4\sqrt{2}$

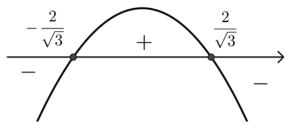
Suurin arvo on $f(0) = 1$ ja pienin $f(\sqrt{2}) = 1 - 4\sqrt{2}$.

716. Suorakulmion paraabelilla olevan kärjen koordinaatit ovat $(x, 4 - x^2)$.
Suorakulmion kanta on x ja korkeus $4 - x^2$.
Pinta-ala on $x(4 - x^2) = 4x - x^3$.
Määritetään pinta-alafunktion $f(x) = 4x - x^3$, $x \geq 0$ suurin arvo.

Tarkastellaan funktion kulkua derivaatan avulla. Nyt $f'(x) = 4 - 3x^2$.

$f'(x) = 0$, kun

$$4 - 3x^2 = 0$$
$$-3x^2 = -4$$
$$x^2 = \frac{4}{3}$$
$$x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ tai } x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$



		0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$f'(x)$		+	−
$f(x)$		↗	↘

Funktiolla on suurin arvo kohdassa $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \overset{3)}{=} \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{24-8}{3\sqrt{3}} = \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

Pinta-alan suurin arvo on $\frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$.

717. **a)** Vaakasuoran tangentin kulmakerroin on 0. Määritetään kohdat, joissa funktion f derivaatta $f\,'$ on 0.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}=(x^3+1)^{-\frac{1}{2}},\ x>-1$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 3x^2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2}{(x^3+1)^1(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{3x^2}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}$$

Ratkaistaan yhtälö $f\,'(x) = 0$:

$$-\frac{3x^2}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}=0,\ \text{kun}$$

$$3x^2=0$$

$$x=0$$

Kuvaajalla on vaakasuora tangentti kohdassa $x = 0$.

Funktio f on monotoninen, jos sen derivaatta ei vaihda merkkiään.
Derivaatan lausekkeessa osoittaja $3x^2 \geq 0$.
Nimittäjässä lauseke $x^3 + 1 > 0$, kun $x > -1$.
Tällöin $f'(x) \leq 0$, kun $x > -1$ ja derivaatta saa arvon 0 vain yksittäisessä kohdassa $x = 0$. Funktio f on vähenevä ja siis monotoninen.

b) $$f'(x)=1-\frac{1}{x^2+2}\cdot 2x={}^{x^2+2)}\frac{1}{1}-\frac{2x}{x^2+2}=\frac{x^2-2x+2}{x^2+2}$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2+2}=0,\ \text{kun}$$

$$x^2-2x+2=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot 2}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}\quad \text{ei ratkaisua}$$

Derivaatalla ei ole nollakohtia, joten funktion f kuvaajalla ei ole vaakasuoraa tangenttia missään kohdassa.

Derivaatan lausekkeessa osoittajan $x^2 - 2x + 2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia. Lauseke $x^2 - 2x + 2$ saa vain positiivisia arvoja. Myös nimittäjän lauseke $x^2 + 2$ saa vain positiivisia arvoja. Derivaatta on kaikkialla positiivinen, joten funktio on kasvava ja siis monotoninen.

718. Suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$$f(0) = \sin 0 + \sqrt{3}\cos 0 = 0 + \sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$$
$$f(2\pi) = \sin(2\pi) + \sqrt{3}\cos(2\pi) = \sqrt{3}$$

$$f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$$

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$
$$\sqrt{3}\sin x = \cos x \quad \|: \cos x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$
$$\sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x} = 1 \quad \|: \sqrt{3}$$
$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

Derivaatan nollakohdista välillä [0, 2π] on $x = \frac{\pi}{6}$ ja $x = \frac{7\pi}{6}$.

$$f(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$
$$f(\frac{7\pi}{6}) = \sin\frac{7\pi}{6} + \sqrt{3} \cdot \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

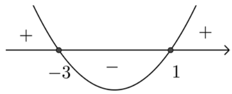
Funktion f suurin arvo on 2 ja pienin −2.

719. Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.
$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x$

$e^x > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

Derivaatan merkkiin vaikuttaa vain tekijän $x^2 + 2x - 3$ merkki.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$
$$x = -3 \text{ tai } x = 1$$



Funktio f on kasvava väleillä $x \leq -3$ ja $x \geq 1$ ja
vähenevä välillä $-3 \leq x \leq 1$.

Kohdassa $x = -3$ derivaattafunktion f' merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi ja samassa kohdassa funktio f vaihtuu kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = 3$ on siis paikallinen maksimikohta.
Kohdassa $x = 1$ on paikallinen minimikohta, koska derivaattafunktion f' merkki vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi ja funktio f vaihtuu vähenevästä kasvavaksi.

Paikallinen maksimiarvo on $f(-3) = ((-3)^2 - 3)e^{-3} = \dfrac{6}{e^3}$.

Paikallinen minimiarvo on $f(1) = (1^2 - 3)e^1 = -2e$.

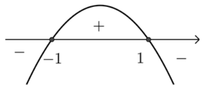
720. Funktio f on määritelty ja jatkuva koko reaalilukujoukossa, koska $x^4 + 3 > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Tarkastellaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = \frac{5(x^4+3) - 5x \cdot 4x^3}{(x^4+3)^2} = \frac{5x^4 + 15 - 20x^4}{(x^4+3)^2} = \frac{-15x^4 + 15}{(x^4+3)^2}$$

Derivaatan lausekkeessa nimittäjä $(x^4 + 3)^2$ on aina positiivinen. Derivaatan merkkiin vaikuttaa vain osoittajan merkki.

$$-15x^4 + 15 = 0$$
$$x^4 = 1$$
$$x = 1 \text{ tai } x = -1$$

Lausekkeen $-15x^4 + 15$ kuvaaja on paraabelin kaltainen.



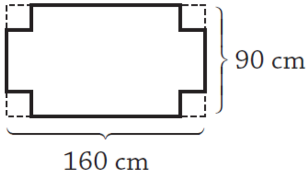
		−1		1	
$f'(x)$	−		+		−
$f(x)$	↘		↗		↘

Funktiolla f on paikallinen minimiarvo $f(-1) = \frac{-5}{1+3} = -\frac{5}{4}$ ja paikallinen maksimiarvo $f(1) = \frac{5}{1+3} = \frac{5}{4}$.

Kun muuttujan x arvot kasvavat rajatta, osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia ja funktio ei voi saada negatiivisia arvoja, vaikka funktion arvo pienenee, kun $x > 1$. Siis $f(-1) = -\frac{5}{4}$ on funktion pienin arvo.
Kun muuttujan arvot pienenevät rajatta, osoittaja $5x$ on negatiivinen ja nimittäjä $x^4 + 3$ positiivinen. Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -1$, joten se ei voi saada tällä välillä arvoa $\frac{5}{4}$ suurempia arvoja. Siis $f(1) = \frac{5}{4}$ on funktion suurin arvo. Jatkuva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa ja kaikki arvot niiden väliltä.

Funktion f arvojoukko on siis $[-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}]$.

721.



Merkitään poistetun neliön sivun pituutta kirjaimella x, kun $0 \leq x \leq 45$.

Laatikon pohjan mitat ovat $160 - 2x$ ja $90 - 2x$ ja laatikon korkeus on x.
Laatikon tilavuus on tällöin $(160 - 2x)(90 - 2x)x$.

Määritetään tilavuutta kuvaavan funktion
$V(x) = (160 - 2x)(90 - 2x)x$, kun $0 \leq x \leq 45$, suurin arvo.

Suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$V(0) = 0$
$V(45) = 0$

$V'(x) = 12x^2 - 1000x + 14400$
$12x^2 - 1000x + 14400 = 0$, kun
$x = 18{,}51\ldots$ tai $x = 64{,}82\ldots$

Välillä $0 \leq x \leq 45$ derivaatan nollakohdista on $x = 18{,}51\ldots$

$V(18{,}51\ldots) = 120\,601{,}5\ldots \approx 121\,000.$

Pois leikattavien sivujen pituus tulee olla noin 18,5 cm. Laatikon suurin tilavuus on noin $121\,000\ \text{cm}^3 = 121\ \text{dm}^3$ eli noin 121 litraa.

Luvun 7 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

722. f–II, g–I, h–IV

Funktion f kuvaaja näyttää paraabelilta, joten sen derivaattafunktion kuvaaja näyttää suoralta. Funktio f vähenee, kun $x \leq 0$ ja kasvaa, kun $x \geq 0$, joten derivaattafunktion kuvaajan tulee olla nouseva suora, jolla on nollakohta kohdassa $x = 0$.

Funktion g kuvaaja näyttää kolmannen asteen polynomifunktion kuvaajalta, joten sen derivaattafunktion kuvaaja näyttää paraabelilta. Derivaattafunktiolla tulee olla nollakohdat samoissa kohdissa kuin funktiolla g on ääriarvokohdat.

Funktion h kuvaaja näyttää nousevalta suoralta, joten sen derivaattafunktion kuvaaja näyttää vaakasuoralta suoralta, ja derivaattafunktion arvo on positiivinen.

723. **a)** $f'(x) = e^x x^3 + e^x \cdot 3x^2 = e^x(x^3 + 3x^2)$
$f'(2) = e^2(2^3 + 3 \cdot 2^2) = 20e^2$

b) $$f(x) = \frac{3}{x\sqrt{x}} = \frac{3}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} = 3x^{-\frac{3}{2}},\ x > 0$$

$$f'(x) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{9}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = -\frac{9}{2x^2\sqrt{x}}$$

$$f'(2) = -\frac{9}{2 \cdot 2^2\sqrt{2}} = {}^{\sqrt{2})}-\frac{9}{8\sqrt{2}} = -\frac{9\sqrt{2}}{16}$$

c) $f'(x) = \cos(3x - 1) \cdot 3 = 3\cos(3x - 1)$
$f'(2) = 3\cos(3 \cdot 2 - 1) = 3\cos 5$

724. **a)** $De^{x^2-3} = e^{x^2-3}\cdot D(x^2-3) = e^{x^2-3}\cdot 2x = 2xe^{x^2-3}$

b)

$$\begin{aligned} D\sqrt{6-3x} &= D(6-3x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(6-3x)^{-\frac{1}{2}}\cdot D(6-3x) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(6-3x)^{\frac{1}{2}}}\cdot(-3) \\ &= -\frac{3}{2\sqrt{6-3x}},\ x<-2 \end{aligned}$$

c) $D\ln(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}\cdot D(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

d) $D\ 5\tan x = 5(1+\tan^2 x) = 5 + 5\tan^2 x\ (= \frac{5}{\cos^2 x}),\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

e) $D\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x-2x\ln x}{x^4}^{(x} = \frac{1-2\ln x}{x^3},\ x>0$

f)

$$\begin{aligned} D((3x-1)\sqrt{3x-1}) &= D((3x-1)(3x-1)^{\frac{1}{2}}) \\ &= D(3x-1)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{2}(3x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot D(3x-1) \\ &= \frac{3}{2}(3x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 3 \\ &= \frac{9}{2}\sqrt{3x-1},\ x>\frac{1}{3} \end{aligned}$$

725. **a)** $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2},\ x > 0$

$$h'(2t) = \frac{1 - \ln(2t)}{(2t)^2} = \frac{1 - \ln 2t}{4t^2}$$

b $f'(x) = \dfrac{\cos x(2 + \cos x) - (2 + \sin x)(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2}$

$$= \frac{2\cos x + \cos^2 x + 2\sin x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x + 2\sin x + \overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1}}{(2 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x + 2\sin x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{2} + 1}{(2 + \cos\frac{\pi}{2})^2} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1}{(2 + 0)^2} = \frac{3}{4}$$

726. **a)** Nollakohdat ovat $x \approx -1$ ja $x \approx 5$.

b) Kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(3) = 2$.

c) Funktio on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$, eli välillä $[-3, 5]$.

d) Ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohtia, joissa derivaatan merkki vaihtuu. Kohta $x \approx 5$ on funktion paikallinen maksimikohta, koska derivaatan merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi. (Kohta $x \approx -1$ ei ole ääriarvokohta, vaan terassikohta.)

727. Suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 15 \cdot 2 + 2 = 8 - 24 - 30 + 2 = -44$
$f(6) = 6^3 - 6 \cdot 6^2 - 15 \cdot 6 + 2 = 0 - 90 + 2 = -88$

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$
$3x^2 - 12x - 15 = 0 \quad || : 3$
$x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$x = -1$ tai $x = 5$

Välillä [2, 6] on nollakohdista $x = 5$.

$f(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 + 2 = 125 - 150 - 75 + 2 = -98$

Suurin arvo on −44 ja pienin −98.

