6 Funktioita ja yhtälöitä

6.1 Rationaali- ja juurifunktio

LUVUN 6.1 YDINTEHTÄVÄT

601. **a)** Määritelty, kun $a \neq 0$.

$$\underbrace{(\underbrace{a+\frac{3}{a}}_{x})^2-(\underbrace{a-\frac{3}{a}}_{y})^2}_{x^2-y^2}$$

$$=\underbrace{(\underbrace{a+\frac{3}{a}}_{x}+\underbrace{a-\frac{3}{a}}_{y})}_{(x+y)}\underbrace{(\underbrace{a+\frac{3}{a}}_{x}-(\underbrace{a-\frac{3}{a}}_{y}))}_{(x-y)}$$

$$=2a\cdot\frac{6}{a}$$

$$=12$$

Toinen tapa:

$$(a+\frac{3}{a})^2-(a-\frac{3}{a})^2$$

$$=a^2+2\cdot a\cdot\frac{3}{a}+(\frac{3}{a})^2-(a^2-2\cdot a\cdot\frac{3}{a}+(\frac{3}{a})^2)$$

$$=6+6$$

$$=12$$

b) Määritelty, kun $a \neq 0$.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1-a}{a^2}=\frac{1}{a}+\frac{1-(1-a)}{a^2}=\frac{1}{a}+\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}$$

c) Määritelty, kun $1-a>0$, eli $a<1$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-a}}-\frac{a}{\sqrt{1-a}}\overset{\sqrt{1-a})}{=}\frac{1-a}{\sqrt{1-a}}=\frac{(1-a)\sqrt{1-a}}{(\sqrt{1-a})^2}=\frac{\cancel{(1-a)}\sqrt{1-a}}{\cancel{1-a}}$$

$$=\sqrt{1-a}$$

602. **a)** Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x \neq 0$.

$$^{x)}\frac{x}{3} - {}^{3)}\frac{3}{x} = 0$$
$$\frac{x^2}{3x} - \frac{9}{3x} = 0$$
$$\frac{x^2 - 9}{3x} = 0$$

Osamäärä on nolla vain, kun osoittaja on nolla ja osamäärä on määritelty. On siis oltava

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = 3 \text{ tai } x = -3.$$

Molemmat näistä täyttävät ehdon $x \neq 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 3$ tai $x = -3$.

Toinen tapa:
Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $x \neq 0$.

$$\frac{x}{3} - \frac{3}{x} = 0$$
$$\frac{x}{3} = \frac{3}{x} \quad \| \text{kerrotaan ristiin, } x \neq 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = 3 \text{ tai } x = -3$$

Molemmat näistä täyttävät ehdon $x \neq 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 3$ tai $x = -3$.

b) Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $1 - x \neq 0$ eli kun $x \neq 1$.

$$1-x=\frac{1}{1-x}$$

$$^{1-x)}\frac{1-x}{1}-\frac{1}{1-x}=0$$

$$\frac{(1-x)^2}{1-x}-\frac{1}{1-x}=0$$

$$\frac{1-2x+x^2-1}{1-x}=0$$

$$\frac{x^2-2x}{1-x}=0$$

Ratkaistaan, milloin osoittaja on nolla.

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Molemmat näistä toteuttavat ehdon $x \neq 1$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 0$ tai $x = 2$.

Toinen tapa:
Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $1 - x \neq 0$ eli kun $x \neq 1$.

$$1-x=\frac{1}{1-x} \quad \| \cdot (1-x) \quad \neq 0$$

$$(1-x)^2=1$$

$$1-2x+x^2=1$$

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad x-2=0$$

$$x=2$$

Molemmat näistä toteuttavat ehdon $x \neq 1$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 0$ tai $x = 2$.

c) Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $1 - x \neq 0$ ja kun $1 + x^2 \neq 0$. Näistä saadaan ehdot $x \neq 1$ ja $x^2 \neq -1$. Koska $x^2 \geq 0$, yhtälön ratkaisujen riittää siis toteuttaa ehto $x \neq 1$.

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$^{1+x^2)}\frac{1+x}{1-x} - {}^{1-x)}\frac{1-x^2}{1+x^2} = 0$$

$$\frac{(1+x)(1+x^2)-(1-x)(1-x^2)}{(1-x)(1+x^2)} = 0$$

$$\frac{1+x^2+x+x^3-(1-x^2-x+x^3)}{(1-x)(1+x^2)} = 0$$

$$\frac{2x^2+2x}{(1-x)(1+x^2)} = 0$$

Ratkaistaan, milloin osoittaja on nolla.

$$\begin{aligned} 2x^2+2x&=0 \\ 2x(x+1)&=0 \\ 2x=0 \quad &\text{tai} \quad x+1=0 \\ x=0 \quad &\qquad\quad x=-1 \end{aligned}$$

Molemmat näistä toteuttavat ehdon $x \neq 1$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = -1$ tai $x = 0$.

Toinen tapa:
Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $1 - x \neq 0$ ja kun $1 + x^2 \neq 0$. Näistä saadaan ehdot $x \neq 1$ ja $x^2 \neq -1$. Koska $x^2 \geq 0$, yhtälön ratkaisujen riittää siis toteuttaa ehto $x \neq 1$.

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad \| \cdot (1-x)(1+x^2) \neq 0$$

$$\begin{aligned} (1+x)(1+x^2)&=(1-x^2)(1-x) \\ 1+x^2+x+x^3&=1-x-x^2+x^3 \\ 2x^2+2x&=0 \\ 2x(x+1)&=0 \\ 2x=0 \quad &\text{tai} \quad x+1=0 \\ x=0 \quad &\qquad\quad x=-1 \end{aligned}$$

Molemmat näistä toteuttavat ehdon $x \neq 1$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = -1$ tai $x = 0$.

603. **a)** Osoittaja 4 on aina positiivinen, joten osamäärä on negatiivinen täsmälleen silloin, kun nimittäjä 3 – 2x on negatiivinen.

$$3-2x<0$$
$$-2x<-3 \quad \| :(-2)$$
$$x>\frac{3}{2}$$

b) Epäyhtälöllä on ratkaisuja vain, kun x – 1 ≠ 0 eli kun x ≠ 1.

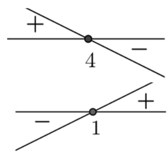
$$\frac{2x+1}{x-1}\geq 3$$
$$\frac{2x+1}{x-1}-{}^{x-1)}\frac{3}{1}\geq 0$$
$$\frac{2x+1}{x-1}-\frac{3(x-1)}{x-1}\geq 0$$
$$\frac{2x+1-3(x-1)}{x-1}\geq 0$$
$$\frac{-x+4}{x-1}\geq 0$$

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.

$$-x+4=0$$
$$x=4$$

Tehdään merkkikaavio

	1	4	
$-x+4$	+	+	–
$x-1$	–	+	+
$\frac{-x+4}{x-1}$	–	+	–



Epäyhtälön $\frac{-x+4}{x-1}\geq 0$ ja samalla epäyhtälön $\frac{2x+1}{x-1}\geq 3$ ratkaisu on siis $1<x\leq 4$.

c) Epäyhtälöllä on ratkaisuja vain, kun $x-3 \neq 0$ eli kun $x \neq 3$.

$$\frac{x^2+7x+2}{x-3} > 1$$

$$\frac{x^2+7x+2}{x-3} - {}^{x-3)}\frac{1}{1} > 0$$

$$\frac{x^2+7x+2}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} > 0$$

$$\frac{x^2+7x+2-x+3}{x-3} > 0$$

$$\frac{x^2+6x+5}{x-3} > 0$$

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.

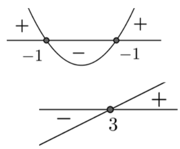
$x^2+6x+5=0$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{-6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-6\pm4}{2}$$

$x=-1$ tai $x=-5$

Tehdään merkkikaavio

	-5	-1	3	
x^2+6x+5	$+$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{-x+4}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$



Epäyhtälön $\frac{x^2+6x+5}{x-3} > 0$ ja samalla epäyhtälön $\frac{x^2+7x+2}{x-3} > 1$ ratkaisu on siis $-5 < x < -1$ tai $x > 3$.

604. **a)** Neliöjuuren arvo on 3 täsmälleen silloin, kun juurettavana on 9 eli kun $x + 5 = 9$, mistä saadaan $x = 4$.

b) Yhtälöstä $\sqrt{4x-1}+3=0$ saadaan $\sqrt{4x-1}=-3$. Koska juuren arvo on aina ei-negatiivinen, yhtälöllä ei ole ratkaisua

c) Kuutiojuuren arvo on -1 täsmälleen silloin, kun juurrettavana on -1 eli kun $x^2 - 4 = -1$. Tästä saadaan $x^2 = 3$, mistä edelleen $x=\sqrt{3}$ tai $x=-\sqrt{3}$.

605. **a)** Neliöjuuri on määritelty, kun $3 - x \geq 0$ eli kun $x \leq 3$.
Juuren arvo on ei-negatiivinen, kun $x + 3 \geq 0$, eli kun $x \geq -3$.
Molemmat ehdot toteutuvat, kun $-3 \leq x \leq 3$.
Korotetaan yhtälö puolittain neliöön.

$$\sqrt{3-x} = x+3$$
$$3-x = (x+3)^2$$
$$3-x = x^2+6x+9$$
$$x^2+7x+6=0$$
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1} = \frac{-7\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-7\pm5}{2}$$
$$x=-1 \quad \text{tai} \quad x=-6$$

Näistä vain $x = -1$ toteuttaa ehdon $-3 \leq x \leq 3$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = -1$.

Toinen tapa:

$$\sqrt{3-x} = x+3$$
$$3-x = (x+3)^2$$
$$3-x = x^2+6x+9$$
$$x^2+7x+6=0$$
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1} = \frac{-7\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-7\pm5}{2}$$
$$x=-1 \quad \text{tai} \quad x=-6$$

Tarkistetaan, toteuttavatko ratkaisuehdokkaan alkuperäisen yhtälön.

x	$\sqrt{3-x}$	$x + 3$	
-1	$\sqrt{3-(-1)}=\sqrt{4}=2$	$-1 + 3 = 2$	toteuttaa
-6	$\sqrt{3-(-6)}=\sqrt{9}=3$	$-6 + 3 = -3$	ei toteuta

Yhtälön ratkaisu on siis $x = -1$.

b) Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun juuret ja osamäärä ovat määriteltyjä, eli kun $x - 2 > 0$, eli kun $x > 2$.

$$\sqrt{x-2} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \quad \| \cdot \sqrt{x-2} \neq 0$$
$$(\sqrt{x-2})^2 = \sqrt{x-2} + 2$$
$$x - 2 = \sqrt{x-2} + 2$$
$$\sqrt{x-2} = x - 4$$

Koska juuren arvo on aina ei-negatiivinen, on oltava $x - 4 \geq 0$, eli $x \geq 4$. Tällöin myös juuri on määritelty ja yhtälö voidaan siis korottaa puolittain neliöön.

$$\sqrt{x-2} = x - 4$$
$$x - 2 = (x-4)^2$$
$$x - 2 = x^2 - 8x + 16$$
$$x^2 - 9x + 18 = 0$$
$$x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2}$$
$$x = 6 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Näistä vain $x = 6$, toteuttaa ehdon $x \geq 4$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 6$.