728. a)

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{{}^{2)}\frac{1}{x}-{}^{x)}\frac{1}{2}}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x}\cdot\frac{1}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-(\cancel{x-2})}{2x(\cancel{x-2})}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}\\
&= -\frac{1}{2\cdot 2}\\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{{}^{4)}\frac{1}{x^2}-{}^{x^2)}\frac{1}{4}}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{\frac{4-x^2}{4x^2}}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{4x^2(x-2)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{4x^2(x-2)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-(\cancel{x-2})(2+x)}{4x^2(\cancel{x-2})}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-(2+x)}{4x^2}\\
&= \frac{-(2+2)}{4\cdot 2^2}\\
&= -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Raja-arvo on funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ derivaatta kohdassa $x = 2$.

729. **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{2\sin x}}{\cancel{2\sin x}\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}&=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}\\&=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)\cancel{(1+\sin x)}}{\cancel{1+\sin x}}\\&=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}(1-\sin x)\\&=1-\sin\frac{3\pi}{2}\\&=1-(-1)\\&=2\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}&=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}{-\cancel{(\cos x-\sin x)}}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\cos x-\sin x)\\&=-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=-{}^{\sqrt{2})}\frac{2}{\sqrt{2}}\\&=-\frac{2\sqrt{2}}{2}\\&=-\sqrt{2}\end{aligned}$$

730. **a)** $D(3^x - x \ln 3) = 3^x \ln 3 - 1 \cdot \ln 3 = 3^x \ln 3 - \ln 3 = (\ln 3)(3^x - 1)$

b) $D(\cos^3(2x)) = D((\cos(2x))^3$
$= D(\cos 2x)^3$
$= 3(\cos 2x)^2 \cdot D(\cos 2x)$
$= 3(\cos 2x)^2(-\sin(2x) \cdot 2)$
$= -6(\cos^2 2x)(\sin 2x)$

c) $D2\tan(3x) = 2 \cdot \dfrac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3 = \dfrac{6}{\cos^2(3x)} = 6 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 3x} = 6(\tan^2 3x + 1)$

731. Paraabelin huippu on derivaatan nollakohdassa.
$D(2x^2 + bx + 3) = 4x + b$
$4x + b = 0$
$x = -\dfrac{b}{4}$

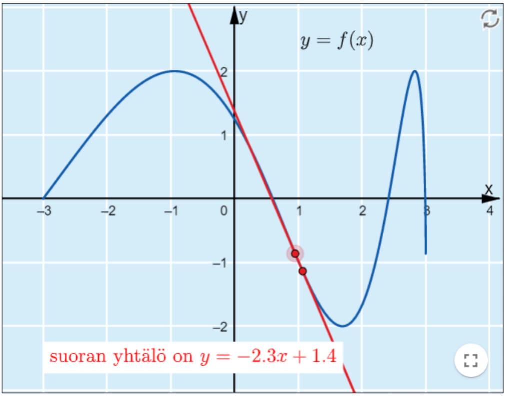
Kun $x = -\dfrac{b}{4}$, niin $y = 2 \cdot (-\dfrac{b}{4})^2 + b \cdot (-\dfrac{b}{4}) + 3 = \dfrac{b^2}{8} - {}^{2)}\dfrac{b^2}{4} + 3 = -\dfrac{b^2}{8} + 3$

Paraabelin huipun koordinaatit ovat $(-\dfrac{b}{4}, -\dfrac{b^2}{8} + 3) = (-\dfrac{1}{4}b, -\dfrac{1}{8}b^2 + 3)$.
Huippu on paraabelilla $y = -2x^2 + 3$, jos huipun koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön:
$y = -2 \cdot (\dfrac{b}{4})^2 + 3 = -2 \cdot \dfrac{b^2}{16} + 3 = -\dfrac{b^2}{8} + 3.$

Huipun koordinaatit $(-\dfrac{1}{4}b, -\dfrac{1}{8}b^2 + 3)$ toteuttavat yhtälön $y = -2x^2 + 3$, joten väite on osoitettu.

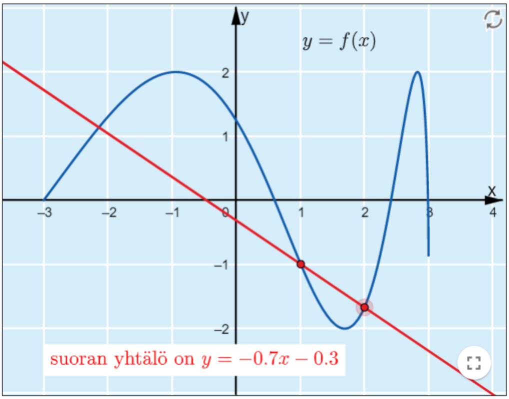
732. **a)** Raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$.

Pisteet tulee asettaa siten, että saadaan määritettyä tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 1$ mahdollisimman tarkasti.



$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\approx -2{,}3$$

b) Erotusosamäärä $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$ ilmoittaa kohtien $x = 1$ ja $x = 2$ välille piirretyn sekantin kulmakertoimen.



Erotusosamäärän likiarvo on –0,7.

733. Funktio on jatkuva kohdassa $x = a$ täsmälleen silloin kun $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Määritetään siis raja-arvo $\lim\limits_{x \to \ln 5} f(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \ln 5} \frac{e^{2x} - 25}{e^x - 5} &\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to \ln 5} \frac{(e^x)^2 - 5^2}{e^x - 5} \\
&= \lim_{x \to \ln 5} \frac{(e^x + 5)\cancel{(e^x - 5)}}{\cancel{e^x - 5}} \\
&= \lim_{x \to \ln 5} (e^x + 5) \\
&= e^{\ln 5} + 5 \\
&= 5 + 5 \\
&= 10
\end{aligned}$$

On siis määriteltävä $f(\ln 5) = 10$.

734. Ratkaistaan käyrien $3x = 4y$ ja $x^2 + 8x - 4y = 0$ leikkauskohdat yhtälöparista $\begin{cases} 3x = 4y \\ x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$.

Sijoitetaan $3x$ yhtälöön $x^2 + 8x - 4y = 0$ lausekkeen $4y$ paikalle ja ratkaistaan yhtälö:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 8x - 4y &= 0 \\
x^2 + 8x - 3x &= 0 \\
x^2 + 5x &= 0 \\
x(x + 5) &= 0 \\
x = 0 \text{ tai } x + 5 &= 0 \\
x &= -5
\end{aligned}
$$

Paraabelin tangentit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos ne ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset tai jos niiden kulmakertoimien tulo on -1. Tangentin kulmakerroin on derivaatta.

Ratkaistaan paraabelin yhtälöstä y.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 8x - 4y &= 0 \\
4y &= x^2 + 8x \quad \| : 4 \\
y &= \frac{1}{4}x^2 + 2x
\end{aligned}
$$

Merkitään $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

Leikkauskohtiin $x = 0$ ja $x = -5$ piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat

$$f'(0) = 2$$

$$f'(-5) = \frac{1}{2} \cdot (-5) + 2 = -\frac{5}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Kulmakertoimien tulo on $2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 1$, joten leikkauspisteisiin asetetut tangentit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

735. Koska $x = -4$ on nimittäjän nollakohta, raja-arvo tässä kohdassa voi olla olemassa, vain jos kohta $x = -4$ on myös osoittajan nollakohta.
On siis oltava
$a \cdot (-4)^2 - 6 \cdot (-4) + 8 = 0$. Tämän yhtälön ratkaisu on $a = -2$.

Tällöin saadaan

$$\lim_{x\to -4} \frac{-2x^2 - 6x + 8}{x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{-2(x-1)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}} = \lim_{x\to -4}(-2x+2) = 10.$$

Raja-arvo on siis olemassa kun $a = -2$, ja tällöin raja-arvo on 10.

736. Leikkauskohtaan piirrettyjen tangenttien kulmakertoimien arvot lasketaan derivaattojen arvoina leikkauskohdassa. Ratkaistaan käyrien $y = kx^2$ ja $y = k(x-2)^2$ leikkauskohta yhtälöstä $kx^2 = k(x-2)^2$.

$$
\begin{aligned}
kx^2 &= k(x-2)^2 \\
kx^2 &= k(x^2 - 4x + 4) \\
kx^2 &= kx^2 - 4kx + 4k \\
4kx - 4k &= 0 \\
4k(x-1) &= 0 \\
4k = 0 \text{ tai } x - 1 &= 0 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Jos $k = 0$ käyrät ovat muotoa $y = 0$ ja $y = 0$. Tällöin käyrät yhtyvät kuten myös niiden kaikki tangentit. On siis oltava $k \neq 0$.

Käyrät siis leikkaavat kohdassa $x = 1$ vakion $k \neq 0$ arvosta riippumatta.

Määritetään tangenttien kulmakertoimet leikkauskohdassa $x = 1$. Tangentin kulmakerroin on derivaatta.

Merkitään $f(x) = kx^2$ ja $g(x) = k(x-2)^2 = kx^2 - 4kx + 4k$.

$f'(x) = 2kx$ $\qquad$ $g'(x) = 2kx^2 - 4k$

$f'(1) = 2k$ $\qquad$ $g'(1) = 2k - 4k = -2k$

Tangentit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos ne ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset tai jos niiden kulmakertoimien tulo on -1.

Koska $k \neq 0$, kumpikaan tangenteista ei ole x-akselin suuntainen. Määritetään millä vakion k arvoilla kulmakertoimien tulo on -1.

$$
\begin{aligned}
2k \cdot (-2k) &= -1 \\
-4k^2 &= -1 \quad \| : (-4) \\
k^2 &= \frac{1}{4} \\
k &= \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan kun $k = \frac{1}{2}$ tai $k = -\frac{1}{2}$.

737. Ratkaistaan käyrien $y = x^2 + x$ ja $y = -x^3 + 3x^2$ yhteiset pisteet.

$$\begin{aligned} x^2 + x &= -x^3 + 3x^2 \\ x^3 - 2x^2 + x &= 0 \\ x(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\ x = 0 \text{ tai } \quad x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

On siis osoitettu, että käyrillä on kaksi yhteistä pistettä.

Leikkauspisteisiin piirretyt tangentit yhtyvät, jos niillä on sama kulmakerroin. Tangentin kulmakerroin on derivaatta.

Merkitään $f(x) = x^2 + x$ ja $g(x) = -x^3 + 3x^2$

$f'(x) = 2x + 1$ $\qquad$ $g'(x) = -3x^2 + 6x$
$f'(0) = 1$ $\qquad$ $g'(0) = 0$
$f'(1) = 3$ $\qquad$ $g'(1) = 3$

Tangentit siis yhtyvät kohdassa $x = 1$.

738. Ohjelma antaa funktion arvoksi molemmissa kohdissa $\frac{1}{3}$, joten tutkitaan asiaa derivaatan avulla.
Funktio f on määritelty kaikilla muuttujan x arvoilla. Jos funktio on kasvava välillä $[a, b]$, niin $f(b)$ on suurempi. Jos funktio on vähenevä, niin $f(a)$ on suurempi.

$$f'(x) = \frac{-2x(x^4 - 1)}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) > 0$ kun $0 < x < 1$ tai $x < -1$.
$f'(x) < 0$ kun $-1 < x < 0$ tai $x > 1$.

Luvut a ja b ovat suurempia kuin 1. Koska $f'(x) < 0$, kun $x > 1$, niin funktio f on vähenevä välillä $[a, b]$. Näin ollen luku $f(a)$ on suurempi.

739. **a)** Koska polynomifunktiot ovat kaikkialla jatkuvia, niin $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Väite on siis tosi.

b) Väite on epätosi. Esimerkiksi funktio $f(x) = \dfrac{1}{x}$ on (määrittelyjoukossaan) jatkuva, mutta se ei ole jatkuva välillä $[-1, 1]$.

c) Funktion arvolla kohdassa $x = 2$ ei ole väliä raja-arvon kannalta. Jos arvot kaikkialla muualla ovat samat, niin myös raja-arvo kohdassa $x = 2$ ovat samat. Väite on siis tosi.

740. **a)** Kun $n = 7$ saadaan

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^7 - 60x - 8}{x^2 - 4}$$

$$\overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 4)}{(x+2)\cancel{(x-2)}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 4}{x+2}$$

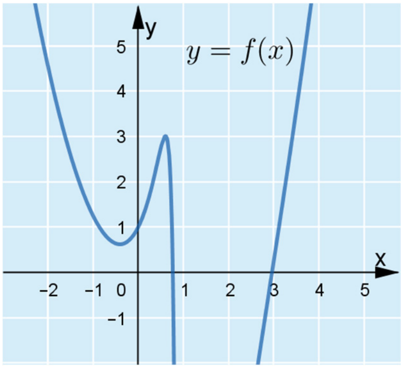
$$= 97$$

b) Koska lausekkeen $\dfrac{x^n - 60x - 8}{x^2 - 4}$ nimittäjän nollakohta on $x = 2$, raja-arvo voi olla olemassa vain jos nimittäjän tekijä $x - 2$ supistuu pois. Näin käy vain, kun $x = 2$ on myös osoittajan nollakohta.

On siis oltava $2^n - 60 \cdot 2 - 8 = 0$ eli $2^n = 128$. Tämän yhtälön ratkaisu on $n = 7$. Osoittajalla on siis nollakohta $x = 2$ vain ja ainoastaan kun $n = 7$. Näin ollen raja-arvoa ei ole olemassa, kun $n \neq 7$.

741. Funktio f on määritelty, kun nimittäjä $x^2 - 2x + 1 \neq 0$ mistä saadaan $x \neq 1$. Rationaalifunktio f on siis jatkuva väleillä [0, 1[ja]1, 2].

Funktiolla f on nollakohta välillä [0, 1[, jos se saa tällä välillä sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.



Valitaan tarkastelukohdat kuvan perusteella.
$f(0) = 1$
$f(0{,}9) = -53{,}0\ldots$

Funktiolla f on siis ainakin yksi nollakohta välillä]0; 0,9[, joten sillä on nollakohta välillä [0, 2].

742. Sijoitetaan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ lausekkeeseen.

$$\begin{aligned}\overline{c}_t &= t\overline{a} + (1-t)\overline{b} \\ &= t(\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}) + (1-t)(2\overline{i} + 5\overline{k}) \\ &= t\overline{i} + 2t\overline{j} + 3t\overline{k} + 2\overline{i} + 5\overline{k} - 2t\overline{i} - 5t\overline{k} \\ &= (2-t)\overline{i} + 2t\overline{j} + (5-2t)\overline{k}\end{aligned}$$

Vektorin $\overline{c}_t$ pituus on

$$\begin{aligned}\sqrt{(2-t)^2 + (2t)^2 + (5-2t)^2} &= \sqrt{4 - 4t + t^2 + 4t^2 + 25 - 20t + 4t^2} \\ &= \sqrt{9t^2 - 24t + 29}.\end{aligned}$$

Juuren arvo on pienin, kun juurrettava on pienin.

Koska $9t^2 - 24t + 29$ on ylöspäin aukeava paraabeli, se saa pienimmän arvonsa huipussaan eli derivaatan nollakohdassa. Määritään derivaatan nollakohta ja tutkitaan, onko se välillä [−2, 2].

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(9t^2 - 24t + 29) &= 18t - 24 \\ 18t - 24 &= 0 \\ 18t &= 24 \quad \|:18 \\ t &= \frac{24^{(6}}{18} = \frac{4}{3} = 1{,}3\ldots\end{aligned}$$

Tämä on välillä [−2, 2], joten vektorin pituus on siis pienin kun $t = \dfrac{4}{3}$.

743. Käyrän $x = y^2$ pisteet ovat muotoa (y^2, y). Lasketaan käyrän pisteen ja pisteen (2, 0) välinen etäisyys.

$\sqrt{(2-y^2)^2+(0-y)^2} = \sqrt{y^4-3y^2+4}$

Juuren arvo on pienin, kun juurrettava on pienin
Merkitään $f(y) = y^4 - 3y^2 + 4$.

$f'(y) = 4y^3 - 6y$

$f'(y) = 0$ kun $y = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1{,}22$ tai $y = -\frac{\sqrt{6}}{2} \approx -1{,}22$

	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
$f'(y)$	−	+	−	+
$f(y)$	↘	↗	↘	↗

y	$f'(y)$	Merkki
−2	−20	−
−1	2	+
1	−2	−
2	20	+

Näin ollen etäisyys on pienin kun $y = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ tai kun $y = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Tällöin $x = y^2 = (\pm\frac{\sqrt{6}}{2})^2 = \frac{3}{2}$.

Siis käyrän pisteet $(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ ja $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ ovat lähimpänä pistettä (2, 0).

744. Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-1)e^{-x} + (x^2 - x - 5)\, e^{-x} \cdot (-1) \\ &= e^{-x}\,(2x - 1 - (x^2 - x - 5) \\ &= e^{-x}\,(-x^2 + 3x + 4) \end{aligned}$$

Derivaatan lausekkeessa e^{-x} on positiivinen kaikilla muuttujan x arvoilla, joten derivaatan merkkiin vaikuttaa vain lausekkeen $-x^2 + 3x + 4$ arvo.
$-x^2 + 3x + 4 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2}$$

$x = 4$ tai $x = -1$

		0	4
$-x^2 + 3x + 4$		+	−
$f'(x)$		+	−
$f(x)$		↗	↘

Kulkukaavion perusteella jatkuvan funktion f suurin arvo on $f(4) = (4^2 - 4 - 5)e^{-4} = 7e^{-4}$.

Tutkitaan, onko funktiolla pienintä arvoa.
$f(0) = -5e^0 = -5$.
Kulkukaavion perusteella tätä pienempiä arvoja voidaan saada vain kun $x > 4$.

Funktion lausekeessa $(x^2 - x - 5)\, e^{-x}$ eksonenttifunktio e^{-x} saa vain positiivisia arvoja. Selvitetään mitä arvoja polynomi $x^2 - x - 5$ saa.

$x^2 - x - 5 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$x = -1{,}7\ldots$ tai $x = 2{,}7\ldots$

Polynomin $x^2 - x - 5$ kuvaaja on yläspäin aukeava paraabeli ja sen arvot ovat positiivisia kun $x > 2{,}7\ldots$ ja siten myös kun $x > 4$.
Näin ollen funktion f arvot ovat kahden positiivisien luvun tulona positiivisia, kun $x > 4$. Funktio f ei voi saada arvoa -5 pienempiä arvoja, kun $x > 4$.
Suurin arvo on siis $7e^{-4}$ ja pienin arvo -5.

745. Funktio on määritelty, kun $x > 0$.
Tangentti leikkaa x-akselin 60 asteen kulmassa, jos sen suuntakulma on 60 astetta tai -60 astetta. Suuntakulmalle α pätee $\tan \alpha = k$, missä k on tangentin kulmakerroin.

Nyt siis $k = \tan 60° = \sqrt{3}$ tai $k = \tan(-60°) = -\sqrt{3}$.

Merkitään $f(x) = x\ln x$, $x > 0$.

Tangentin kulmakerroin on derivaatta. On siis ratkaistava millä muuttujan x arvoilla $f'(x) = \sqrt{3}$ tai $-\sqrt{3}$.

$f'(x) = \ln x + 1$
Yhtälön $\ln x + 1 = \sqrt{3}$ ratkaisu on $x = e^{\sqrt{3}-1}$ ja
yhtälön $\ln x + 1 = -\sqrt{3}$ ratkaisu on $x = e^{-\sqrt{3}-1}$.
Tällöin $f(e^{\sqrt{3}-1}) = e^{\sqrt{3}-1}(\sqrt{3}-1)$ ja $f(e^{-\sqrt{3}-1}) = e^{-\sqrt{3}-1}(-\sqrt{3}-1))$.

Kysytty piste on siis $(e^{\sqrt{3}-1}, e^{\sqrt{3}-1}(\sqrt{3}-1))$ ja $(e^{-\sqrt{3}-1}, e^{-\sqrt{3}-1}(-\sqrt{3}-1))$.

746. Merkitään $f(x) = x^3 + 1$.
$f(1) = 1^3 + 1 = 2$, joten piste (1, 2) on käyrällä $y = x^3 + 1$.
Piste (1, 2) on siis käyrän ja sen tangentin leikkauspiste.

Tutkitaan, löytyykö muita leikkauspisteitä.
Määritetään tangentin yhtälö.

Tangentin kulmakerroin on derivaatta kohdassa $x = 1$.
$f'(x) = 3x^2$
$f'(1) = 3$

Tangentin yhtälö on
$y - 2 = 3(x - 1)$, mistä saadaan
$y - 2 = 3x - 3$ ja edelleen
$y = 3x - 1$.

Lasketaan tangentin ja $y = x^3 + 1$ leikkauspisteet.

$$x^3 + 1 = 3x - 1$$
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$
$$x^3 - x - 2x + 2 = 0$$
$$x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$$
$$x(x + 1)(x - 1) - 2(x - 1) = 0$$
$$(x - 1)(x(x + 1) - 2) = 0$$
$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$$

$x - 1 = 0$ tai $x^2 + x - 2 = 0$

$x = 1$ $\qquad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$

$x = -2$ tai $x = 1$

Lasketaan kohtaa $x = -2$ vastaava leikkauspiste:
$f(-2) = (-2)^3 + 1 = -8 + 1 = -7$.

Toinen leikkauspiste on $(-2, -7)$.

747. Elmerin ratkaisu on väärin, sillä hän unohti sisäfunktion derivaatan.
Korjattu ratkaisu:
$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$
$g'(x) = 4x$
Joten $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 4e^x \cdot e^x = 4e^{2x}$

Uolevin ratkaisu on väärin. Hän sievensi potenssin $(e^x)^2$ väärin.
Korjattu ratkaisu:
$h(x) = g(f(x)) = 2(e^x)^2 + 1 = 2e^{2x} + 1$
$h'(x) = 2e^{2x} \cdot 2 = 4e^{2x}$

Marin ratkaisu on oikein, kuten yllä korjatuista ratkaisuista nähdään.

748. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.
$f'(x) = x + b$
$f'(x) = 0$, kun $x = -b$

Huipun y-koordinaatti on tällöin
$f(-b) = -\frac{1}{2}b^2 + 3 = -\frac{1}{2}(-b)^2 + 3.$

Siis $f(-b) = -\frac{1}{2}(-b)^2 + 3$ eli muuttujan x avulla esitettynä
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3.$

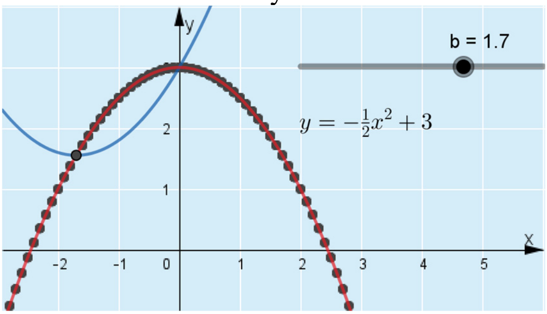
Huippu piirtää siis paraabelin $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3.$

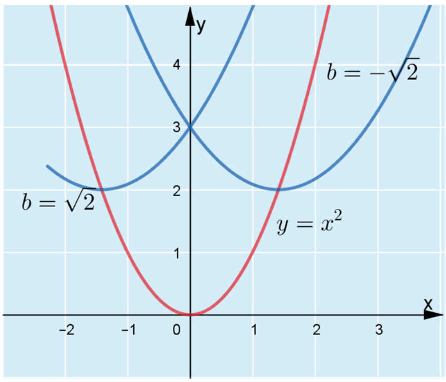
Koska huippu piirtää paraabelin $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3,$ niin ratkaistaan milloin tämä paraabeli leikkaa paraabelin $y = x^2$.

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3 = x^2$$
$$\frac{3}{2}x^2 = 3 \quad \| \cdot \frac{2}{3}$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2} \text{ tai } x = -\sqrt{2}$$

Koska alkuperäisen paraabelin huipun y-koordinaatti on $-\frac{1}{2}b^2+3$, niin huippu on paraabelilla $y=x^2$ täsmälleen silloin kun vakio $b=\sqrt{2}$ tai $b=-\sqrt{2}$.

Tarkistetaan tulokset dynaamisen matematiikan ohjelmalla.





749. **a)** Kirjotetaan ympyrän yhtälö ohjelman avulla keskpistemuotoon.

$(x-1)^2+(y-2a)^2=-a^2-2a+1.$

Tämä yhtälö esittää ympyrää täsmälleen silloin kun $-a^2-2a+1>0$.
Tämän epäyhtälön ratkaisuksi saadaan ohjelman avulla
$-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1.$

b) Ympyrän pinta-ala on suurin mahdollinen kun sen säde $\sqrt{-a^2-2a+1}$ on suurin. Juuren arvo on suurin kun juurrettava $-a^2-2a+1$ on suurin. Lausekkeen $-a^2-2a+1$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joka saa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa.
Nyt $D(-a^2-2a+1)=-2a-2$.
Derivaatan nollakohta on $a=-1$.