Toinen tapa:

$$\sqrt{x-2}=1+\frac{2}{\sqrt{x-2}} \quad \| \cdot \sqrt{x-2}\neq 0$$
$$(\sqrt{x-2})^2=\sqrt{x-2}+2$$
$$x-2=\sqrt{x-2}+2$$
$$\sqrt{x-2}=x-4$$
$$x-2=(x-4)^2$$
$$x-2=x^2-8x+16$$
$$x^2-9x+18=0$$
$$x=\frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 1\cdot 18}}{2\cdot 1}=\frac{9\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{9\pm 3}{2}$$
$$x=6 \quad \text{tai} \quad x=3$$

Tarkistetaan, toteuttavatko ratkaisuehdokkaan alkuperäisen yhtälön.

x	$\sqrt{x-2}$	$1+\frac{2}{\sqrt{x-2}}$	
3	$\sqrt{3-2}=\sqrt{1}=1$	$1+\frac{2}{\sqrt{3-2}}=1+\frac{2}{1}=3$	ei toteuta
6	$\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$	$1+\frac{2}{\sqrt{6-2}}=1+\frac{2}{2}=2$	toteuttaa

Yhtälön ratkaisu on siis $x = 6$.

606. **a)** Yhtälö $x = 3$ voidaan kirjoittaa myös muodossa $x - 3 = 0$. Siis esimerkiksi funktio $f(x) = x - 3$ saa arvon nolla kohdassa $x = 3$. Kyseessä on rationaalifuntkio, joten f on eräs tehtävänannon ehdot täyttävä funktio.

b) Rationaalifunktio ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa, eli kohdat $x = -1$ ja $x = 2$ on oltava nimittäjän ainoat nollakohdat. Nimittäjällä on siis oltava tekijät $x + 1$ ja $x - 2$. Eräs tällainen lauseke on $(x + 1)(x - 2)$.

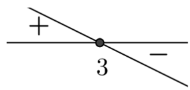
Kysytyksi funktioksi kelpaa nyt esimerkiksi $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$,

sillä se on määritelty kaikissa muissa kohdissa, paitsi $x = -1$ ja $x = 2$.

c) Koska halutaan funktio, jota ei ole määritelty kohdassa $x = 0$, nimittäjällä tulee olla tekijä x.

Osoittajan etsiminen on helpompaa jos nimittäjän merkki ei vaihdu. Valitaan osamäärän nimittäjäksi näin ollen $x^2 = x \cdot x$. Tällöin osamäärän merkki riippuu vain osoittajasta.

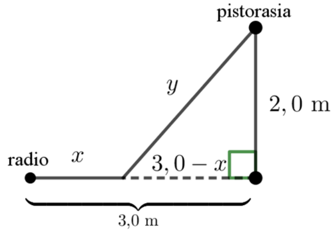
Etsitään siis osoittajaan funktio, joka saa negatiivisia arvoja vain kun $x > 3$. Eräs tällainen funktio on laskeva suora $-x + 3 = 3 - x$.



Näin ollen funktio $f(x) = \dfrac{3-x}{x^2}$ on eräs tehtävänannon ehdot

toteuttava funktio.

607. Hahmotetaan tilannetta kuvan avulla. Merkitään lattiaa pitkin kulkevan osan pituutta kirjaimella x, ja ilmassa kulkevan osan pituutta kirjaimella y, jolloin virtajohdon pituus on $x + y$.



Ratkaistaan y kuvan suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

$y^2 = (3,0 - x)^2 + 2,0^2$,

josta saadaan $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$ (tai $y = -\sqrt{x^2 - 6x + 13}$).

Virtajohdon pituutta kuvaa siis lauseke $x + \sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

Ratkaistaan ohjelman avulla millä muuttujan x arvolla virtajohdon pituus on 4,5 m.

$$x + \sqrt{x^2 - 6x + 13} = 4,5$$
$$x = 2,4166$$

Lattiaa pitkin kulkevan osan pituus on siis 2,4 m.

6.2 Eksponentti- ja logaritmifunktio

LUVUN 6.2 YDINTEHTÄVÄT

608. **a)** $f(-2) = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

Koska $f(-2) = 4$, saadaan yhtälö $\frac{1}{a^2} = 4.$ Ratkaistaan tästä a.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} &= 4 \quad \|\cdot a^2 \neq 0 \\ 4a^2 &= 1 \quad \|:4 \\ a^2 &= \frac{1}{4} \\ a &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \\ a &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Koska eksponenttifunktion kantaluku a on positiivinen, on oltava $a = \frac{1}{2}$.

Nyt $f(8) = (\frac{1}{2})^8 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$.

Kuvista I, II ja III vain kuvassa III on eksponenttifunktio. Kuvaajalla on piste (–2, 4) joten se on funktion f kuvaaja.

609. **a)** $\log_3 81$ on se eksponentti, johon luku 3 pitää korottaa, jotta saadaan 81.
$81 = 9 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$, joten $\log_3 81 = 4$.

b) $\log_5 5$ on se eksponentti, johon luku 5 pitää korottaa, jotta saadaan 5.
Siis $\log_5 5 = 1$.

c) $\log_7 \sqrt{7}$ on se eksponentti, johon luku 7 pitää korottaa, jotta saadaan $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$. Siis $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$.

d) $\log_6 5$ on se eksponentti, johon luku 6 pitää korottaa, jotta saadaan 5.
Kun luku 6 nyt sitten korotetaan tähän potenssiin, saadaan $6^{\log_6 5} = 5$.

e) $\log_{11} 11^{-123}$ on se eksponentti, johon luku 11 pitää korottaa, jotta saadaan 11^{-123}. Siis $\log_{11} 11^{-123} = -123$.

f) $\log_k 1$ on se eksponentti, johon luku k pitää korottaa, jotta saadaan luku 1. Siis $\log_k 1 = 0$.

610. **a)** $\ln e^7 = \log_e e^7 = 7$

b)

$$\begin{aligned}
&\lg 12300 - \lg 1{,}23 \\
&= \lg \frac{12300}{1{,}23} \\
&= \lg \frac{1{,}23 \cdot 10000}{1{,}23} \\
&= \lg 10000 \\
&= \log_{10} 10^4 \\
&= 4
\end{aligned}$$

c) $\ln e + \ln 1 - \ln 3e^2$
$= \log_e e + 0 - (\ln 3 + \ln e^2)$
$= 1 - \ln 3 - 2\log_e e$
$= 1 - \ln 3 - 2 \cdot 1$
$= -1 - \ln 3$

d) $e^{2\ln 5} = e^{\ln 5^2} = e^{\log_e 25} = 25$

e) $\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 (3 \cdot 12) = \log_6 36 = 2$

f) $\lg \dfrac{1}{\sqrt[3]{10000}} = \log_{10} \dfrac{1}{\sqrt[3]{10000}}$ on se eksponentti, johon luku 10 pitää korottaa, jotta saadaan $\dfrac{1}{\sqrt[3]{10000}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{10^4}} = \dfrac{1}{10^{\frac{4}{3}}} = 10^{-\frac{4}{3}}$.

Siis $\lg \dfrac{1}{\sqrt[3]{10000}} = -\dfrac{4}{3}$.

611. **a)** $7^x = 49^3$

$7^x = (7^2)^3$

$7^x = 7^6$

$x = 6$

b)

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 4^{x+1} &= 0{,}5 \\ 2^x \cdot (2^2)^{x+1} &= \frac{1}{2} \\ 2^x \cdot 2^{2x+2} &= 2^{-1} \\ 2^{3x+2} &= 2^{-1} \\ 3x + 2 &= -1 \\ 3x &= -3 \quad \| : 3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{25^x}{5^3} &= 0{,}2 \\ \frac{(5^2)^x}{5^3} &= \frac{2}{10} \\ \frac{5^{2x}}{5^3} &= \frac{1}{5} \\ 5^{2x-3} &= 5^{-1} \\ 2x - 3 &= -1 \\ 2x &= 2 \quad \| : 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

d) $2 \cdot 3^x = 18 \quad \| : 2$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2$

e) $3 \cdot 2^x = 21 \quad \|:3$

$2^x = 7$

$x = \log_2 7$

Toinen tapa:

$3 \cdot 2^x = 21 \quad \|:3$

$2^x = 7$

$\ln 2^x = \ln 7$

$x\ln 2 = \ln 7 \quad \| :\ln 2$

$x = \dfrac{\ln 7}{\ln 2}$

f) $e^{2x} = 36$

$2x = \log_e 36 \quad \|: 2$

$x = \dfrac{\log_e 36}{2} = \dfrac{\ln 36}{2}$

Tätä lauseketta voi halutessaan sieventää:

$x = \dfrac{\ln 36}{2} = \frac{1}{2}\ln 36 = \ln 36^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{36} = \ln 6$

tai $x = \dfrac{\ln 36}{2} = \dfrac{\ln 6^2}{2} = \dfrac{2\ln 6}{2} = \ln 6$

Toinen tapa:

$e^{2x} = 36$

$(e^x)^2 = 6^2$

$e^x = 6$

$x = \log_e 6 = \ln 6$

612. **a)** $f(2\ln 5)=e^{2\ln 5}-2=e^{\ln 5^2}-2=e^{\log_e 25}-2=25-2=23$

b) Selvitetään ensin, mitä on e^x.

$$e^{2x}=9$$
$$(e^x)^2=3^2$$
$$e^x=3$$

Nyt saadaan

$$e^x+e^{-3x}=e^x+(e^x)^{-3}=3+3^{-3}=3+\frac{1}{3^3}=3+\frac{1}{27}=3\frac{1}{27}.$$

Toinen tapa:
Selvitetään ensin, mitä on x.

$$e^{2x}=9$$
$$2x=\log_e 9 \quad \| :2$$
$$x=\frac{\ln 9}{2}=\tfrac{1}{2}\ln 9=\ln 9^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{9}=\ln 3$$

tai

$$x=\frac{\ln 9}{2}=\frac{\ln 3^2}{2}=\frac{2\ln 3}{2}=\ln 3$$

Nyt saadaan

$$e^x+e^{-3x}=e^{\ln 3}+e^{-3\ln 3}=3+e^{\ln 3^{-3}}=3+3^{-3}=3+\frac{1}{3^3}=3+\frac{1}{27}=3\frac{1}{27}.$$

613. Vuotuinen korko 1,5 % tarkoittaa korkokerrointa 1,015. Nyt x vuoden kulutta rahaa on kertynyt $1{,}015^x \cdot 150\,000$ euroa. Ratkaistaan, milloin rahaa on kertynyt 200 000.

$1{,}015^x \cdot 150\,000 = 200\,000 \parallel : 150\,000$

Tapa 1

$$1{,}015^x = \frac{200000}{150000} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$
$$x = \log_{1{,}015}\frac{4}{3}$$
$$x = \frac{\ln\frac{4}{3}}{\ln 1{,}015} = 19{,}32...$$

Tapa 2

$$1{,}015^x = \frac{200000}{150000} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$
$$\ln 1{,}015^x = \ln\frac{4}{3}$$
$$x\ln 1{,}015 = \ln\frac{4}{3} \quad \| \ln 1{,}015$$
$$x = \frac{\ln\frac{4}{3}}{\ln 1{,}015} = 19{,}32...$$

Aikaa on siis 20 vuotta

614. Vuonna 1970 aikaa on kulunut 0 vuotta, eli
$f(0) = A \cdot a^0 = A = 56$ (miljoonaa).

vuonna 2010 aikaa on kulunut 40 vuotta, eli
$f(40) = 56 \cdot a^{40} = 159$.