Ympyrän pinta-ala on suurin mahdollinen, kun $a=-1$:
Pinta-ala on tällöin $\pi\sqrt{-(-1)^2-2\cdot(-1)+1}^{\,2}=2\pi.$

750. Funktio on määritelty, kun $x^3 - x > 0$.

$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x^2 - 1 = 0$$
$$x = 1 \text{ tai } x = -1$$

$-1 \qquad 0 \qquad 1$

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x(x^2 - 1)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$x^3 - x > 0$, eli funktio on määritelty kun $-1 < x < 0$ tai $x > 1$.

Selvitetään ääriarvot derivaatan avulla.
Merkitään $f(x) = \ln(x^3 - x)$.

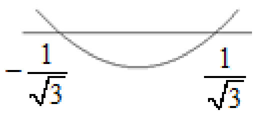
$$f'(x) = \frac{1}{x^3 - x} \cdot (3x^2 - 1) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$$

$$\frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} = 0$$
$$3x^2 - 1 = 0$$
$$3x^2 = 1 \quad \| :3$$
$$x^2 = \frac{1}{3}$$
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}6$$

Kohta $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ei kuulu määrittelyalueeseen.
Derivaatan lausekkeessa nimittäjä $x^3 + x$ on koko määrittelyalueessa positiivinen.

$-1 \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad 0 \qquad 1$

$3x^2 - 1$		$+$	$-$		$+$
$x^3 - x$		$+$	$+$		$+$
$f'(x)$		$+$	$-$		$+$
$f(x)$		↗	↘		↗



Funktiolla *f* on paikallinen maksimi kohdassa $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}
f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) &= \ln((-\frac{1}{\sqrt{3}})^3 - (-\frac{1}{\sqrt{3}})) \\
&= \ln(-\frac{1}{(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{\sqrt{3}}) \\
&= \ln(-\frac{1}{3\sqrt{3}} + {}^{3)}\frac{1}{\sqrt{3}}) \\
&= \ln(-\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{3}{3\sqrt{3}}) \\
&= \ln\frac{2}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

751. $f(x) = \cos^2 x + \sin x = (1 - \sin^2 x) + \sin x = -\sin^2 x + \sin x + 1$
sin x on jaksollinen funktio ja sen perusjakso on 2π. Funktio f saa siis kaikki arvonsa välillä $[0, 2\pi]$.

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.
$f(0) = 1$
$f(2\pi) = 1$
$f'(x) = (1 - 2\sin x)\cos x$

Välille $]0, 2\pi[$ kuuluvat derivaatan nollakohdat ovat
$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ ja $x = \frac{3\pi}{2}$

$$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{5}{4}$$
$$f(\frac{\pi}{2}) = 1$$
$$f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5}{4}$$
$$f(\frac{3\pi}{2}) = -1$$

Välillä $[0, 2\pi]$ ja siten myös koko reaalilukujoukossa funktion f suurin arvo on $\frac{5}{4}$ ja pienin arvo on 1.

Jatkuvana funktiona f saa kaikki arvonsa suurimman ja pienimmän arvonsa väliltä, joten sen arvojoukko on $[-1, \frac{5}{4}]$.

752. Funktio f on määritelty, kun $x > 0$. Funktio f on jatkuva ja derivoituva välillä $[\frac{1}{e^2}, 1]$, joten se saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$$f(\frac{1}{e^2}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e^2}}} + \ln\frac{1}{e^2} = \frac{1}{\frac{1}{e}} + \ln e^{-2} = e - 2 \approx 0,7$$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} + \ln 1 = 1 + 0 = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \ln x = x^{-\frac{1}{2}} + \ln x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \| \cdot 2x\sqrt{x} \neq 0$$

$$2\sqrt{x} = 1 \quad \| : 2$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} + \ln\frac{1}{4} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \ln\frac{1}{4} = 2 + \ln\frac{1}{4} \approx 0,6$$

Välillä $[\frac{1}{e^2},\ 1]$ funktion suurin arvo on 1 ja pienin $2 + \ln\frac{1}{4}$.

Pienin arvo voidaan kirjoittaa halutessa eri muodoissa.

$$\underline{2 + \ln\frac{1}{4}} = 2 + \ln 4^{-1} = \underline{2 - \ln 4} = 2 - \ln 2^2 = \underline{2 - 2\ln 2}$$

753. Funktio f on määritelty kaikilla muuttujan x arvoilla.
Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = -\frac{3x^4 - 1}{2(x^4+1)^2}$$

$f'(x) = 0$, kun $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ $(\approx -0{,}8)$ tai $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ $(\approx 0{,}8)$

	$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$ → $-$	

		$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘
		min.	maks.

x	$f'(x)$	Merkki
-1	$-0{,}25$	$-$
0	$0{,}5$	$+$
1	$-0{,}25$	$-$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\frac{\sqrt[4]{27}}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{\sqrt[4]{27}}{8}$$

Kulkukaavion perusteella funktio f voi saada minimiään $f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\frac{\sqrt[4]{27}}{8}$ pienempiä arvoja vain kun $x > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Tällöin funktion arvot ovat kuitenkin kahden positiivisen luvun osamääränä positiivisia. Funktion f pienin arvo on siis $-\frac{\sqrt[4]{27}}{8}$.

Kulkukaavion perusteella funktio f voi saada maksimiaan $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{\sqrt[4]{27}}{8}$ suurempia arvoja vain kun $x < -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Tällöin funktion arvot ovat kuitenkin negatiivisen ja positiivisen luvun osamääränä negatiivisia. Funktion f suurin arvo on siis $\frac{\sqrt[4]{27}}{8}$.

Koska funktio f on jatkuva, se saa kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa väliltä, eli väliltä $[-\frac{\sqrt[4]{27}}{8}, \frac{\sqrt[4]{27}}{8}]$.

754. Funktio $f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt{15 - 3x}$ on määritelty, kun $3x \geq 0$ ja $15 - 3x \geq 0$, eli välillä $0 \leq x \leq 5$.

Suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$$f(0) = \sqrt{0} + \sqrt{15} = \sqrt{15}$$
$$f(5) = \sqrt{15} + \sqrt{0} = \sqrt{15}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\sqrt{3}\sqrt{x} + \sqrt{3}\sqrt{-x+5}}{\sqrt{x}\sqrt{-x+5}}$$

$f'(x) = 0$, kun $x = \frac{5}{2}$.

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{30}$$

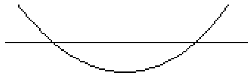
Funktion suurin arvo on $\sqrt{30}$ ja pienin $\sqrt{15}$.

755. Kuvaajilla on yksi leikkauspiste, jos yhtälöllä $-2x^3 + 3x - 1 = x^3 - 2x^2 + 2x$ eli yhtälöllä $3x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

Selvitetään yhtälön ratkaisujen lukumäärä tutkimalla funktion $h(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 1$ nollakohtien lukumäärää derivaatan avulla.
$h'(x) = 9x^2 - 4x - 1$
$h'(x) = 0$, kun

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+36}}{18} = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{18} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 13}}{18} = \frac{4 \pm 2\sqrt{13}}{18} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{9}.$$

		$\frac{2-\sqrt{13}}{9}$	$\frac{2+\sqrt{13}}{9}$
$h'(x)$	+	−	+
$h(x)$	↗	↘	↗



Otetaan derivaatan nollakohdista likiarvot sijoittamisen helpottamiseksi.

$$\frac{2-\sqrt{13}}{9} \approx -0{,}178 \text{ ja } \frac{2+\sqrt{13}}{9} \approx 0{,}623$$

Määritetään näiden avulla funktion h ääriarvot (likiarvot).
$h(-0{,}178) = 3 \cdot (-0{,}178)^3 - 2 \cdot (-0{,}178)^2 - (-0{,}178) + 1 = 1{,}0977 > 0$
$h(0{,}623) = 3 \cdot (0{,}623)^3 - 2 \cdot (0{,}623)^2 - 0{,}623 + 1 = 0{,}326 > 0$

Kulkukaavion ja laskettujen arvojen perusteella kaikkialla jatkuvalla funktiolla h ei voi olla nollakohtia kun $x > \frac{2-\sqrt{13}}{9}$.
$h(-10) = 3 \cdot (-10)^3 - 2 \cdot (-10)^2 - (-10) + 1 = -3189 < 0$
Näin ollen funktiolla h on ainakin yksi nollakohta välillä $\left]-10, \frac{2-\sqrt{13}}{9}\right[$.
Kulkukavion perusteella funktiolla h on korkeintaan yksi nollakohta kun $x < \frac{2-\sqrt{13}}{9}$.

Funktiolla h on siis täsmälleen yksi nollakohta, joten yhtälöllä $3x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ on yksi ratkaisu ja funktioiden f ja g kuvaajilla on täsmälleen yksi leikkauspiste.

756. **a)** $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Kahden positiivisen luvun osamääränä derivaatta on aina positiivinen, ja näin ollen funktio f on kasvava, kun $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = -2^x + x^2$
$f'(x) = -2^x \ln 2 + 2x$
$2^x > 0$ ja $\ln 2 > 0$, joten aina $-2^x \ln 2 < 0$.

Kun $x \leq 0$ myös $2x \leq 0$.
Näin ollen välillä $x \leq 0$ pätee $f'(x) = -2^x \ln 2 + 2x \leq 0$.

Funktio f on siis vähenevä, kun $x \leq 0$.

757. Yhtälön $e^{x+a} = x$ eli yhtälön $e^{x+a} - x = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = e^{x+a} - x$ nollakohdat. Funktio $e^{x+a} - 1$ on jatkuva funktio. Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.
$f'(x) = e^{x+a} - 1$
$f'(x) = 0$, kun $x = -a$.

	$-a$	
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Funktion f pienin arvo saavutetaan derivaatan nollakohdassa ja se on $f(-a) = 1 + a$.

Jos funktion f pienin arvo on positiivinen, funktiolla ei ole nollakohtia.
Funktion pienin arvo $1 + a$ on positiivinen eli $1 + a > 0$ kun $a > -1$.

Jos funktion f pienin arvo on 0, funktiolla on nollakohta.
Funktion pienin arvo $1 + a$ on 0 eli $1 + a = 0$ kun $a = -1$.

Jos funktion f pienin arvo on negatiivinen, funktiolla voi kulkukaavion perusteella olla nollakohtia nolla, yksi tai enintään kaksi.
Funktion pienin arvo $1 + a$ on negatiivinen eli $1 + a < 0$ kun $a < -1$.

Tarkastellaan nyt tapausta $a < -1$:
Funktiolla voi olla nollakohta väleillä $x < -a$ ja $x > -a$.
Tarkastellaan ensin väliä $x < -a$.
Kun $a < -1$, niin minimikohta $x = -a$ on positiivinen. Tällöin kohta $x = 0$ on välillä $x < -a$.

Nyt $f(0) = e^{0+a} - 0 = e^{a}$, joka on positiivinen, kun $a < -1$.
Funktiolla f on siis nollakohta välillä $]0, -a[$, koska välin päätepisteissä jatkuvan funktion arvot ovat erimerkkiset. Funktiolla on siis tarkalleen yksi nollakohta välillä $x < -a$.

Tarkastellaan sitten väliä $x > -a$.
Koska $a < -1$, niin $-a < -2a$, joten $x = -2a$ on välillä $x > -a$.

$f(-2a) = e^{-2a+a} - (-2a) = e^{-a} + 2a$, kun $a < -1$.
Lausekkeen $e^{-a} + 2a$ merkkiä ei voi määrittää suoraan.

Merkitään $g(a) = f(-2a) = e^{-a} + 2a$ ja tutkitaan näin saadun funktion g merkkiä derivaatan g' avulla.
$g'(a) = -e^{-a} + 2$
Selvitetään derivaattafunktion g' merkki, kun $a < -1$.
$g'(a) = 0$, kun $a = -\ln 2$ $(= -0{,}69\ldots)$.
Derivaattafunktiolla ei ole nollakohtaa välillä $a < -1$, joten se on tällä välillä kaikkialla saman merkkinen.
Koska $g'(-2) = -5{,}39 < 0$, niin funktio g on vähenevä välillä $a < -1$.

		-1
$g'(x)$:	$-$	|
$g(x)$:	$\searrow$	|

Funktion g pienin arvo saavutetaan kohdassa $x = -1$.
Nyt $g(-1) = e^{-(-1)} + 2 \cdot (-1) = e - 2 = 0{,}718\ldots > 0$
Koska funktion g pienin arvo on siis positiivinen, eli $g(a) > 0$, on siten myös $f(-2a) > 0$.
Koska $f(-2a) > 0$ ja $f(-a) < 0$, niin funktiolla f on nollakohta välillä $]-a, -2a[$, kun $a < -1$.

Funktiolla f on siis nollakohdat väleillä $x < -a$ ja $x > -a$, eli funktiolla f on kaksi nollakohtaa, kun $a < -1$.

Edellä olleen perusteella voidaan todeta, että yhtälöllä $e^{x+a} = x$
- ei ole ratkaisuja, kun $a > -1$
- on yksi ratkaisu, kun $a = -1$
- on kaksi ratkaisua, kun $a < -1$.

758. Kirjoitetaan funktion lauseke ilman itseisarvoja.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x - a|x-1| \\
&= \begin{cases} e^x - a(x-1), & \text{kun } x-1 \geq 0 \\ e^x - a(-(x-1)), & \text{kun } x-1 < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^x - ax + a, & \text{kun } x \geq 1 \\ e^x + ax - a, & \text{kun } x < 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
f'(x) = \begin{cases} e^x - a, & \text{kun } x > 1 \\ e^x + a, & \text{kun } x < 1 \end{cases}
$$

Jotta funktio f olisi jatkuva, kun $x > 1$ on oltava $e^x - a > 0$ eli $e^x > a$ kaikilla $x > 1$.
Koska e^x on kasvava, niin välillä $x > 1$ kaikille e^x pätee $e^x > e^1$ eli eli $e^x > e$. Ehto $e^x > a$ toteutuu tällä välillä, kun $a \leq e$.

Kun $x < 1$ on oltava $e^x + a > 0$ kaikilla $x < 1$.
Jos $a \geq 0$, niin summa $e^x + a > 0$.
Jos $a < 0$, yhtälöllä $e^x + a = 0$ on ratkaisu, joten epäyhtälö $e^x + a > 0$ ei toteudu kaikilla x:n arvoilla.

Yhdistämällä edellä päätellyt ehdot saadaan $0 \leq a \leq e$.

759. $f(t)=\dfrac{10e^{0,05t}}{e^{0,05t}+4}$

$$f'(t)=\frac{2e^{\frac{t}{20}}}{(e^{\frac{t}{20}}+4)^2}$$

Selvästi $f'(t)>0$ kaikilla t, eli se kasvaa kaikkialla.
Funktio kasvaa nopeimmin silloin, kun derivaatan f' arvo on suurin.
Tutkitaan, milloin näin käy funktion f toisen derivaatan avulla.

$$f''(t)=\frac{-e^{\frac{t}{20}}(e^{\frac{t}{20}}-4)}{10(e^{\frac{t}{20}}+4)^3}$$

$f''(t)=0$, kun $t = 40 \ln 2 \approx 27{,}7\ldots$

	40 ln 2	
$f''(t)$	+	−
$f'(t)$	↗	↘

	$f''(t)$	Merkki
20	0,001…	+
30	−00003…	−

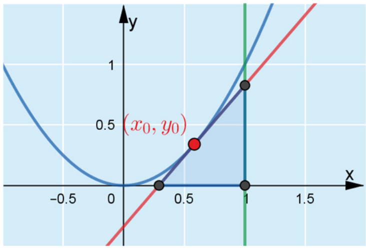
Derivaatta saa suurimman arvon, eli funktio kasvaa nopeiten, kun
$t = 40\ln 2 = 27{,}7\ldots$ eli 28. päivän aikana.

$f'(40 \ln 2) = \dfrac{1}{8}=0{,}125.$ Koska yksikkönä on tuhannet yksilöt, populaatio kasvaa tällöin 125 yksilöä vuorokaudessa.

760. Muodostetaan pisteen (x_0, y_0) kautta kulkevan tangentin yhtälö.
$f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$
$f'(x_0) = 2x_0$

Tangentin yhtälö on siis
$y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$.

Muodostuvan suorakulmaisen kolmion kateetit ovat pisteen (1, 0) ja tangentin ja x-akselin leikkauskohdan välinen jana sekä pisteen (1, 0) ja sen tangentin pisteen, jossa $x = 1$, välinen etäisyys.



Ratkaistaan, missä tangentti leikkaa x-akselin.

$0 - y_0 = 2x_0(x - x_0)$, mistä saadaan $x = x_0 - \dfrac{y_0}{2x_0}$.

Koska välillä]0, 1] paraabeli $y = x^2$ on kasvava, tangentti on nouseva suora ja siten tämä leikkauskohta on kohdan $x = 1$ vasemmalla puolella.

x-akselilla olevan janan pituus on siis $1-(x_0 - \dfrac{y_0}{2x_0}) = 1 - x_0 + \dfrac{y_0}{2x_0}$.

Kun $x = 1$ tangentille pätee $y - y_0 = 2x_0(1 - x_0)$, mistä saadaan $y = -2x_0^2 + 2x_0 + y_0$. Toisen kateetin pituus on siis $-2x_0^2 + 2x_0 + y_0$.

Kolmion pinta-ala on siis

$$\frac{1}{2}(1 - x_0 + \frac{y_0}{2x_0}) \cdot (-2x_0^{\ 2} + 2x_0 + y_0) = \frac{(2x_0^{\ 2} - 2x_0 - y_0)^2}{4x_0}$$

Koska piste (x_0, y_0) on käyrällä $y = x^2$, niin $y_0 = x_0^2$. Näin kolmion pinta-alan lauseke saadaan muotoon $A(x_0) = \dfrac{x_0(x_0 - 2)^2}{4}$.

Etsitään funktion suurin arvo derivaatan avulla.

$$A'(x_0)=\frac{(x_0-2)(3x_0-2)}{4}$$

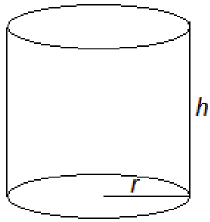
$A'(x_0) = 0$, kun $x_0=\frac{2}{3}$ tai kun $x_0 = 2$.

	0		$\frac{2}{3}$		1	
$A'(x_0)$			+	−		
$A(x_0)$			↗	↘		

x_0	$A'(x_0)$	Merkki
0,3	0,4…	+
0,8	−0,1…	−

Pinta-ala on suurin kun $x_0=\frac{2}{3}$.

761. Muki on mahdollisimman kevyt, kun siihen kuluu mahdollisimman vähän materiaalia, eli kun sen pinta-ala on mahdollisimman pieni.



Pohjan pinta-ala on $A_{\mathrm{P}} = \pi r^2$ (cm)
Vaipan pinta-ala on $A_{\mathrm{V}} = 2\pi rh$ (cm).
Mukin pinta-ala on siis
$\pi r^2 + 2\pi rh$.

Eliminoidaan toinen muuttujista r ja h sen tiedon avulla, että tölkin tilavuus on 1 l = 1 dm^3 = 1000 cm^3.

$$\pi r^2 h = 1000 \quad \| : \pi r^2$$
$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Etsitään siis funktion $f(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$ pienin arvo derivaatan avulla.

$$f'(r) = 2\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$f'(r) = 0$, kun $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ $(\approx 6{,}8...)$

	0		$\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$	
$f'(r)$		$-$		$+$
$f(r)$		↘		↗

r	$f'(r)$	Merkki
4	$-99{,}8\ldots$	$-$
7	$3{,}1\ldots$	$+$

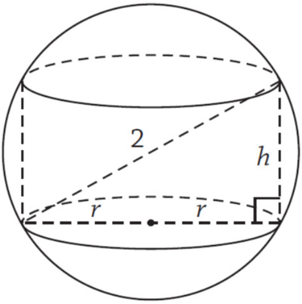
Pinta-ala on pienin kun $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ $(\approx 6{,}82...\text{ cm})$

Tällöin $h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ $(\approx 6{,}82...\text{ cm})$.

Mukin pohjan halkaisija on siis $2 \cdot \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} = 13{,}65.... \approx 13{,}7$ (cm) ja korkeus

$\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} = 6{,}82... \approx 6{,}8$ (cm).

762. Olkoon r lieriön pohjaympyrän säde ja h lieriön korkeus. Lieriön tilavuus on tällöin $V = \pi r^2 h$.



Koska pallon sisällä oleva kappale on suora ympyräpohjainen lieriö, niin Pythagoraan lauseen nojalla saadaan

$$(r+r)^2 + h^2 = (1+1)^2$$
$$(2r)^2 + h^2 = 2^2$$
$$r^2 = \frac{4-h^2}{4}.$$

Lieriön tilavuus voidaan nyt esittää korkeuden h avulla:

$$V(h) = \pi \frac{4-h^2}{4} \cdot h,\ h > 0.$$

Etsitään tilavuusfunktion V suurin arvo derivaatan avulla.

$$V'(h) = \frac{-(3h^2-4)\pi}{4}$$

$V'(h) = 0$, kun ($h = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$) tai kun $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\approx 1{,}15$)

	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	
$V'(h)$		+	−	
$V(h)$		↗	↘	

h	$V'(h)$	Merkki
1	0,7…	+
1,2	−0,2…	−

Tilavuus on suurin kun $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

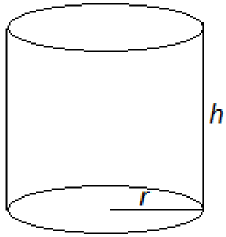
Tällöin $r^2 = \frac{4-h^2}{4} = \frac{2}{3}$, joten $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (tai $r = -\frac{\sqrt{6}}{3}$).

Siis lieriön korkeus on $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ja pohjaympyrän säde $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lieriön tilavuus on tällöin $V(\frac{2\sqrt{3}}{3})=\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$ ja ympyrän tilavuus on $V_{\mathrm{Y}}=\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{4}{3}\pi$.

Tilavuuksien suhde on $\frac{\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}}{\frac{4}{3}\pi}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}:3$.

763. Pohjien yhteispinta-ala on $A_\text{P} = 2\pi r^2 (\text{cm}^2)$
Vaipan pinta-ala on $A_\text{V} = 2\pi rh\ (\text{cm}^2)$.



Pohjamateriaalin hinta 2 €/m^2 on kaksinkertainen verrattuna vaippamateriaalin hintaan 1 €/m^2. Tehtävässä ei tarvitse määrittää tölkin materiaaleihin menevää hintaa, joten riittää huomioida, että pohjien materiaali on kaksi kertaa kalliimpaa kuin vaipan materiaali. Tutkitaan siis lauseketta $2 \cdot 2\pi r^2 + 2\pi rh = 4\pi r^2 + 2\pi rh$.

Eliminoidaan toinen muuttujista r ja h sen tiedon avulla, että tölkin tilavuus on 1000 cm^3.

$$\pi r^2 h = 1000 \quad \| : \pi r^2$$
$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Etsitään siis funktion $f(r) = 4\pi r^2 + 2r\pi \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 4\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ pienin arvo derivaatan avulla.

$$f'(r) = 8\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$f'(r) = 0$, kun $r = 5\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ $(\approx 4{,}3...)$

	0		$5\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$
$f'(r)$		$-$	$+$
$f(r)$		↘	↗

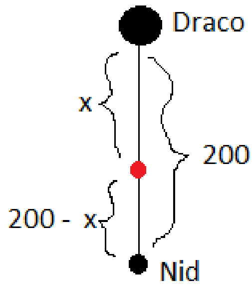
r	$f'(r)$	Merkki
2	$-449{,}7\ldots$	$-$
5	$45{,}6\ldots$	$+$

Materiaalinhinta on pienin kun $r = 5\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$.

Tällöin $h = \frac{1000}{\pi r^2} = 20\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$.

Korkeuden ja pohjan halkaisijan suhde on tällöin $\frac{h}{2r} = \frac{20\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}}{2 \cdot 5\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}} = \frac{2}{1} = 2:1$

764. Merkitään etäisyyttä isommasta Dracosta kirjaimella x, jolloin etäisyys Nidistä on $200 - x$.



Koska tulisuihkun vaikutus on suoraan verrannollinen lohikäärmeen kokoon ja kääntäen verrannollinen etäisyyden kolmanteen potenssiin vaikutuksille saadaan seuraavat lausekkeet:

Draco: $\dfrac{2a}{x^3}$

Nid: $\dfrac{a}{(200-x)^3}$

missä a on verrannollisuuskerroin, $a > 0$.

Molempien tulisuihkujen yhteisvaikutusta voida kuvata funktiolla

$$f(x) = \frac{2a}{x^3} + \frac{a}{(200-x)^3}.$$

Selvitetään, milloin yhteisvaikutus on pienin derivaatan avulla.

$$f'(x) = \frac{3a}{(x-200)^4} + \frac{6a}{x^4}$$

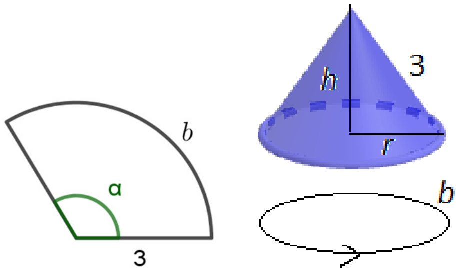
$f'(x) = 0$, kun $x = 108{,}6\ldots$ tai $x = 1257{,}04\ldots$

	< 0	0 … 108,6…	108,6… … 200	> 200
$f'(x)$		$-$	$+$	
$f(x)$		↘	↗	

x	$f'(x)$	Merkki
100	$-\frac{3a}{10^8}$	$-$
150	$\frac{79a}{1{,}6\ldots\cdot 10^8}$	$+$

Tulisuihkujen vaikutus on pienin kun kulkijan etäisyys Dracosta on noin 109 kyynärää.