Yhtälön $56 \cdot a^{40} = 159$ ratkaisu on $a = \pm\sqrt[40]{\frac{159}{56}}$. Koska kantaluku a on positiivinen saadaan $a = \sqrt[40]{\frac{159}{56}}$.

Vuonna 2030 aikaa on kulunut 60 vuotta.

$f(60) = 56 \cdot \left(\sqrt[40]{\frac{159}{56}}\right)^{60} = 267{,}91...$ Väkiluku on siis noin 268 miljoonaa.

Ratkaistaan milloin väkiluku on 300 miljoonaa.

Yhtälön $56 \cdot \left(\sqrt[40]{\frac{159}{56}}\right)^{x} = 300$ ratkaisu on $x = 64{,}33\ldots$

Väkiluku ylittää siis 300 miljoonan rajan kun vuodesta 1970 on kulunut vähän reilu 64 vuotta, eli vuonna 2034.

6.3 Trigonometriset funktiot

LUVUN 6.3 YDINTEHTÄVÄT

615. **a)** $\frac{7\pi}{5}=1\frac{2\pi}{5}$ kulma on siis yli π = 180° mutta alle 1,5π = 270°. Siis kulma A on kuvassa IV.

$\frac{8\pi}{9}$ on hieman alle π = 180°, eli B on kuvassa I

Kulma C −270° on negatiivinen ja ainoa myötäpäivään kulkeva kulma on kuvassa II.

D $\frac{\pi}{2}=90°$ on kuvassa III

b) $\frac{\pi}{5}=\frac{180°}{5}=36°$, siis A = I

$\frac{3\pi}{4}=\frac{3\cdot 180°}{4}=3\cdot 45°=135°$, siis B = IV

$\frac{\pi}{2}=\frac{180°}{2}=90°$, siis C = III

$\frac{5\pi}{3}=\frac{5\cdot 180°}{3}=5\cdot 60=300°$, siis D = VI

616. **a)** Sinin arvo saadaan suoraan taulukoiduista arvoista.

$$\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\tan(\frac{7\pi}{3}) = \tan(2\frac{1}{3}\pi) = \tan(\frac{\pi}{3} + 2\pi) = \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

c) $\cos(\frac{13\pi}{3}) = \cos(4\frac{1}{3}\pi) = \cos(\frac{\pi}{3} + 4\pi) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

d) $\tan(-\frac{\pi}{6}) = -\tan(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

e) $\sin(-\frac{5\pi}{4}) = -\sin(\frac{5\pi}{4}) = -(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

f) $\cos(-\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi) = \cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$

g) $\tan(\frac{\pi}{6} + 10\pi) = \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

h) $\tan(405°) = \tan(225° + 180°) = \tan(225°) = 1$

617. **a)** $\sin(\alpha - 100\pi) = \sin(\alpha - 50 \cdot 2\pi) = \sin a = 0{,}2$

b) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = 0{,}2$

c) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -0{,}2$

d) $\cos(\beta + 8\pi) = \cos \beta = -0{,}4$

e) $\cos(\pi - \beta) = -\cos \beta = 0{,}4$

f) $\cos(-\beta) = \cos \beta = -0{,}4$

g)

$$
\begin{aligned}
\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\
0{,}2^2 + \cos^2 \alpha &= 1 \\
0{,}04 + \cos^2 \alpha &= 1 \\
\cos^2 \alpha &= 0{,}96 \\
\cos \alpha &= \pm\sqrt{0{,}96} \\
\cos \alpha &\approx \pm 0{,}98
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
\sin^2 \beta + \cos^2 \beta &= 1 \\
\sin^2 \alpha + 0{,}4^2 + &= 1 \\
\sin^2 \alpha + 0{,}16 + &= 1 \\
\sin^2 \alpha &= 0{,}84 \\
\sin \alpha &= \pm\sqrt{0{,}84} \\
\sin \alpha &\approx \pm 0{,}92
\end{aligned}
$$

618. Ratkaistaan sin x yhtälön $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ avulla.

$$\sin^2 x + (-\frac{1}{\sqrt{5}})^1 = 1$$
$$\sin^2 x + \frac{1}{5} = 1$$
$$\sin^2 x = \frac{4}{5}$$
$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$
$$\sin x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Koska $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $\sin x < 0$. Siis $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{1} = 2$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2 \cdot (-\frac{2}{\sqrt{5}}) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{5}})^2 - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$$

619. **a)** $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$: Arvo löytyy taulukosta.

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$: Arvo löytyy taulukosta.

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

c) $\tan x = 2 + \sqrt{3}$: Arvo löytyy taulukosta.

$$x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

d) $\sin \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: Arvo löytyy taulukosta.

$$\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \| \cdot 3 \quad \text{tai} \quad \frac{x}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \pi + n \cdot 6\pi \qquad \frac{x}{3} = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \| \cdot 3$$

$$x = 2\pi + n \cdot 6\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

e) $\cos(2x + \pi) = \cos \frac{\pi}{7}$

$$2x + \pi = \frac{\pi}{7} + n \cdot 2\pi \qquad 2x + \pi = -\frac{\pi}{7} + n \cdot 2\pi$$

$$2x = -\frac{6\pi}{7} + n \cdot 2\pi \quad \| :2 \quad \text{tai} \quad 2x = -\frac{8\pi}{7} + n \cdot 2\pi \quad \| :2$$

$$x = -\frac{3\pi}{7} + n \cdot \pi \qquad x = -\frac{4\pi}{7} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

f) $\tan 3x = 100$: Arvoa ei löydy taulukosta. Etsitään siis yksi ratkaisu laskimen avulla.

$$3x = 1{,}56\ldots + n \cdot \pi \quad \| :3$$

$$x = 0{,}520\ldots + n \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$x \approx 0{,}52 + n \cdot \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

620. Kaikkien merkittyjen leikkauspisteiden y-koordinaatti on $\frac{3}{2}$. Pisteiden x-koordinaatit ovat yhtälön $\cos(x-\frac{\pi}{2})+1=\frac{3}{2}$ ratkaisuja; kaksi suurinta negatiivista ratkaisua ja kolmanneksi pienin positiivinen ratkaisu.

$$\cos(x-\frac{\pi}{2})+1=\frac{3}{2}$$
$$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$$
$$x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi$$
$$x=\frac{2\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}+n\cdot 2\pi \qquad x=-\frac{2\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}+n\cdot 2\pi$$
$$x=\frac{5\pi}{6}+n\cdot 2\pi \qquad x=\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi$$

Taulukoidaan arvoja.

n	$\frac{5\pi}{6}+n\cdot 2\pi$	$\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi$
0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{5\pi}{6}+2\pi=\frac{17}{6}\pi$	$\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13}{6}\pi$
−1	$\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{7}{6}\pi$	$\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11}{6}\pi$

Pisteiden koordinaatit ovat $A=(-\frac{11}{6}\pi,\frac{3}{2})$, $B=(-\frac{7}{6}\pi,\frac{3}{2})$ ja $C=(\frac{13}{6}\pi,\frac{3}{2})$.

Luvun 6 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

621. **a)**

$$\begin{aligned} \ln x &= -1 \\ \log_e x &= -1 \\ x &= e^{-1} \\ x &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

b) $\log_2 x = -3$ täsmälleen silloin, kun $x = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c)

$$\begin{aligned} \lg 0{,}01974 - \lg 0{,}000001974 &= \lg \frac{0{,}01974}{0{,}000001974} \\ &= \lg 10000 \\ &= \log_{10} 10^4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

d) $e^{3\ln a} + 2a^3 = e^{\log_e a^3} + 2a^3 = a^3 + 2a^3 = 3a^3$

622. **a)** $f(3\pi)=\dfrac{2+\sin 3\pi}{2-\cos 3\pi}=\dfrac{2+0}{2-(-1)}=\dfrac{2}{3}$

$$f(\frac{9\pi}{2})=\frac{2+\sin\frac{9\pi}{2}}{2-\cos\frac{9\pi}{2}}=\frac{2+\sin(\frac{\pi}{2}+4\pi)}{2-\cos(\frac{\pi}{2}+4\pi)}=\frac{2+\sin\frac{\pi}{2}}{2-\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{2+1}{2-0}=\frac{3}{2}$$

b) Koska kyseessä on kolmion kulmat, niiden summa on 180°.

$x + 2x + 3x = 180°$
$6x = 180° \quad \| :6$
$x = 30°$

Kulmat ovat siis 30°, 60° ja 90°.

Lasketaan pyydetty sinien summan neliö.

$(\sin 30° + \sin 60° + \sin 90°)^2$

$=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1)^2$

$=(\frac{1+\sqrt{3}+2}{2})^2$

$=(\frac{3+\sqrt{3}}{2})^2$

$=\frac{9+6\sqrt{3}+3}{4}$

$=\frac{12+6\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{6+3\sqrt{3}}{2}$

623. **a)** Rationaalifunktion nollakohdat ovat ne osoittajan nollakohdat, joilla funktio on määritelty. Koska osoittaja on nyt aina positiivinen, sillä ei ole nollakohtia. Väite on siis tosi.

b) Väite on epätosi. Esimerkiksi $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ täyttää annetut ehdot, mutta funktion lauseke ei sievene ensimmäisen asteen polynomiksi.

c) Osamäärän arvo on positiivinen täsmälleen silloin, kun osoittaja ja nimittäjä ovat samanmerkkiset. Väite on siis tosi.

d) Jos $P(a) = 0$, niin myös $Q(a) = 0$, jolloin funktiota f ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa $x = a$. Koska a ei siis voi olla funktion nollakohta. Väite on siis tosi.

624. Suplementtikulmien sinit ovat yhtä suuret. Siis A – III

Suplementtikulmien kosinit ovat toistensa vastaluvut. Siis B – I

Aina $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Siis C – I

$\log_a x = 1$ täsmälleen silloin, kun $x = a^1$. Siis D – III

Koska $a^0 = 1$, aina kun $a \neq 0$, pätee $\log_a 1 = 0$. Siis E – I

Merkitään $\log_2 x = a$. Nyt $\log_2 2x = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$. Siis F – I.

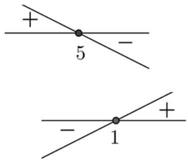
625. **a)** Epäyhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x-1\neq 0$ eli kun $x\neq 1$.

$$\frac{3x+1}{x-1}\geq 4$$
$$\frac{3x+1}{x-1}-\frac{4(x-1)}{x-1}\geq 0$$
$$\frac{3x+1-4(x-1)}{x-1}\geq 0$$
$$\frac{-x+5}{x-1}\geq 0$$

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.
$-x+5=0$, josta $x=5$.