765. Sektorin kaari on kartion pohjaympyrän kehä. Sektorin säde on kartion sivujana.



Kirjoitetaan ensin kaaren pituus b kulman α avulla.

Kun käytetään kulman α yksikkönä radiaaneja pätee $\alpha = \frac{b}{3}$, mistä saadaan $b = 3\alpha$.

Koska tämä on kartion pohjaympyrän kehän pituus, kartion pohjaympyrän säteeksi r saadaan

$$2\pi r = b \quad \| 2\pi$$
$$r = \frac{b}{2\pi}$$
$$r = \frac{3\alpha}{2\pi}.$$

Kartion korkeus saadaan Pythagoraan lauseen avulla:

$$h^2 = 3^2 - r^2$$
$$h^2 = 9 - \left(\frac{3\alpha}{2\pi}\right)^2$$
$$h = \sqrt{9 - \frac{9\alpha^2}{4\pi^2}} \quad \left(\text{tai } h = \sqrt{9 - \frac{9\alpha^2}{4\pi^2}}\right).$$

Kartion tilavuus on nyt

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{3\alpha}{2\pi}\right)^2 \cdot \sqrt{9 - \frac{9\alpha^2}{4\pi^2}} = \frac{9\alpha^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{8\pi^2}.$$

Selvitetään, milloin kartion tilavuus on suurin derivaatan avulla.

$$V'(\alpha) = \frac{9\alpha\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{4\pi^2} - \frac{9\alpha^3}{8\pi^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}$$

$V'(\alpha) = 0$, kun $(\alpha = -\frac{2\pi\sqrt{6}}{3})$ tai kun $\alpha = 0$ tai kun $\alpha = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$ $(\approx 5{,}1)$.

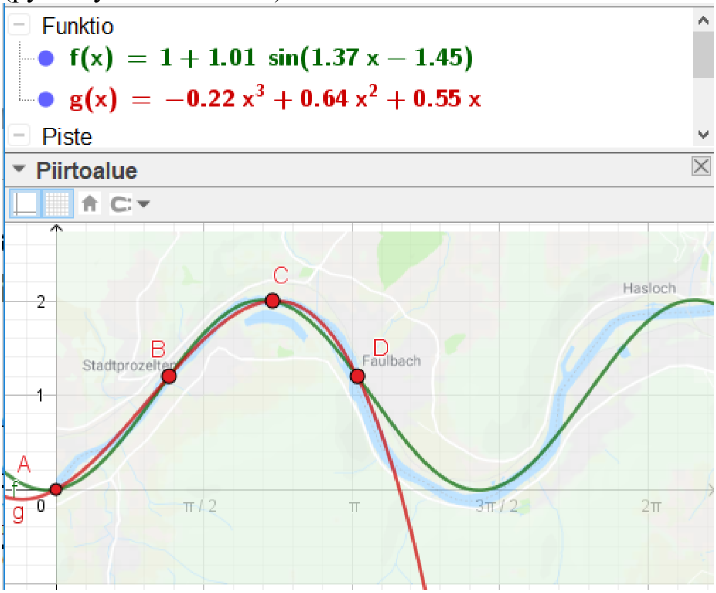
α	$V'(\alpha)$	Merkki
4	2,9…	+
6	−10,6…	−

$0 \qquad \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \qquad 2\pi$

$V'(\alpha)$		+	−	
$V(\alpha)$		↗	↘	

Kartion tilavuus on suurin, kun kulma $\alpha = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$.

766. **a)** Sovitetaan ohjelman komennoilla pisteisiin sinikäyrä ja kolmannen asteen polynomi. Kertoimet on määritetty 2 desimaalin tarkkuudella (pyöristys 2 desimaalia).



b) Lasketaan ohjelmaan tallennettujen funktioiden avulla kysytyt kaarevuudet.

Sinikäyrällä saadaan $k_S(2{,}3) = 1{,}500\ldots$
Kolmannen asteen polynomilla saadaan $k_P(2{,}3) = 0{,}935\ldots$

CAS

1	abs(f''(2,3))/sqrt((1+(f'(2,3))^2)^3) ≈ **1.5004**
2	abs(g''(2,3))/sqrt((1+(g'(2,3))^2)^3) ≈ **0.9358**

Sinikäyrällä on siis suurempi kaarevuus.

767. Ratkaistaan yhtälöstä $2x^2 + y^2 = 6$ muuttuja y, jolloin saadaan
$y = \sqrt{6-2x^2}$ tai $y = -\sqrt{6-2x^2}$.
Koska näin halutaan määrittää funktio $y(x)$, jolle $y(1) = -2$, niin valitaan
$y(x) = -\sqrt{6-2x^2}$. Tällöin $y(1) = -\sqrt{6-2\cdot 1^2} = -2$.

Tangentti kulkee pisteen $(1, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $y'(1)$.

$$y'(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3-x^2}}$$

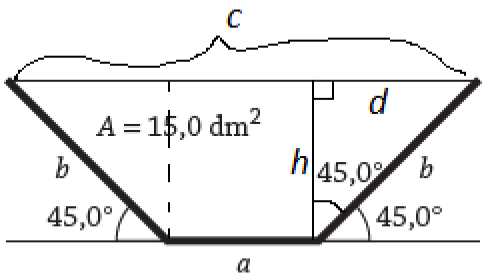
$y'(1) = 1$

Tangentin yhtälö on siis $y - (-2) = 1(x - 1)$, mistä saadaan $y = x - 3$.

Tangentti leikkaa x-akselin, kun $y = 0$:
Yhtälön $0 = x - 3$ ratkaisu on $x = 3$, joten tangentti leikkaa x-akselin pisteessä $(3, 0)$.

768. Muuttujien a ja b välille saadaan yhteys puolisuunnikkaan pinta-alan avulla:

$$\frac{a+c}{2}\cdot h=15$$



Kuvan suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$\cos 45° = \frac{h}{b}$, josta saadaan $h = b\cos 45° = \frac{b\sqrt{2}}{2}$

Sivun c pituus on $a + 2d$. Tässä myös d saadaan samasta suorakulmaisesta kolmiosta.

$\sin 45° = \frac{d}{b}$, josta saadaan $d = b\sin 45° = \frac{b\sqrt{2}}{2}$

Sivun c pituus on siis $a+2\cdot\frac{b\sqrt{2}}{2}$ ja korkeus h on $\frac{b\sqrt{2}}{2}$, joten suunnikkaan pinta-alasta saadaan yhtälö

$$\frac{a+a+2\cdot\frac{b\sqrt{2}}{2}}{2}\cdot\frac{b\sqrt{2}}{2}=15.$$

Ratkaistaan ohjelmalla tästä yhtälöstä a.

Saadaan $a=\frac{-(b^2-30)\sqrt{2}}{2b}$.

Nyt $a+2b=\frac{-(b^2-30)\sqrt{2}}{2b}+2b$, joten virtausvastusta kuvaa funktio

$$f(b)=\frac{-(b^2-30)\sqrt{2}}{2b}+2b.$$

Etsitään funktion $f(b)=\dfrac{-(b^2-30)\sqrt{2}}{2b}+2b$ pienin arvo derivaatan avulla.

$$f'(b)=\frac{-(b^2(\sqrt{2}-4)+30\sqrt{2})}{2b^2}$$

$f'(b) = 0$, kun $b = -4,0\ldots$ tai kun $b = 4,0506\ldots$

	0	4,0…	
$f'(b)$		−	+
$f(b)$		↘	↗

b	$f'(b)$	Merkki
2	−4,0…	−
6	0,7..	+

Lausekkeen $a + 2b$ arvo on pienin kun $b = 4,0506\ldots$ (dm).

$$a=\frac{-(b^2-30)\sqrt{2}}{2b}=2,372...\text{ (dm)}$$

Siis $a \approx 23,7$ cm ja $b \approx 40,5$ cm.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

769. Jos funktio f on derivoituva kohdassa $x = a$, niin raja-arvo

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ on olemassa.

Funktio on derivoituva kohdassa $x = -a$, mikäli raja-arvo

$\lim\limits_{x\to -a}\frac{f(x)-\overbrace{f(-a)}^{=-f(a)}}{x-(-a)}=\lim\limits_{x\to -a}\frac{f(x)+f(a)}{x+a}$ on olemassa.

Jotta päästään käyttämään tietoa derivaatan $f'(a)$ olemassaolosta, tehdään muuttujanvaihto: merkitään $x = -y$. Tällöin $x \to -a$ tarkoittaa samaa kuin $y \to a$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -a}\frac{f(x)+f(a)}{x+a} &= \lim_{y\to a}\frac{\overbrace{f(-y)}^{=-f(y)}+f(a)}{-y+a}\\
&= \lim_{y\to a}\frac{-f(y)+f(a)}{-y+a}\\
&= \lim_{y\to a}\frac{-(f(y)-f(a))}{-(y-a)}\\
&= \lim_{y\to a}\underbrace{\left(\frac{f(y)-f(a)}{y-a}\right)}_{\to f'(a)}\\
&= f'(a)
\end{aligned}$$

On siis osoitettu, että $f'(-a)=\lim\limits_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}=f'(a)$ eli että funktio f on derivoituva kohdassa $x = -a$ ja $f'(-a) = f'(a)$.

770. Koska kyseessä on toisen asteen yhtälö, on oltava $a \neq 0$. Yhtälön ratkaisuksi saadaan tällöin ohjelmalla $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.
Koska $|a| < 1$, niin tällöin $1 - a > 0$, ja yhtälöllä on kaksi ratkaisua eli juurta.

Lasketaan ohjelmalla yhtälön juurten raja-arvo kun $a \to 0$.

$\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a} = -\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$ ei raja-arvoa

Kun $a = 0$, yhtälö on muotoa $2x + 1 = 0$, jonka ratkaisu on $x = -\dfrac{1}{2}$.

Ratkaisun $\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$ raja-arvo on siis sama kuin arvoa $a = 0$ vastaavan yhtälön juuri.

771. Funktio f on jatkuva kohdassa $x = b$, jos $f(b) = \lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b+} f(x)$.

$f(b) = ab^2 + 3b$

$\lim_{x \to b-} f(x) = -b^2 + a^2 b$

$\lim_{x \to b+} f(x) = ab^2 + 3b$

Funktio on siis jatkuva kohdassa $x = b$, jos $ab^2 + 3b = -b^2 + a^2 b$.
Selvitetään tästä ehto vakiolle b.

$$ab^2 + 3b = -b^2 + a^2 b$$
$$ab^2 + 3b + b^2 - a^2 b = 0$$
$$b(ab + 3 + b - a^2) = 0$$
$$b = 0 \text{ tai } ab + 3 + b - a^2 = 0$$
$$(a+1)b = a^2 - 3$$

Jos $a \neq -1$, saadaan b ratkaistua yhtälöstä $(a + 1)b = a^2 - 3$:

$$(a+1)b = a^2 - 3 \quad \|:(a+1)$$
$$b = \frac{a^2 - 3}{a+1}$$

Jos $a = -1$, yhtälöstä $(a + 1)b = a^2 - 3$ tulee yhtälö $0 = 2$, jolla ei ole ratkaisuja.

Funktio f on siis jatkuva, kun $b = 0$, jolloin a voi olla mikä tahansa reaaliluku, sekä kun $b = \frac{a^2 - 3}{a+1}$, missä $a \neq -1$.

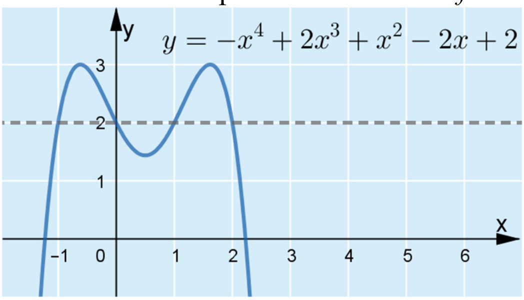
772. **a)** Epäyhtälö $f(x) \geq 2$ voidaan kirjoittaa myös muodossa $f(x) - 2 \geq 0$.
Merkitään $g(x) = f(x) - 2$ ja päätellään funktioksi g sopiva funktio.