Tehdään merkkikaavio

		1		5	
$-x+5$	$+$		$+$		-
$x-1$	$-$		$+$		$+$
$\frac{-x+4}{x-1}$	$-$		$+$		$-$



Epäyhtälön $\frac{-x+5}{x-1}\geq 0$ ja samalla epäyhtälön $\frac{3x+1}{x-1}\geq 4$ ratkaisu on siis $1<x\leq 5$.

b) Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $x\geq 0$.

$$(\underbrace{2+x}_{a}+\underbrace{\sqrt{x}}_{b})(\underbrace{2+x}_{a}-\underbrace{\sqrt{x}}_{b})=4$$
$$(2+x)^2-(\sqrt{x})^2=4$$
$$4+4x+x^2-x=4$$
$$x^2+3x=0$$
$$x(x+3)=0$$
$$x=0 \quad \text{tai} \quad x+3=0$$
$$x=-3$$

Näistä vain $x=0$ toteuttaa ehdon $x\geq 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x=0$.

Toinen tapa:
Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $x \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
(2+x+\sqrt{x})(2+x-\sqrt{x}) &= 4 \\
4+2x\cancel{-2\sqrt{x}}+2x+x^2\cancel{-x\sqrt{x}}+\cancel{2\sqrt{x}}+\cancel{x\sqrt{x}}-x &= 4 \\
4+3x+x^2 &= 4 \\
x^2+3x &= 0 \\
x(x+3) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{tai} \quad x+3 &= 0 \\
x &= -3
\end{aligned}
$$

Näistä vain $x = 0$ toteuttaa ehdon $x \geq 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 0$.

626. **a)** Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x > 0$ ja kun $x + 1 > 0$, eli kun $x > -1$. Molemmat ehdot toteutuvat kun $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\ln x + \ln(x+1) &= \ln 2 \\
\ln(x(x+1)) &= \ln 2 \\
x^2 + x &= 2 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \\
x &= 1 \quad \text{tai} \quad x = -2
\end{aligned}$$

Näistä vain $x = 1$ toteuttaa ehdon $x > 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 1$.

b) Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $2x + 10 > 0$ eli kun $2x > -10$ mistä edelleen $x > -5$, ja kun $x > 0$. Molemmat ehdot toteutuvat, kun $x > 0$.

$$\lg(2x+10) - \lg x = 2$$

$$\begin{aligned}
\lg \frac{2x+10}{x} &= 2 \\
\frac{2x+10}{x} &= 10^2 \quad \| \cdot x \neq 0 \\
2x + 10 &= 100x \\
98x &= 10 \quad \| : 98 \\
x &= \frac{10}{98} \\
x &= \frac{5}{49}
\end{aligned}$$

Ratkaisu täyttää ehdon $x > 0$.

Yhtälön ratkaisu on siis $x = \frac{5}{49}$.

Toinen tapa:

$$
\begin{aligned}
\lg(2x+10)-\lg x &= 2\\
\log_{10}\frac{2x+10}{x} &= 2\\
\log_{10}\frac{2x+10}{x} &= \log_{10}10^2\\
\frac{2x+10}{x} &= 10^2 \quad \| \cdot x \neq 0\\
2x+10 &= 100x\\
98x &= 10 \quad \| : 98\\
x &= \frac{10}{98}\\
x &= \frac{5}{49}
\end{aligned}
$$

Ratkaisu täyttää ehdon $x > 0$.

Yhtälön ratkaisu on siis $x = \frac{5}{49}$.

627. **a)** Yhtälö voidaan ratkaista tulon nollasäännön avulla.

$$(e^x-1)(e^x-2)=0$$

$e^x-1=0$ tai $e^x-2=0$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 & e^x &= 2 \\ e^x &= e^0 & x &= \log_e 2 \\ x &= 0 & x &= \ln 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (e^x-1)(e^x-2) &= 2 \\ (e^x)^2-2e^x-e^x+2 &= 2 \\ (e^x)^2-3e^x &= 0 \\ e^x(e^x-3) &= 0 \end{aligned}$$

$e^x=0$ tai $e^x-3=0$

ei ratkaisua

$$\begin{aligned} e^x &= 3 \\ x &= \log_e 3 \\ x &= \ln 3 \end{aligned}$$

c) Parillinen juuri voidaan laskea vain positiivisesta luvusta, joten yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $1-2e^x \geq 0$. Ratkaistaan, milloin näin on.

$$\begin{aligned} 1-2e^x &\geq 0 \\ 2e^x &\leq 1 \quad \|:2 \\ e^x &\leq \frac{1}{2} \quad \| e^x \text{ on kasvava} \\ x &\leq \log_e \frac{1}{2} \\ x &\leq \ln\frac{1}{2} \quad (\approx -0{,}69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{4}} &= \sqrt[4]{1-2e^x} \\ (e^x)^{\frac{1}{4}} &= (1-2e^x)^{\frac{1}{4}} \\ e^x &= 1-2e^x \\ 3e^x &= 1 \quad \|:3 \\ e^x &= \frac{1}{3} \\ x &= \log_e \frac{1}{3} \\ x &= \ln\frac{1}{3} \quad (\approx -1{,}1) \end{aligned}$$

Ratkaisu täyttää ehdon $x \le \ln\frac{1}{2}$.

Yhtälön ratkaisu on siis $x = \ln\frac{1}{3}$.

Toinen tapa:

$$\begin{aligned}
e^{\frac{x}{4}} &= \sqrt[4]{1-2e^x} \\
(e^x)^{\frac{1}{4}} &= (1-2e^x)^{\frac{1}{4}} \\
e^x &= 1-2e^x \\
3e^x &= 1 \quad \|:3 \\
e^x &= \frac{1}{3} \\
x &= \log_e \frac{1}{3} \\
x &= \ln\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Tarkistetaan toteuttaako ratkaisuehdokas alkuperäisen yhtälön.

$$e^{\frac{\ln\frac{1}{3}}{4}} = (e^{\ln\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = (e^{\log_e\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[4]{1-2e^{\ln\frac{1}{3}}} = \sqrt[4]{1-2\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

Yhtälön ratkaisu on siis $x = \ln\frac{1}{3}$.

628. **a)** tan x on kulman x tangenttipisteen y-koordinaatti. Siis $\tan x = 2$.

b) $\tan(-x) = -\tan x = -2$

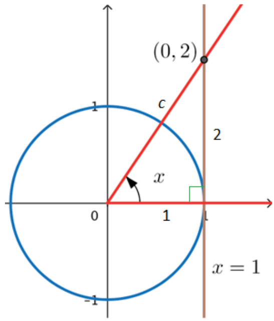
c) $\tan(x + 10\pi) = \tan x = 2$

d) Ratkaistaan kuvan kolmiosta hypotenuusan pituus c.

$c^2 = 1^2 + 2^2$

$c^2 = 5$

$c = \sqrt{5} \quad (\text{tai } c = -\sqrt{5})$



Koska kuva perusteella $0 < x < \frac{\pi}{2}$, saadaan

$\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

e) Edellisen kohdan laskujen perusteella saadaan $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

e) $\sin(-x) = -\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

629. **a)** Pisteen A y-koordinaati saadaan suoraan annetun tiedon perusteella.

$A=(x,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Koska ainoa sallittu keino etsiä pisteen x-koordinaatti on trigonometristen kaavojen käyttäminen, hyödynnetään sitä tietoa, että kehäpisteen x-koordinaatti on kulman kosini, ja että $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}
\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}&=1\\
\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cos^2\frac{\pi}{3}&=1\\
\frac{3}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}&=1\\
\cos^2\frac{\pi}{3}&=\frac{1}{4}\\
\cos\frac{\pi}{3}&=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\\
\cos\frac{\pi}{3}&=\pm\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Koska kulma $\frac{\pi}{3}$ on 1. neljänneksessä $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

Näin ollen $A=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Pisteen B y-koordinaatti on sama kuin pisteellä A, joten niiden sinit ovat samat. Suplementtikulmilla on sama sini, joten piste B on kulman $\frac{\pi}{3}$ suplementtikulman kehäpiste. Koska suplementtikulmien kosinit ovat toistensa vastaluvut, pisteen B x-koordinaatti on pisteen A x-koordinaatin vastaluku.

Siis $B=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Pisteen D x-koordinaatti on sama kuin pisteellä A, joten niiden kosinit ovat samat. Vastakulmilla on sama kosini, joten piste D on kulman $\frac{\pi}{3}$ vastakulman kehäpiste. Koska vastakulmien sinit ovat toistensa vastaluvut, pisteen D y-koordinaatti on pisteen A y-koordinaatin vastaluku.

Siis $D=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Pisteen *C* *x*-koordinaatti on sama kuin pisteellä *B*, joten niiden kosinit ovat samat. Vastakulmilla on sama kosini, joten piste *C* on pistettä *B* vastaavan kulman vastakulman kehäpiste. Koska vastakulmien sinit ovat toistensa vastaluvut, pisteen *C* *y*-koordinaatti on pisteen *B* *y*-koordinaatin vastaluku.
Siis $D=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Tehtävänannon mukaan pistettä *A* vastaa kulma $\frac{\pi}{3}$.

Pistettä *B* vastaa kulman *A* suplementtikulma $\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

Pistettä *C* vastaa pisteen *B* vastakulma $-\frac{2\pi}{3}$. Tämä ei ole pyydetyllä välillä. Samaa pistettä vastaa pyydetyn välin kulma $-\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{4\pi}{3}$.

Pistettä *D* vastaa pisteen *A* vastakulma $-\frac{\pi}{3}$. Tämä ei ole pyydetyllä välillä. Samaa pistettä vastaa pyydetyn välin kulma $-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$.

b) $P=(\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})=(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$Q=(\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3})=(\frac{2\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$R=(\frac{4\pi}{3},\sin\frac{4\pi}{3})=(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$Q=(\frac{5\pi}{3},\sin\frac{5\pi}{3})=(\frac{5\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

630. a) Merkitään vektorin päätepistettä kirjaimella *B*, jolloin saadaan

$$\overline{OB} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{i} + \sin(-\frac{\pi}{2})\overline{j} = 4\overline{i} + 2\overline{j} - 1\overline{j} = 4\overline{i} + \overline{j}$$

Vektorin päätepiste on siis (4, 1)

b) Merkitään vektorin päätepistettä kirjaimella *B*, jolloin saadaan

$$\overline{OB} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{i} + \sin\frac{\pi}{3}\overline{j} = 4\overline{i} + 2\overline{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{j} = 4\overline{i} + (2 + \frac{\sqrt{3}}{2})\overline{j}$$

Vektorin päätepiste on siis $(4, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

c) Merkitään vektorin päätepistettä kirjaimella *B*, jolloin saadaan

$$\overline{OB} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{i} + \sin t\,\overline{j} = 4\overline{i} + (2 + \sin t)\overline{j}$$

Päätepisteen *x*-koordinaatti on siis koko ajan 4.

Koska $0 \le t \le 2\pi$, sin *t* käy läpi kaikki arvo väliltä [−1, 1].
Tämän arvon muuttuminen vaikuttaa vain pisteen *B* *y*-koordinaattiin, joka on siis välillä [2 −1, 2 + 1] = [1, 3].

Vektorin päätepiste on siis pisteiden (4, 1) ja (4, 3) välisellä janalla.