Koska epäyhtälön $g(x) \geq 0$ ratkaisu on $-1 \leq x \leq 0$ tai $1 \leq x \leq 2$, niin funktion g nollakohdat ovat $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ ja $x = 2$. Eräs funktio, jolla on nämä nollakohdat eikä muita, on $(x + 1)\, x\, (x - 1)\, (x - 2)$. Tehdään tämän funktion merkkikaavio ja katsotaan, kelpaako se.

		-1	0	1	2
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$g(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Merkit ovat juuri toisinpäin kuin mitä haluttiin.
Voidaan siis valita
$g(x) = -(x + 1)\, x\, (x - 1)\, (x - 2) = -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x$.

Tällöin $f(x) = g(x) + 2 = -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 2$.
Tarkistetaan vielä piirtämällä funktion f kuvaaja.



Rationaalifunktio on funktio, joka voidaan esittää kahden polynomin osamääränä. Kaikki polynomifunktiot ovat myös rationaalifunktioita, sillä nimittäjäksi voidaan valita vakiofunktio 1. Funktio f on siis pyydettyä tyyppiä.

b) Koska funktio g ei saa negatiivisia arvoja, ja sen derivaatalla tulee olla kaksi nollakohtaa, valitaan funktioksi g neljännen asteen polynomi, jolloin sen derivaatta on kolmannen asteen polynomi.

Kokeillaan funktiota $g(x) = x^4 + x^2$, joka selvästi saa vain ei-negatiivisia arvoja.
Nyt $g'(x) = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$. Tällä on kuitenkin vain yksi nollakohta.

Mietitään sitten derivaatan g' kautta:
Derivaatalla tulee olla kaksi nollakohtaa, joten valitaan esimerkiksi $g'(x) = x^2(x - 1) = x^3 - x^2$.
Nyt derivaatan nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 1$.
Nyt saadaan $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + C$.
Murtolukujen välttämiseksi valitaan kuitenkin
$g'(x) = 12x^2(x - 1) = 12x^3 - 12x^2$, jolloin saadaan
$g(x) = 3x^4 - 4x^3 + C$.

Valitaan vakio C siten että funktion g pienin arvo ei ole negatiivinen.

	0	1	
$g'(x)$	$-$	$-$	$+$
$g(x)$	↘	↘	↗

$g(1) = 3 - 4 + C = -1 + C$
Voidaan siis valita esimerkiksi $g(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

773. **a)** Funktio g on derivoituva kohdassa $x = 0$, mikäli raja-arvo

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ on olemassa.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,f(x)-0\cdot f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)$$

Koska funktio f on jatkuva kohdassa $x = 0$, on $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

Siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

On siis osoitettu, että funktio g on derivoituva kohdassa $x = 0$ ja että $g'(0)=f(0)$.

b) Kohdan a mukaisesti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,f(x)-0\cdot f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)$$

Nyt, koska funktiosta f ei tiedetä muuta kuin että $-2 \le f(x) \le 2$, niin ei tiedetä, onko raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ olemassa vai ei.

Funktion g derivoituvuudesta kohdassa $x = 0$ ei siis voida sanoa mitään annettujen tietojen perusteella.

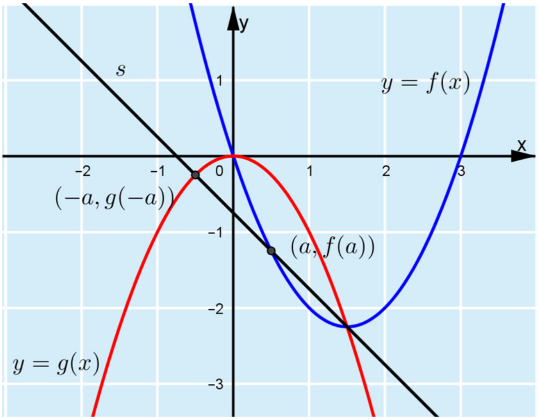
$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,f(x)-0^2\cdot f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(xf(x))$$

Koska $-2 \le f(x) \le 2$ eli $|f(x)| \le 2$ kaikilla x, niin $0 \le |x\,f(x)| \le 2|x|$ kaikilla x ja koska $\lim\limits_{x\to 0}2\,|\,x\,|=0$, myös $\lim\limits_{x\to 0}|\,xf(x)\,|=0$. Niinpä $\lim\limits_{x\to 0}(xf(x))=0$.

Siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}(xf(x))=0$.

On siis osoitettu, että funktio h on derivoituva kohdassa $x = 0$ ja että $h'(0)=0$.

774. Piirretään ensin kuva. Kuvassa $a > 0$.



Suora s kulkee pisteiden $(a, f(a))$ ja $(-a, g(-a))$ kautta ja kun $a \neq 0$, sen kulmakerroin on

$$\frac{f(a)-g(-a)}{a-(-a)} = \frac{2a^2-3a}{2a} = a - \frac{3}{2}.$$

Määritetään raja-arvo, kun $a \to 0$.

$$\lim_{a\to 0}(a - \frac{3}{2}) = -\frac{3}{2}.$$

775. Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2$

Jos $a = 0$, derivaatta $f'(x) = 3x^2$ on aina ei-negatiivinen ja sillä on vain yksi nollakohta $x = 0$, joten funktio f on kasvava. Tällöin funktiolla f ei voi olla kolmea nollakohtaa.

Jos $a \neq 0$, derivaatan nollakohdat, eli yhtälön $3x^2 + 2ax - a^2 = 0$ ratkaisut saadaan ohjelmalla, ja ne ovat $x = -a$ ja $x = \frac{a}{3}$.

Kulkukaaviolle on kaksi vaihtoehtoa riippuen siitä, onko luku a positiivinen vai negatiivinen.

Tarkastetaan ensin vaihtoehto $a > 0$. Derivaatan f' kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten derivaatta on negatiivinen nollakohtiensa välissä ja positiivinen muualla.

	$-a$		$\frac{a}{3}$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$f(-a) = a^3 + 1$ ja $f(\frac{a}{3}) = 1 - \frac{5}{27}a^3$

Koska f on kolmannen asteen polynomi, sillä on kolme nollakohtaa, jos

$$\begin{cases} f(-a) > 0 \\ f(\frac{a}{3}) < 0. \end{cases}$$

Ohjelmalla tämän epäyhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan

$a > \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \quad (\approx 1{,}75)$

Kaikki nämä luvut toteuttavat ehdon $a > 0$, joten funktiolla on kolme nollakohtaa, kun $a > \frac{3}{\sqrt[3]{5}}$.

Tarkastetaan sitten vaihtoehto $a < 0$.

	$\frac{a}{3}$		$-a$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$f(\frac{a}{3}) = 1 - \frac{5}{27}a^3$ ja $f(-a) = a^3 + 1$

Koska f on kolmannen asteen polynomi, nollakohtia on nyt kolme, jos

$$\begin{cases} f(\frac{a}{3}) > 0 \\ f(-a) < 0. \end{cases}$$

Ohjelmalla tämän epäyhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan $a < -1$.
Kaikki nämä luvut toteuttavat ehdon $a < 0$, joten funktiolla on kolme nollakohtaa, kun $a < -1$.

Funktiolla f on siis kolme nollakohtaa, kun $a < -1$ tai $a > \frac{3}{\sqrt[3]{5}}$.

776. Esimerkiksi funktio $f(x) = x^3$ on pariton ja kasvava:
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$
$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ kaikilla x ja derivaatta on 0 vain, kun $x = 0$, joten f on kasvava.

Esimerkiksi sinifunktio on pariton, mutta ei kasvava:
sin $(-x) = -$sin x, joten sini on pariton funktio. Sini saa samat arvot aina 2π välein, joten se ei ole kasvava.

Oletetaan, että f on pariton ja jatkuva. Tällöin

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} f(-x)}_{f(0)} = \lim_{x\to 0}(-f(x)) = -\underbrace{\lim_{x\to 0}(f(x))}_{f(0)}$$

Yhtälöstä $f(0) = -f(0)$ saadaan $2f(0) = 0$ ja edelleen $f(0) = 0$.

777. Yhtälön $x^7 + x^2 + 6x = a$ eli yhtälön $x^7 + x^2 + 6x - a = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^7 + x^2 + 6x - a$ nollakohdat. Tutkitaan funktion f kulkua.

$f'(x) = 7x^6 + 2x + 6$
Pakollisten kurssien tiedoilla derivaatan nollakohtia ei osata määrittää. Tutkitaan derivaattafunktion f' kulkua sen derivaatan f'' avulla.

$f''(x) = 42x^5 + 2$
Toisen derivaatan f'' nollakohta on yhtälön $42x^5 + 2 = 0$ ratkaisu.

$$42x^5 + 2 = 0$$
$$x = \sqrt[5]{-\frac{1}{21}} \approx -0{,}54$$

		$\sqrt[5]{-\frac{1}{21}}$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f'(x)$	↘	↗

x^5 on kasvava

Tarkistetaan, mikä on derivaatan merkki minimikohdassaan.

$$f'\left(\sqrt[5]{-\frac{1}{21}}\right) = 7 \cdot \left(\sqrt[5]{-\frac{1}{21}}\right)^6 + 2 \cdot \sqrt[5]{-\frac{1}{21}} + 6 \approx 5{,}1 > 0$$

Koska derivaattafunktion f' pienin arvo on positiivinen, derivaatta saa vain positiivisia arvoja. Näin ollen funktio f on kasvava ja näin ollen sillä on enintään yksi nollakohta.

Koska f on seitsemännen asteen polynomifunktio, sillä on ainakin yksi nollakohta.

Koska funktiolla f on näin näytetty olevan tasan 1 nollakohta vakion a arvosta riippumatta, yhtälöllä $x^7 + x^2 + 6x = a$ on aina yksi ratkaisu.

778. Tehtäväannon perusteella tiedetään siis seuraavat asiat:
$f(x+y)=f(x)f(y)$
$f(0)=1$
raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f\,'(0)$ on olemassa.

Tarkastellaan sitten erotusosamäärän raja-arvoa kohdassa $x = a$.
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Jotta päästään käyttämään tietoa derivaatan $f\,'(0)$ olemassaolosta, tehdään muuttujanvaihto: merkitään $x = a + h$. Tällöin $x \to a$ tarkoittaa samaa kuin $h \to 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a)}{a+h-a}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a)f(h)+f(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a)(f(h)+1)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}f(a)\frac{f(h)+f(0)}{h-0}\end{aligned}$$

Koska $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f\,'(0)$, nyt saadaan

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}f(a)\frac{f(h)+f(0)}{h-0}=f(a)f\,'(0)=f\,'(0)f(a)$$

On siis osoitettu, että f on derivoituva kohdassa $x = a$ ja $f'(a)=f'(0)f(a)$. Koska luvusta a ei oletettu mitään, tämän perusteella funktio f on derivoituva kaikkialla ja $f'(x) = f'(0)f(x)$ kaikilla x.

Mikä tahansa muotoa a^x oleva funktio ($a > 0$) toteuttaa tehtävänannon ehdot. Valitaan vaikkapa $f(x) = e^x$:
$e^{x+y} = e^x e^y$
$e^0 = 1$
ja e^x on eksponenttifunktiona derivoituva, kun $x = 0$.

Toinen tapa:

Käytetään derivaatan määritelmän muotoa $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}f(x)\frac{f(h)-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}f(x)\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\\ &= f(x)f'(0)\end{aligned}$$

Mikä tahansa muotoa a^x oleva funktio toteuttaa tehtävänannon ehdot.
Valitaan vaikkapa $f(x) = e^x$:
$e^{x+y} = e^x e^y$
$e^0 = 1$
ja e^x on eksponenttifunktiona derivoituva, kun $x = 0$.

779. **a)**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+|x|}-\frac{0}{1+|0|}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+|x|}-0}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+|x|}\\ &= \frac{1}{1+0}=1\end{aligned}$$

Koska erotusosamäärällä on raja-arvo, funktio f on derivoituva, kun $x = 0$.

b) Kohdan a laskun perusteella $f'(0) = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{x}$$

Muodostetaan derivaattafunktion f' lauseke.

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}=\begin{cases}\frac{x}{1+x}, & \text{kun } x\geq 0\\ \frac{x}{1-x}, & \text{kun } x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x+1)^2}, & \text{kun } x>0\\ 1, & \text{kun } x=0\\ \frac{1}{(x-1)^2}, & \text{kun } x<0\end{cases}$$

Funktion $g(x) = f'(x)$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa nolla on siis määritettävä toispuolisten raja-arvojen avulla.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{f'(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\frac{1}{(x-1)^2}-1}{x}=2$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-1}{x}=-2$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa ja funktio g ei siten ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

780. Derivaatan määritelmän mukaan $f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Koska välillä $-1 < x < 1$ pätee $f(x) = 1 + 2x + x^2 f(x^2)$, saadaan $f(0) = 1 + 0 + 0 \cdot f(0) = 1$.