631. **a)** Funktio on määritelty, kun $x + 2 \neq 0$, eli kun $x \neq -2$.

$$\frac{2x^2+8x+8}{x+2}=\frac{2(x^2+4x+4)}{x+2}=\frac{2(x+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+2}}=2(x+2)=2x+4$$

Funktio f ei ole määritelty, kun $x = -2$, ja $2 \cdot (-2) + 4 = 0$, joten suoran piste $(-2, 0)$ ei ole funktion f kuvaajalla.

b) Funktio on määritelty, kun $x - 1 \neq 0$, eli kun $x \neq 1$ ja kun $x \geq 0$ ja kun $\sqrt{x}+1\neq 0$. Kaikki ehdot toteutuvat väleillä $0 \leq x < 1$ ja $x > 1$.

$$\frac{3x-3\sqrt{x}}{x-1}+{}^{\sqrt{x}-1)}\frac{3}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{3x-3\sqrt{x}}{x-1}+\frac{3(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$
$$=\frac{3x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3}{x-1}$$
$$=\frac{3x-3}{x-1}$$
$$=\frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$
$$=3$$

Funktio f on määritelty kun $0 \leq x < 1$ ja $x > 1$, joten piste $(1, 3)$ ei ole suoralla, eikä yksikään piste $(x, 3)$, jossa $x \leq 0$.

632. Koska lausekkeen halutaan olevan määritelty täsmälleen silloin kun $x \leq 3$, on juurrettavan oltava ei-negatiivinen tällä välillä. Koska $3 - x \geq 0$ tällä välillä, eräs tehtävänannon määrittelyehdon täyttävä funktio on $f(x) = \sqrt{3-x} + c$.

Etsitään sitten vakiolle c sellainen arvo, että funktio f täyttää myös ehdon $f(1) = 2$.

$$\sqrt{3-1} + c = 2$$
$$c = 2 - \sqrt{2}$$

Voidaan siis valita $f(x) = \sqrt{3-x} + 2 - \sqrt{2}$.

Toinen tapa:
Merkitään $f(x) = \sqrt{ax+b}$. Määritetään vakioiden a ja b arvot, siten, että funktio täyttää tehtävänannon ehdot.

$f(1) = \sqrt{a+b} = 2$, joten on oltava $a + b = 4$, eli $b = 4 - a$.
Siis $f(x) = \sqrt{ax + 4 - a}$.

Funktio f on määritelty kun $ax + 4 - a \geq 0$ eli kun $ax \geq a - 4$.
Tämän epäyhtälön ratkaisun halutaan olevan $x \leq 3$. On siis oltava $a < 0$.
Nyt saadaan jakamalla luvulla a

$$ax \geq a - 4 \quad \| : a < 0$$
$$x \leq 1 - \frac{4}{a}.$$

Näin ollen saadaan yhtälö $1 - \frac{4}{a} = 3$, jonka ratkaisu on $a = -2$.

Voidaan siis valita $f(x) = \sqrt{-2x + 6}$.

633. **a)** Rationaalifunktion nollakohdat on ne osoittajan nollakohdat, joissa lauske on määritelty. Määritetään $12x^2 + 17x - 5$ nollakohdat.

Yhtälön $12x^2 + 17x - 5 = 0$ ratkaisu on $x = -\frac{5}{3}$ tai $x = -\frac{1}{4}$.

Funktiolla f on siis yksi nollakohta silloin, kun funktiota ei ole määritelty jommallakummalla näistä luvuista eli kun jompikumpi on nimittäjän g nollakohta.

Eräs tämän ehdon täyttävä funktio on $g(x) = x + \frac{5}{3}$.

b) Jotta funktion f kuvaajan pisteet ovat suoralla, osoittaja ja nimittäjä pitää pystyä supistamaan samalla ensimmäisen asteen polynomilla.

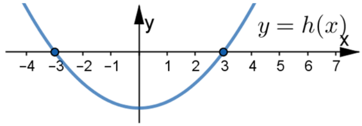
$$f(x) = \frac{12x^2 + 17x - 5}{g(x)} = \frac{12x^2 + 17x - 5}{g(x)} = \frac{(3x+5)(4x-1)}{g(x)}$$

Jos nimittäjäksi valitaan $3x + 5$, niin silloin lauseke sievennee muotoon $4x - 1$, mutta tämän kulmakerroin on positiivinen. Valitaan siis $g(x) = -(3x + 5)$, jolloin saadaan

$$f(x) = \frac{12x^2 + 17x - 5}{-(3x+5)} = \frac{(3x+5)(4x-1)}{-(3x+5)} = -4x + 1.$$

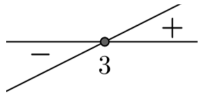
Voidaan siis valita erimerkiksi $g(x) = -(3x + 5) = -3x - 5$

c) Osoittaja on aina määritelty, joten se ei vaikuta funktion f määrittelyjoukkoon. Etsitään siis nimittäjään lauseke, jolla saadaan haluttu ehto.



Etsitään nimittäjä juurimuotoisesta lausekkeesta: $g(x) = \sqrt{h(x)}$, jolle $h(x) > 0$ kun $x > 3$ ja kun $x < -3$.
Eräs tällainen funktio on ylöspäin aukeava paraabeli $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$.
Voidaan siis valita $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

d) Etsitään nimittäjä juurimuotoisesta lausekkeesta:
$g(x) = \sqrt{h(x)}$, jolle $h(x) > 0$ kun $x > 3$.
Eräs tällainen funktio $x - 3$.



Voidaan siis valita $g(x) = \sqrt{x-3}$.

634. **a)** $e^{\sin x} = e$
$e^{\sin x} = e^1$
$\sin x = 1$ || sini on kehäpisteen y-koordinaatti
$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

b) $e^{\sin x} = 1$
$e^{\sin x} = e^0$
$\sin x = 0$ || sini on kehäpisteen y-koordinaatti
$x = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Toinen tapa:
$e^{\sin x} = 1$
$e^{\sin x} = e^0$
$\sin x = 0$ || sini on kehäpisteen y-koordinaatti
$x = 0 + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - 0 + n \cdot 2\pi$
$x = n \cdot 2\pi$ $\quad$ $x = \pi + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

c) $2^{\cos x} = 0{,}5$
$2^{\cos x} = \frac{1}{2}$
$2^{\cos x} = 2^{-1}$
$\cos x = -1$ || kosini on kehäpisteen x-koordinaatti
$x = \pi + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

d) $2^{\cos x} = 4$
$2^{\cos x} = 2^2$
$\cos x = 2$

Koska aina $-1 \le \cos x \le 1$, yhtälöllä ei ole ratkaisua.

635. **a)** $f(3x) = \log_3 (3x) = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \log_3 x = 1 + f(x) = f(x) + 1$

b) $1 < f(x) < 2$
$1 < 1 + e^{-x} < 2$
$0 < \quad e^{-x} \quad < 1$
Eksponenttifunktiona aina $e^{-x} > 0$. Riittää siis osoittaa, että $e^{-x} < 1$, kun $1 < x < 2$.

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Koska $e = 2,7\ldots.$ ja $1 < x < 2$, niin $e^x > e$ tällä välillä. Näin ollen osoittaja ja nimittäjä ovat molemmat positiivisia, ja nimittäjä on osoittajaa suurempi. Siis $\frac{1}{e^x} < 1.$

636. **a)** Epäyhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $4x - 1 \geq 0$, eli kun $4x \geq 1$, josta edelleen $x \geq \frac{1}{4}$. Tällöin epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiiviset ja puolittain neliöön korotetulla epäyhtälöllä on samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöllä.

$$\begin{aligned} \sqrt{4x-1} &\geq 3 \\ 4x-1 &\geq 9 \\ 4x &\geq 10 \quad \| :4 \\ x &\geq \frac{10}{4} \\ x &\geq \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Kaikki nämä luvut toteuttavat ehdon $x \geq \frac{1}{4}$, joten epäyhtälön ratkaisu on $x \geq \frac{5}{2}$.

b) Epäyhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $1 - 2x \geq 0$, eli kun $2x \leq 1$, josta edelleen $x \leq \frac{1}{2}$. Tällöin epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiiviset ja puolittain neliöön korotetulla epäyhtälöllä on samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöllä.

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2x} &< 2 \\ 1-2x &< 4 \\ -2x &< 3 \quad \| :(-2) \\ x &> -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Näistä luvuista kaikki eivät toteuta ehtoa $x \leq \frac{1}{2}$. Tämä ehto huomioiden saadaan epäyhtälön ratkaisuksi $-\frac{3}{x} < x \leq \frac{1}{2}$.

c) Neliöjuuren arvo on aina ei-negatiivinen, joten epäyhtälöllä $\sqrt{x^2-7} < -2$ ei ole ratkaisua.

637. **a)** $\cos 2x = 1$ || kosini on kehäpisteen x-koordinaatti

$$2x = n \cdot 2\pi \quad \|:2$$
$$x = n \cdot \pi \quad , n \in \mathbb{Z}$$

Näistä välillä [2π, 3π] ovat 2π ja 3π.

b)
$$\tan(x+\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \quad , n \in \mathbb{Z}$$

Tämä tarkoittaa kulmia

$$\ldots, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \pi = 1\frac{1}{6}\pi, \frac{\pi}{6} + 2\pi = 2\frac{1}{6}\pi, \frac{\pi}{6} + 3\pi = 3\frac{1}{6}\pi, \ldots$$

Näistä välillä [2π, 3π] on $2\frac{1}{6}\pi$

Toinen tapa

$$\tan(x+\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$x + \pi = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$$
$$x = -\frac{5\pi}{6} + n \cdot \pi \quad , n \in \mathbb{Z}$$

$$\ldots, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{1}{6}\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = 1\frac{1}{6}\pi, -\frac{5\pi}{6} + 3\pi = 2\frac{1}{6}\pi,$$
$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi = 3\frac{1}{6}\pi, \ldots$$

Näistä välillä [2π, 3π] on $2\frac{1}{6}\pi$

c) Yhtälön korottaminen puolittain kolmanteen potenssiin ei vaikuta sen ratkaisuihin

$$\sqrt[3]{1+\sin 2x} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2} \quad \| ()^3$$

$$1+\sin 2x = \frac{12}{8}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \quad \| :2 \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi \quad \| :2$$

$$x = \frac{\pi}{12} + n\cdot \pi$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + n\cdot \pi \quad , n \in \mathbb{Z}$$

Taulukoidaan kulmia, että löydetään välillä [2π, 3π] olevat ratkaisut.

n	$x = \frac{\pi}{12} + n\cdot\pi$	$x = \frac{5\pi}{12} + n\cdot\pi$
0	$x = \frac{\pi}{12}$	$x = \frac{5\pi}{12}$
1	$x = \frac{\pi}{12} + \pi = 1\frac{1}{12}\pi$	$x = \frac{5\pi}{12} + \pi = 1\frac{5}{12}\pi$
2	$x = \frac{\pi}{12} + 2\pi = 2\frac{1}{12}\pi$	$x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi = 2\frac{5}{12}\pi$
3	$x = \frac{\pi}{12} + 3\pi = 3\frac{1}{12}\pi$	$x = \frac{5\pi}{12} + 3\pi = 3\frac{5}{12}\pi$

Välillä [2π, 3π] ovat siis ratkaisut $x = 2\frac{1}{12}\pi$ ja $x = 2\frac{5}{12}\pi$.

638. **a)** Neliöjuuri on määritelty, kun $1-x \geq 0$ eli kun $x \leq 1$.
Juuren arvo on ei-negatiivinen, kun $x - 1 \geq 0$, eli kun $x \geq 1$.
Molemmat ehdot toteutuvat vain, kun $x = 1$.