Siis $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.

Koska tarkastellaan raja-arvoa, kun x lähestyy nollaa, rajoitutaan välille $-1 < x < 1$, jolloin saadaan

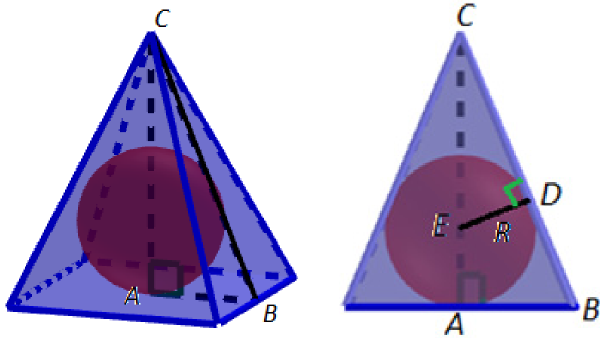
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2x + x^2 f(x^2) - 1}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2x + x^2 f(x^2)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} (2 + x f(x^2))
\end{aligned}$$

Koska $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ ja $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, saadaan $\lim_{x \to 0} f(x^2) = 1$.

Näin saadaan $\lim_{x \to 0} (2 + x f(x^2)) = 2 + 0 \cdot 1 = 2$.

Siis $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} (2 + x f(x^2)) = 2$.

781. Oletetaan, että ”mahdollisimman pieni” tarkoittaa, että pyramidi on tilavuudeltaan mahdollisimman pieni.



Pallon tilavuus on $V_{\text{Pallo}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Kuvan merkinnöillä pyramidin tilavuus on $V_{\text{Pyramidi}} = \frac{1}{3} \cdot (2AB)^2 \cdot AC$.

Pyritään ilmoittamaan pituudet AB ja AC kirjaimen R avulla.

Kuvassa olevat kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoisia, sillä ne molemmat ovat suorakulmaisia ja niissä on yhteinen kulma C.

Merkitään $AC = h$. Tällöin $EC = h - R$.
Pythagoraan lauseella saadaan kolmiosta EDC

$$EC^2 = DC^2 + ED^2$$
$$DC^2 = EC^2 - ED^2$$
$$DC^2 = (h-R)^2 - R^2$$
$$DC = \sqrt{h^2 - 2hR} \quad (\text{tai } DC = -\sqrt{h^2 - 2hR}).$$

Vastinosien suhteena saadaan $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC}$ eli

$$\frac{AB}{R} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 2hR}},$$ josta edelleen

$$AB = \frac{hR}{\sqrt{h^2 - 2hR}}.$$

Pyramidin tilavuus on siis

$$V_{\text{Pyramidi}} = \frac{1}{3}\cdot(2AB)^2\cdot AC = \frac{1}{3}\cdot\left(2\frac{hR}{\sqrt{h^2-2hR}}\right)^2\cdot h = -\frac{4h^2R^2}{3(2R-h)}.$$

Etsitään funktion $V(h) = -\frac{4h^2R^2}{3(2R-h)}$ pienin arvo derivaatan avulla.

$$V'(h) = \frac{4h(h-4R)R^2}{3(h-2R)^2}$$

$V'(h) = 0$, kun $h = 4R$ tai $h = 0$.

	0	4R	
$V'(h)$		$-$	$+$
$V(h)$		↘	↗

h	$V'(h)$	Merkki
R	$-4R^2$	$-$
$5R$	$\frac{20R^2}{27}$	$+$

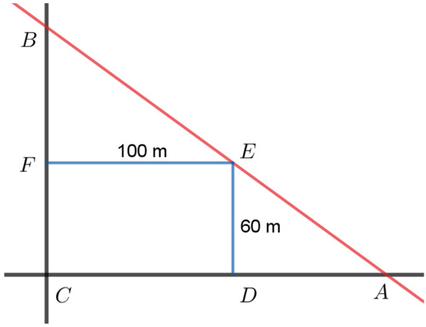
Pyramidin tilavuus on siis pienin, kun h = 4R. Tällöin tilavuus on

$$V(4R) = \frac{32R^3}{3}.$$

Pallon ja pyramidin tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_{\text{Pallo}}}{V_{\text{Pyramidi}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{32R^3}{3}} = \frac{\pi}{8} = \pi : 8$$

782. Kuvan merkinnöillä halutaan siis määrittää kulma $\sphericalangle EAD$ kun janan AB pituus on mahdollisimman pieni.



Kulmat $\sphericalangle EFB$ ja $\sphericalangle ADE$ ovat suoria, koska puun etäisyys käytävistä mitataan aina kohtisuorasti.

Kolmiot DAE ja FEB ovat yhdenmuotoisia, sillä niissä on molemmissa suora kulma ja kulmat A ja E ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Vastinosien suhteena saadaan $\frac{BE}{EA} = \frac{100}{DA}$.

DA saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

$DA^2 = EA^2 - 60^2$

$DA = \sqrt{EA^2 - 3600}$ (tai $DA = -\sqrt{EA^2 - 3600}$)

Nyt siis $\frac{BE}{EA} = \frac{100}{\sqrt{EA^2 - 3600}}$. Ratkaistaan tästä BE:

$$BE = \frac{100EA}{\sqrt{EA^2 - 3600}}.$$

Oikopolun pituus on nyt $BE + EA = \frac{100EA}{\sqrt{EA^2 - 3600}} + EA$, missä $EA > 60$.

Merkitään selvyyden vuoksi $EA = x$, jolloin oikopolun pituuden kertoo funktio

$$f(x) = \frac{100x}{\sqrt{x^2 - 3600}} + x.$$

Etsitään tämän funktion pienin arvo derivaatan avulla.

$$f'(x)=1-\frac{360000}{(x^2-3600)\sqrt{x^2-3600}}.$$

$f'(x) = 0$, kun $x = -93{,}0\ldots$ tai $x = 93{,}0\ldots$

		60	93,0…
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		↘	↗

x	$f'(x)$	Merkki
70	$-6{,}6\ldots$	$-$
100	$0{,}2\ldots$	$+$

Oikopolun pituus on siis pienin,
kun $x = 93{,}0\ldots$ (m).

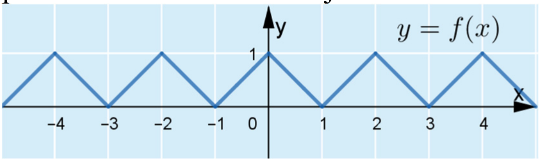
Nyt kysytty kulma saadaan kolmiosta DAE sinin avulla.

$$\sin(\sphericalangle EAD)=\frac{60}{93{,}0\ldots}$$

$$\sphericalangle EAD = 40{,}14\ldots^\circ$$

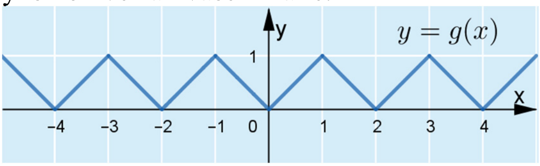
$$\sphericalangle EAD \approx 40^\circ$$

783. Piirretään funktion f kuvaaja. Piirretään kuvaaja ensin yhdellä jakson pituisella välillä $-1 \leq x \leq 1$ ja toistetaan tätä molempiin suuntiin.



Funktio f ei ole derivoituva kohdissa $x = n$, missä n on kokonaisluku, koska niissä kohdissa funktion erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot ovat erisuuret. Kuvassa tämä näkyy siten, että funktion kuvaajassa on näissä kohdissa kulma: nouseva suora vaihtuu laskevaksi tai laskeva suora vaihtuu nousevaksi.

Funktio g saa kohdassa x saman arvon kuin funktio f saa kohdassa $x + 1$. Funktion g kuvaaja saadaan funktion f kuvaajasta siirtämällä sitä yhden yksikön verran vasemmalle.



Myöskään funktio g ei ole derivoituva kohdissa $x = n$, missä n on kokonaisluku.

Funktiota h varten tarkastellaan erikseen välit $-1 \leq x \leq 0$ ja $0 \leq x \leq 1$. Muualla kuvaaja toistuu samanlaisena jaksollisuuden vuoksi.

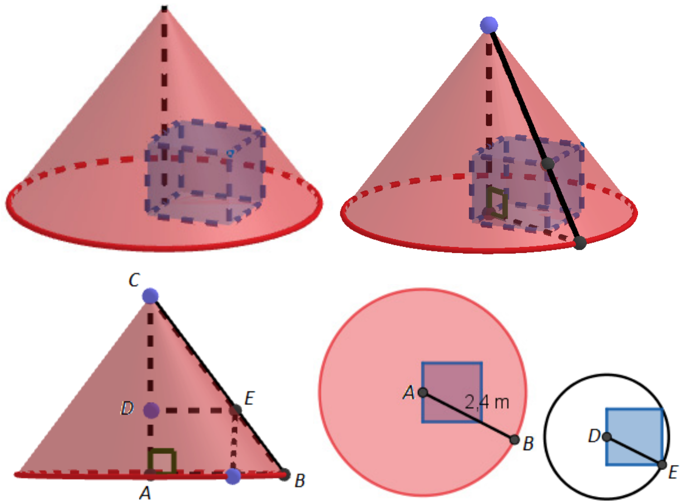
Kun $-1 \leq x \leq 0$, niin $0 \leq x + 1 \leq 1$, joten funktion h lausekkeeksi saadaan $f(x) + f(x + 1) = 1 + x + 1 - (x + 1) = 1$.

Kun $0 \leq x \leq 1$, niin $1 \leq x + 1 \leq 2$.
Välillä $1 \leq x \leq 2$ funktion f kuvaaja on nouseva suora, joka kulkee pisteiden $(1, 0)$ ja $(2, 1)$ kautta, joten sen yhtälö on $y = x - 1$.
Välillä $1 \leq x \leq 2$ funktion f arvot lasketaan siis lausekkeella $x - 1$.

Nyt saadaan välillä $0 \leq x \leq 1$ funktion h lausekkeeksi
$f(x) + f(x + 1) = (1 - x) + ((x + 1) - 1) = 1$.

Näin ollen $h(x) = 1$, kun $-1 \leq x \leq 1$, ja jaksollisuuden vuoksi $h(x) = 1$ kaikilla x. Koska funktion h lauseke sievenee vakiofunktioksi, se on derivoituva kaikilla luvuilla x.

784. Hahmotellaan tilanteesta kuvia.



Kuvan merkinnöillä kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoisia, sillä niissä molemmissa on suora kulma, ja kulmat B ja E ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

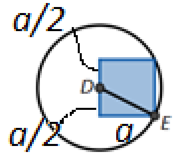
Vastinosien suhteesta saadaan $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DC}$ eli $\dfrac{2,4}{DE}=\dfrac{AC}{DC}$.

Kartion korkeus AC saadaan Pythagoraan lauseen avulla.
$AC^2 = 4,0^2 - 2,4^2$
$AC = 3,2$ (tai $AC = -3,2$)

Siis $\dfrac{2,4}{DE}=\dfrac{3,2}{DC}$.

Merkitään suorakulmaisen särmiön pohjaneliön sivun pituutta kirjaimella a ja särmiön korkeutta kirjaimella h.
Näillä merkinnöillä $DC = 3,2 - h$.

DE voidaan kirjoittaa kirjaimen *a* avulla, kun apuna käytetään Pythagoraan lausetta.



$$DE^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2$$

$$DE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Näin ollen verrannosta $\frac{2,4}{DE} = \frac{3,2}{DC}$ saadaan $\frac{2,4}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{3,2}{3,2-h}$.

Ratkaistaan tästä h, jolloin ohjelmalla saadaan $h = -2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}a + \frac{16}{5}$.

Suorakulmaisen särmiön tilavuus on nyt $V(a) = a^2 \cdot h = -\frac{2}{3}\sqrt{5}\,a^3 + \frac{16}{5}a^2$.

Etsitään tämän suurin arvo derivaatan avulla.

$$V'(a) = \frac{1}{5}\left(-10\sqrt{5}\,a^2 + 32\,a\right)$$

$V'(a) = 0$, kun $a = 0$ tai $a = 16\cdot\frac{\sqrt{5}}{25} \approx 1,43...$

	0	1,43…	
$f'(x)$		+	−
$f(x)$		↗	↘

x	$f'(x)$	Merkki
1	1,9…	+
2	−5,0	−

Tilavuus on siis suurin, kun
a = 1,43… (m).
Korkeus on tällöin $h = 1,0666...$ (m)
ja tilavuus V(1,432…) = 2,184… (m^3)

Suorakulmaisen särmiön pohjasärmä on siis 1,4 m, korkeus 1,1 m ja tilavuus 2,2 m^3.