Kun $x = 1$, saadaan

$$
\begin{aligned}
1-1 &= \sqrt{1-1} \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Yhtälön ratkaisu on siis $x = 1$.

Toinen tapa:
Korotetaan yhtälön molemmat puolet neliöön.

$$
\begin{aligned}
x-1 &= \sqrt{1-x} \\
(x-1)^2 &= 1-x \\
x^2-2x+1 &= 1-x \\
x^2-x &= 0 \\
x(x-1) &= 0 \\
x = 0 \quad &\text{tai} \quad x = 1
\end{aligned}
$$

Tarkistetaan, toteuttavatko ratkaisuehdokkaan alkuperäisen yhtälön.

x	$x - 1$	$\sqrt{1-x}$	
0	$0 - 1 = -1$	$\sqrt{1-0} = 1$	ei toteuta
1	$1 - 1 = 0$	$\sqrt{1-1} = 0$	toteuttaa

Yhtälön ratkaisu on siis $x = 1$.

b) Neliöjuuri on määritelty, kun $1-x \geq 0$ eli kun $x \leq 1$.
Juuren arvo on ei-negatiivinen, kun $|x-1| \geq 0$. Tämä toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.
Molemmat ehdot toteutuvat, vain kun $x \leq 1$.
Korotetaan yhtälö puolittain neliöön.

$$
\begin{aligned}
|x-1| &= \sqrt{1-x} \\
(x-1)^2 &= 1-x \\
x^2-2x+1 &= 1-x \\
x^2-x &= 0 \\
x(x-1) &= 0 \\
x = 0 \quad &\text{tai} \quad x-1 = 0 \\
& \qquad\quad\; x = 1
\end{aligned}
$$

Molemmat luvut toteuttavat ehdon $x \leq 1$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 0$ tai $x = 1$.

Toinen tapa:
Korotetaan yhtälön molemmat puolet neliöön.

$$
\begin{aligned}
|x-1| &= \sqrt{1-x} \\
(x-1)^2 &= 1-x \\
x^2-2x+1 &= 1-x \\
x^2-x &= 0 \\
x(x-1) &= 0 \\
x = 0 \quad &\text{tai} \quad x-1 = 0 \\
& \qquad\quad\; x = 1
\end{aligned}
$$

Tarkistetaan, toteuttavatko ratkaisuehdokkaan alkuperäisen yhtälön.

x	$\lvert x-1\rvert$	$\sqrt{1-x}$	
0	$\lvert 0-1\rvert = 1$	$\sqrt{1-0} = 1$	toteuttaa
1	$\lvert 1-1\rvert = 0$	$\sqrt{1-1} = 0$	toteuttaa

Yhtälön ratkaisu on siis $x = 0$ tai $x = 1$.

c) Neliöjuuri on määritelty, kun $1 - x \geq 0$ eli kun $x \leq 1$. Yhtälöllä voi siis olla ratkaisuja vain, kun $x \leq 1$.

$$(1+\sqrt{1-x})^2 = 4$$

$$1+\sqrt{1-x} = 2 \quad \text{tai} \quad 1+\sqrt{1-x} = -2$$

$$\sqrt{1-x} = 1 \qquad\qquad \sqrt{1-x} = -3$$

Yhtälössä $\sqrt{1-x} = 1$ molemmat puolet ovat ei-negatiiviset, joten se voidaan korottaa puolittain toiseen, kun $x \leq 1$.

$$\sqrt{1-x} = 1$$

$$1-x = 1$$

$$x = 0$$

Tämä toteuttaa ehdon $x \leq 1$, joten se on alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Koska juuren arvo on aina ei-negatiivinen, yhtälöllä $\sqrt{1-x} = -3$ ei ole ratkaisuja.

Siis yhtälön $(1+\sqrt{1-x})^2 = 4$ ratkaisu on $x = 0$.

Toinen tapa:

$$(1+\sqrt{1-x})^2 = 4$$

$$1+\sqrt{1-x} = 2 \quad \text{tai} \quad 1+\sqrt{1-x} = -2$$

$$\sqrt{1-x} = 1 \qquad\qquad \sqrt{1-x} = -3$$

$$1-x = 1 \qquad\qquad \text{ei ratkaisua}$$

$$x = 0$$

Tarkistetaan toteuttaako ratkaisuehdokas $x = 0$ alkuperäisen yhtälön.

$$(1+\sqrt{1-0})^2 = (1+1)^2 = 2^2 = 4$$

Siis yhtälön ratkaisu on $x = 0$.

639. **a)** Kantaluvun k tulee toteuttaa ehto $k > 0$, $k \neq 1$.

$$\log_k 12 = \log_k 3 + 1$$
$$\log_k 12 - \log_k 3 = 1$$
$$\log_k \frac{12}{3} = 1$$
$$\log_k 4 = 1$$
$$4 = k^1$$
$$k = 4$$

Tämä luku toteuttaa ehdon $k > 0$, $k \neq 1$.
Siis $k = 4$.

Toinen tapa:
Kantaluvun k tulee toteuttaa ehto $k > 0$, $k \neq 1$.
$\log_k 3 + 1 = \log_k 3 + \log_k k = \log_k 3k$
Siis
$$\log_k 12 = \log_k 3k$$
$$12 = 3k \quad \|:3$$
$$4 = k$$

Tämä luku toteuttaa ehdon $k > 0$, $k \neq 1$.
Siis $k = 4$.

b) Kantaluvun k tulee toteuttaa ehto $k > 0$, $k \neq 1$.
$$\log_k 25 = -2$$
$$25 = k^{-2}$$
$$25 = \frac{1}{k^2} \quad \| \cdot \frac{k^2}{25} \neq 0$$
$$k^2 = \frac{1}{25}$$
$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{25}}$$
$$k = \pm\frac{1}{5}$$
Kun otetaan huomioon ehto $k > 0$, $k \neq 1$,saadaan vastaukseksi $k = \frac{1}{5}$.

Toinen tapa:
$$\log_k 25 = \log_k 5^2 = \log_k (\frac{1}{5})^{-2}$$
Koska $\log_k (\frac{1}{5})^{-2} = -2$, on oltava $k = \frac{1}{5}$.

640. **a)** $e^x > 0$ kaikilla muuttujan $x$arvoilla, joten $e^x + a > 0$ aina kun $a > 0$.
Koska positiivisten lukujen tulo on aina positiivinen, tulo
$(e^x + 1)(e^x + 2)(e^x + 3) \cdot \ldots \cdot (e^x + 100)$ on arvoltaan positiivinen.

b) $e^x + 1$ on aina positiivinen, joten tulon merkki riippuu vain lausekkeen $e^x - e^2$ merkistä.

Koska e^x on kasvava $e^x < e^2$ kun $x < 2$, ja niin tällöin $e^x - e^2 < 0$.
Positiivisen ja negatiivisen luvun tulo on negatiivinen, joten tulo
$(e^x + 1)(e^x - 2)$ on negatiivinen, kun $x < 2$.

641. **a)**

$$e^{2x} > 3e^x$$
$$(e^x)^2 - 3e^x > 0$$
$$e^x(e^x - 3) > 0$$

Koska $e^x > 0$ aina, tulo on positiivinen täsmälleen silloin, kun $e^x - 3 > 0$.

$$e^x - 3 > 0$$
$$e^x > 3 \quad \| \; e^x \text{ on kasvava}$$
$$x > \ln 3$$

Toinen tapa

$$e^{2x} > 3e^x \quad \| : e^x > 0$$
$$e^x > 3 \quad \| \; e^x \text{ on kasvava}$$
$$x > \ln 3$$

b) Muokataan alempaa yhtälöä.

$$2^x = 8^y$$
$$2^x = (2^3)^y$$
$$2^x = 2^{3y}$$
$$x = 3y$$

Sijoitetaan tämä ylempään yhtälöön.

$$x + 2y = 4$$
$$3y + 2y = 4$$
$$5y = 4 \quad \| : 5$$
$$y = \frac{4}{5}$$

Nyt $x = 3y = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$.

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $x = \frac{12}{5}$ ja $y = \frac{4}{5}$.

642. **a)**

$$\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}+2}$$
$$=\sqrt{(e^x)^2+2+(e^{-x})^2}$$
$$=\sqrt{(e^x)^2+2\cdot 1+(e^{-x})^2}$$
$$=\sqrt{(e^x)^2+2\cdot e^0+(e^{-x})^2}$$
$$=\sqrt{(e^x)^2+2\cdot e^{x-x}+(e^{-x})^2}$$
$$=\sqrt{(e^x)^2+2\cdot e^x\cdot e^{-x}+(e^{-x})^2}$$
$$=\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}$$
$$=|e^x+e^{-x}|$$
$$=e^x+e^{-x},\ \text{sillä } e^x+e^{-x}>0$$

Toinen tapa:
$\sqrt{a}=b$ täsmälleen silloin, kun $a \geq 0$ ja $b \geq 0$ ja $b^2 = a$.

Koska $e^y > 0$ kaikilla y, niin $e^{2x}+e^{-2x}+2>0$ ja $e^x+e^{-x}>0$.

$$(e^x+e^{-x})^2$$
$$=(e^x)^2+2\cdot e^x\cdot e^{-x}+(e^{-x})^2$$
$$=e^{2x}+2\cdot e^0+e^{-2x}$$
$$=e^{2x}+2\cdot 1+e^{-2x}$$
$$=e^{2x}+e^{-2x}+2$$

b) Jos $a = 0$, funktiota f ei ole määritelty, kun $x = 0$. Siis on oltava $x \neq 0$.

$$f(x+1) = 2f(x)$$
$$a^{x+1} = 2 \cdot a^x$$
$$a^x \cdot a^1 = 2 \cdot a^x \quad \|\ : a^x \neq 0$$
$$a = 2$$

Yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla, kun $a = 2$.

643. Matti vaihtoi ratkaistavan kulman kesken ratkaisun.

$$\sin \boxed{3x} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x} = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ tai } \boxed{x} = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

Teppo unohti jakaa kaikki termit jakaessaan kolmella

$$3x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \boxed{2\pi} \quad \text{tai } 3x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot \boxed{2\pi}$$

$$x = \frac{\pi}{18} + n \cdot \boxed{2\pi} \text{ tai } \quad x = \frac{5\pi}{18} + n \cdot \boxed{2\pi}$$

Oikea ratkaisu

$$2\sin 3x - 1 = 0$$

$$\sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$3x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai } 3x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad x = \frac{5\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

644.

$$\sqrt[3]{x\sqrt{x+1} + x}\sqrt[3]{x\sqrt{x+1} - x}$$

$$= \sqrt[3]{(x\sqrt{x+1} + x)(x\sqrt{x+1} - x)}$$

$$= \sqrt[3]{(x\sqrt{x+1})^2 - x^2)}$$

$$= \sqrt[3]{x^2(x+1) - x^2)}$$

$$= \sqrt[3]{x^3 + x^2 - x^2}$$

$$= \sqrt[3]{x^3}$$

$$= x$$

645. **a)** Vakio $A > 0$ on ainoa joka vaikuttaa funktion f arvojoukkoon. Funktion f arvojoukko on $[-A, A]$.

Vakio C on ainoa, joka vaikuttaa funktion f perusjaksoon. Funktion f perusjakso on $\frac{2\pi}{C}$.

Vakio $A > 0$ skaalaa kuvaajaa pystysuunnassa korkeammaksi tai matalammaksi. Se ei siirrä kuvaaja, ainoastaan venyttää tai kutistaa.

Vakio C skaalaa kuvaavaa vaakasuunnassa, eli tihentää tai harventaa sinifunktion kuvaajan heilahtelua.

Vakio D siirtää kuvaajaa vaakasuunnassa.

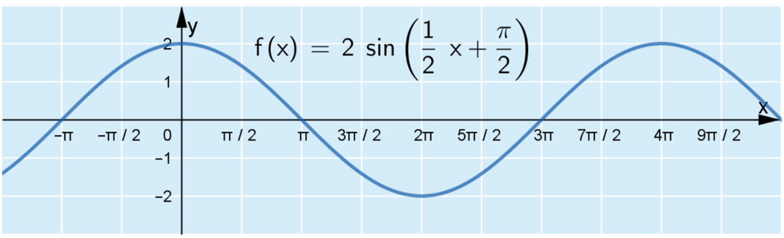
b) Koska funktion f arvojoukko on $[-2, 2]$, voidaan valita $A = 2$

Koska funktion f perusjakso on 4π, saadaan $\frac{2\pi}{C} = 4\pi$, minkä perusteella $C = \frac{1}{2}$.

Siis tähän asti on saatu $f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + D)$.

Valitaan sopiva D sen tiedon avulla, että $f(0) = 2$.
$f(0) = 2\sin(D) = 2$ täsmälleen silloin, kun $\sin D = 1$. Valitaan siis $D = \frac{\pi}{2}$.

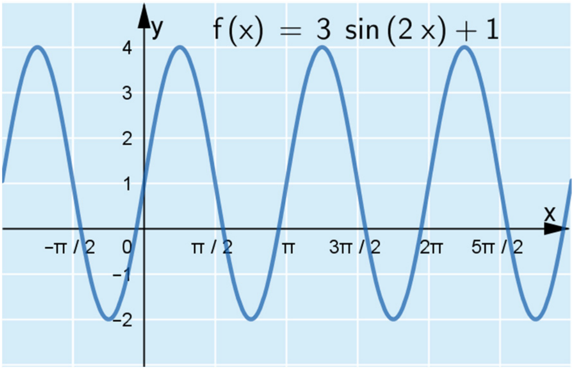
Tarkistetaan vielä piirtämällä, että näin muodostetun funktion $f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$ kuvaaja on sama kuin tehtävänannon kuvassa.



c) $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \| \cdot 3$
$-3 \leq 3\sin x \leq 3 \quad \| + 1$
$-2 \leq 3\sin x + 1 \leq 4$

Perusjakso π saadaan kertomalla muuttuja x kahdella.
Voidaan siis valita $f(x) = 3\sin 2x + 1$.

Tarkistetaan tämä vielä kuvan avulla.



646. **a)** Kerroin 3 ei vaikuta kosinifunktion perusjaskoon, joten se on 2π.
$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \| \cdot 3$
$-3 \leq 3\cos x \leq 3$

Arvojoukko on $[-3, 3]$.

b) Kerroin 2 puolittaa sinifunktion perusjakson 2π, joten perusjakso on π.
$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \quad \| + 1$
$0 \leq 1 + \sin 2x \leq 2$

Arvojoukko on $[0, 2]$.

c) Kerroin 3 lyhentää kosinifunktion perusjakson 2π kolmasosaan joten perusjakso on $\frac{2\pi}{3}$.

$-1 \leq \cos 3x \leq 1 \quad \| \cdot 2$
$-2 \leq 2\cos 3x \leq 2 \quad \| + 4$
$2 \leq 2\cos 3x + 4 \leq 6$

Arvojoukko on $[2, 6]$.

647. a)

$$\sin 2x = -\sin x$$
$$2\sin x \cos x + \sin x = 0$$
$$\sin x(2\cos x + 1) = 0$$
$$\sin x = 0 \quad \text{tai } 2\cos x + 1 = 0$$
$$x = n \cdot \pi \qquad \cos x = -\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ tai } x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

Taulukoidaan ratkaisuja

n	$x = \pi + n \cdot 2\pi$	$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$	$x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$
0	π	$\frac{2\pi}{3}$	…
1	3π	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi = 2\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = 1\frac{1}{3}\pi$
2	…	…	$-\frac{2\pi}{3} + 4\pi = 3\frac{1}{3}\pi$

Välilllä $]\pi, 2\pi[$ on siis ratkaisu $x = 1\frac{1}{3}\pi$.

Toinen tapa

$\sin 2x = -\sin x$

$\sin 2x = \sin(-x)$

$2x = -x + n \cdot 2\pi$ tai $2x = \pi - (-x) + n \cdot 2\pi$

$3x = n \cdot 2\pi \quad \| :3 \qquad x = \pi + n \cdot 2\pi$

$x = n \cdot \dfrac{2\pi}{3} \qquad , n \in \mathbb{Z}$

Taulukoidaan ratkaisuja

n	$x = n \cdot \dfrac{2\pi}{3}$	$x = \pi + n \cdot 2\pi$
0	…	π
1	$1 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2}{3}\pi$	3π
2	$2 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{4}{3}\pi = 1\dfrac{1}{3}\pi$	…
3	$2 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = 2\pi$	…

Välilllä $]\pi, 2\pi[$ on siis ratkaisu $x = 1\dfrac{1}{3}\pi$.

b) $\cos x + \cos 2x = 0$

$\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$ || merkitään $\cos x = t$

$t + 2t^2 - 1 = 0$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$t = -1 \text{ tai } t = \frac{1}{2}$$

$t = -1$ | $t = \frac{1}{2}$

$\cos x = -1$ | $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pi + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ | $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

Taulukoidaan ratkaisuja

n	$x = \pi + n \cdot 2\pi$	$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$	$x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$
0	π	$\frac{\pi}{3}$	…
1	3π	$\frac{\pi}{3} + 2\pi = 2\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{3} + 2\pi = 1\frac{2}{3}\pi$
2	…	…	$-\frac{\pi}{3} + 4\pi = 3\frac{2}{3}\pi$

Välilllä $]\pi, 2\pi[$ on siis ratkaisu $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

Toinen tapa:

$\cos x + \cos 2x = 0$

$\cos 2x = -\cos x$

$\cos 2x = \cos(\pi - x)$

$2x = \pi - x + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 2x = -(\pi - x) + n \cdot 2\pi$

$3x = \pi + n \cdot 2\pi \ \| : 3 \qquad x = -\pi + n \cdot 2\pi$

$x = \dfrac{\pi}{3} + n \cdot \dfrac{2\pi}{3} \qquad , n \in \mathbb{Z}$

Taulukoidaan ratkaisuja

n	$x = -\pi + n \cdot 2\pi$	$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$
0	$-\pi$	$\frac{\pi}{3}$
1	π	$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$
2	3π	$\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = 1\frac{2}{3}\pi$
3	…	$\frac{\pi}{3} + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} = 2\frac{1}{3}\pi$

Välilllä $]\pi, 2\pi[$ on siis ratkaisu $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

c) $\cos x + \sin 2x = 0$

$\cos x + 2\sin x \cos x = 0$

$\cos x(1 + 2\sin x) = 0$

$\cos x = 0$ tai $1 + 2\sin x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ $\quad \sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Taulukoidaan ratkaisuja

n	$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$	$x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$	$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$
-1	…	$\frac{7\pi}{6} + 2\pi = 1\frac{1}{6}\pi - 2\pi = -\frac{5}{6}\pi$	…
0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6} = 1\frac{1}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{2} + \pi = 1\frac{1}{2}\pi$	$\frac{7\pi}{6} + 2\pi = 1\frac{1}{6}\pi + 2\pi = 3\frac{1}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{6} + 2\pi = 1\frac{5}{6}\pi$
2	$\frac{\pi}{2} + 2\pi = 2\frac{1}{2}\pi$	…	$-\frac{\pi}{6} + 4\pi = 3\frac{5}{6}\pi$

Välilllä]π, 2π[on siis ratkaisut $x = 1\frac{1}{2}\pi$, $x = 1\frac{1}{6}\pi$ ja $x = 1\frac{5}{6}\pi$.

648. **a)**

$$\tan 2x + \tan(\frac{\pi}{3} - x) = 0$$

$$\tan 2x = \tan(-(\frac{\pi}{3} - x))$$

$$\tan 2x = \tan(x - \frac{\pi}{3})$$

$$2x = x - \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$

$$\cos x = -\sqrt{3}\sin x$$

Sini ja kosini eivät saa arvoa nolla yhtä aikaa, joten yhtälö ei toteudu silloin, kun $\cos x = 0$.

$$\cos x = -\sqrt{3}\sin x \quad \|: \cos x \neq 0$$

$$1 = -\sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 = -\sqrt{3}\tan x \quad \|: (-\sqrt{3})$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

c)

$$\sin x = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - (-2x))$$

$$\sin x = \sin(-2x)$$

$$x = -2x + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - (-2x) + n \cdot 2\pi$$

$$3x = n \cdot 2\pi \quad \|:3 \qquad -x = \pi + n \cdot 2\pi \quad \|: (-1)$$

$$x = n \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad x = -\pi - n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

(Ratkaisu $x = -\pi - n \cdot 2\pi$ voidaan kirjoittaa myös muodossa $x = \pi + n \cdot 2\pi$)

649. **a)** Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x > 0$.

$$(1 + \ln x)^2 = 1$$
$$1 + \ln x = 1 \quad \text{tai} \quad 1 + \ln x = -1$$
$$\ln x = 0 \qquad \ln x = -2$$
$$x = e^0 \qquad x = e^{-2}$$
$$x = 1$$

Molemmat luvut toteuttavat ehdon $x > 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 1$ tai $x = e^{-2}$.

b) Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x^3 > 0$ ja kun $x^5 > 0$. Nämä ehdot toteutuvat täsmälleen silloin, kun $x > 0$.

$$\ln x^3 - \ln x^5 + 1 = 0$$
$$3 \ln x - 5 \ln x + 1 = 0$$
$$-2 \ln x = -1 \quad \| : (-2)$$
$$\ln x = \frac{1}{2}$$
$$x = e^{\frac{1}{2}}$$
$$x = \sqrt{e}$$

Luku toteuttaa ehdon $x > 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = \sqrt{e}$.

Toinen tapa:
Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x^3 > 0$ ja kun $x^5 > 0$. Nämä ehdot toteutuvat täsmälleen silloin kun $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\ln x^3 - x^5 + 1 &= 0 \\
\ln \frac{x^3}{x^5} &= -1 \\
\ln x^{-2} &= -1 \\
x^{-2} &= e^{-1} \\
\frac{1}{x^2} &= \frac{1}{e} \quad \| \text{kerrotaan ristiin, } x \neq 0 \\
x^2 &= e \\
x &= \pm\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Vai positiivinen vaihtoehto toteuttaa ehdon $x > 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = \sqrt{e}$.

c)

$$\begin{aligned}
9\tan^2 x - 3 &= 0 \\
9\tan^2 x &= 3 \quad \| :9 \\
\tan^2 x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\tan x = \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad \text{tai} \qquad \tan x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad\qquad \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \qquad\qquad x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

650. Kun $\ln a = \frac{b}{a} + 7$, niin silloin $a = e^{\frac{b}{2}+7}$.

Kun luku b nyt kasvaa yhdellä lukuun $b + 1$, niin luku $e^{\frac{b}{2}+7}$ muuttuu luvuksi

$$e^{\frac{b+1}{2}+7} = e^{\frac{b}{2}+\frac{1}{2}+7} = e^{\frac{1}{2}+\frac{b}{2}+7} = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{b}{2}+7} = \sqrt{e} \cdot e^{\frac{b}{2}+7} = \sqrt{e} \cdot a.$$

Luku a muuttuu siis $\sqrt{e}$ -kertaiseksi.

651. **a)** $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$

$\sin x(\sin x + \cos x) = 0$

$\sin x = 0 \quad \text{tai} \quad \sin x + \cos x = 0$

$x = n \cdot \pi \qquad \sin x = -\cos x \parallel \cos x \neq 0$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1$$

$$\tan x = -1$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

b) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0 \parallel$ merkitään $\sin x = t$

$2t^2 + 3t + 1 = 0$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$t = -1 \quad \text{tai} \quad t = -\frac{1}{2}$$

$t = -1 \qquad t = -\frac{1}{2}$

$\sin x = -1 \qquad \sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi \qquad x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ tai } x = \pi - \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

$$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

652. **a)** Luvut ovat niin isoja, että niitä ei voida verrata ottamalla likiarvot laskimella. Koska logaritmifunktio ln x on kasva, ln a < ln b täsmälleen silloin, kun $a < b$. Verrataan siis lukujen logaritmeja.

$\ln e^{1000} = 1000$
$\ln 3^{9876} = 9876 \ln 3 = 10849{,}8\ldots$

Siis luku B on suurempi.

Toinen tapa.
Luvut ovat niin isoja, että niitä ei voida verrata ottamalla likiarvot laskimella. Lukuja voidaan nyt verrata kirjoittamlala ne saman kantalvuun avulla. Käyteään kantalukua e.

$A = e^{1000}$
$B = 3^{9876} = (e^{\log_e 3})^{9876} = (e^{\ln 3})^{9876} = e^{9876 \cdot \ln 3}$
Eksponentissa olevan luvun likiarvo voidaan nyt laskea laskimella.
$B = 3^{9876} = e^{9876 \cdot \ln 3} = e^{10849{,}8\ldots}$

Koska eksponenttifunktio e^x on kasvava, niin $e^{10849{,}8\ldots} > e^{10000}$.
Siis luku B on suurempi.

b) Luvut ovat niin isoja, että niitä ei voida verrata ottamalla likiarvot laskimella. Koska logaritmifunktio ln x on kasva, ln a < ln b täsmälleen silloin kun $a < b$. Verrataan siis lukujen logaritmeja.

$\ln 6^{\sqrt{70000}} = \sqrt{70000} \ln 6 = 1499{,}0\ldots$
$\ln 7^{\sqrt{60000}} = \sqrt{60000} \ln 7 = 1507{,}3\ldots$

Siis luku B on suurempi.

653. Koska $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, saadaan $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

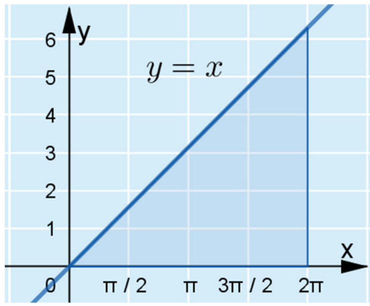
$f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + 2 = \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) + 2 = 2\sin^2 x + 1$

$$\begin{aligned}
-1 \leq \quad \sin x \quad &\leq 1 \\
0 \leq \quad \sin^2 x \quad &\leq 1 \quad \| \cdot 2 \\
0 \leq 2\sin^2 x \quad &\leq 2 \quad \| + 1 \\
1 \leq 2\sin^2 x + 1 &\leq 3
\end{aligned}$$

Siis funktion f arvot eivät laita lukua 1 tai ylitä lukua 3.

$f(x) = 1$ täsmälleen silloin, kun $\sin^2 x = 0$, eli kun $\sin x = 0$. Näin käy kun $x = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

654. Integraalilla pinta-ala olisi $\int_0^{2\pi} (\sin x + x - \sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} x\mathrm{d}x.$ Tämä sievennetty määrätty integraali kertoo välillä $[0, 2\pi]$ positiivisia arvoja saavan funktion x ja x-akselin välillä $[0, 2\pi]$ rajaaman alueen pinta-alan. Tämä alue on suorakulmainen kolmio, jonka kanta on 2π ja korkeus 2π. Joten sen pinta-ala on $\dfrac{2\pi \cdot 2\pi}{2} = 2\pi^2$.



655. **a)** Koska $f(x + \pi) = f(x)$ kaikilla x, kyseessä on jaksollinen funktio, jonka jakso on π. Eräs tällainen funktio on $\sin(2x)$ ja toinen tällainen funktio on $\cos(2x)$.

$\sin(2 \cdot 0) = \sin 0 = 0$, joten se ei kelpaa.
$\cos(2 \cdot 0) = \cos 0 = 1$, joten se kelpaa.

Voidaan siis valita $f(x) = \cos(2x)$.

Kaikki tehtävänannon ehdot täyttävät funktiot kelpaavat.

b) Muistetaan, että logaritmille pätee $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. Lisäksi logaritmifunktio $\log_a x$ on määritelty, kun $x > 0$. Funtioksi f voidaan siis valita mikä tahansa funktio $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Valitaan vaikkapa $f(x) = \ln x$.

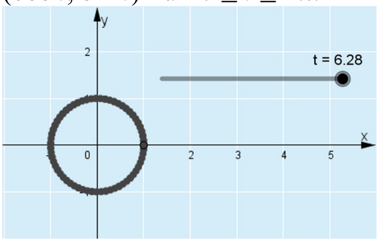
Kaikki tehtävänannon ehdot täyttävät funktiot kelpaavat.

656. **a)** Vektorin $\overline{OP} = \cos t\,\overline{i} + \sin t\,\overline{j}$ loppupisteen P koordinaatit on $P = (\cos t, \sin t)$.

Muistetaan, että yksikköympyrällä kehäpisteen x-koordinaatti on kulman kosini ja kehäpisteen y-koordinaatti on kulman sini.
Piste P on siis yksikköympyrällä.

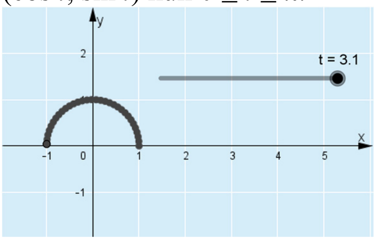
Kun kulma t käy läpi kaikki kulmat välillä $[0, 2\pi]$, piste P käy läpi kaikki yksikköympyrän pisteet. Ne siis muodostavat yksikköympyrän, eli ympyrän jonka keskipiste on origossa ja säde on yksi, eli käyrän $x^2 + y^2 = 1$.

Tarkistetaan asia piirtämällä ohjelmalla liu'un avulla pisteitä $(\cos t, \sin t)$ kun $0 \leq t \leq 2\pi$.



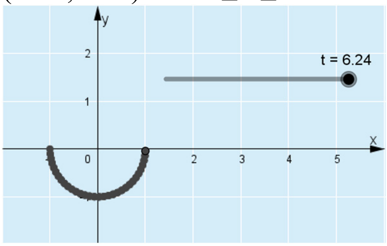
b) Jatkamalla a-kohdan päättelyä, kun kulma t käy läpi arvot $[0, \pi]$, piste P käy läpi vain yksikköympyrän x-akselin yläpuolisen osan, eli muodostuu käyrä $x^2 + y^2 = 1$ jossa $y \geq 0$. Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa $y^2 = 1 - x^2$ josta saadaan $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Tarkistetaan asia piirtämällä ohjelmalla liu'un avulla pisteitä $(\cos t, \sin t)$ kun $0 \leq t \leq \pi$.



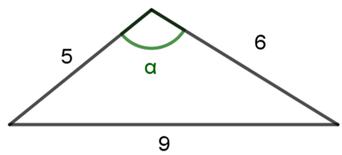
c) Jatkamalla a-kohdan päättelyä, kun kulma t käy läpi arvot $[\pi, 2\pi]$, piste P käy läpi vain yksikköympyrän x-akselin alapuolisen osan, eli muodostuu käyrä $x^2 + y^2 = 1$ jossa $y \leq 0$. Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa $y^2 = 1 - x^2$ josta saadaan $y = -\sqrt{1-x^2}$.

Tarkistetaan asia piirtämällä ohjelmalla liu'un avulla pisteitä $(\cos t, \sin t)$ kun $\pi \leq t \leq 2\pi$.



657. Kolmion suurin kulma on aina pisintä sivua vastaan, joten tylpän kulman vastainen sivu on 9.

Kulman α kosini saadaan kosinilauseella.



$$9^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

Ratkaistaan kulman sini.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

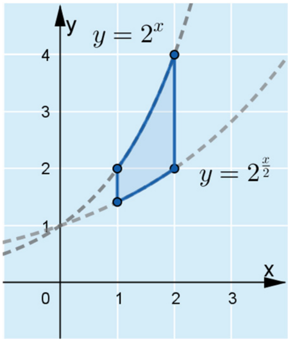
$$\sin^2\alpha + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Koska kulma on tylppä, sen sini on positiivinen, siis $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}$.

658. Piirretään tilanteesta kuva.



$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ ja $2^1 = 2$
Eli $\sqrt{2} \leq f(1) \leq 2.$

$2^{\frac{2}{2}} = 2$ ja $2^2 = 2$
Eli $2 \leq f(2) \leq 4.$

1) Tarkastellaan funktion *f* suurinta arvoa.

Tarkastellaan ensin välin päätekohta $x = 2$.
Funktio *f* ei voi saada funktiota 2^x suurempia arvoja, joten sen suurin arvo on enintään 4. Pienimmillään kohdassa $x = 2$ funktio *f* saa arvon 2. Eli sen suurin arvo on vähintään 2.

Välin alkukohdassa $x = 1$ ei saada tätä suurempia arvoja. Missään välin $1 < x < 2$ kohdassa ei voida saada arvoa 4 suurempia arvoja.

Näin ollen funktion *f* suurin arvo on välillä [2, 4].

2) Tarkastellaan funktion *f* pienintä arvoa.

Tarkastellaan ensin välin alkukohta $x = 1$.

Funktio *f* ei voi saada funktiota $2^{\frac{x}{2}}$ pienempiä arvoja, joten sen pienin arvo on vähintään $\sqrt{2}$. Suurimmillaan kohdassa $x = 1$ funktio *f* saa arvon 2. Eli sen pienin suurin arvo on enintään 2

Välin loppukohdassa $x = 2$ ei saada tätä pienempiä arvoja. Missään välin $1 < x < 2$ kohdassa ei voida saada arvoa $\sqrt{2}$ pienempiä arvoja.

Näin ollen funktion *f* pienin arvo on välillä $[\sqrt{2},\ 2]$.

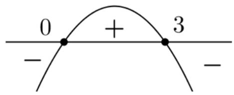
3) Tarkastellaan yhtälöitä $f(x) = 3$ ja $f(x) = 1{,}5$.
Funktion pienin arvo on välillä $[\sqrt{2},\ 2] = [1{,}4\ldots;\ 2]$ ja suurin arvo välillä $[2{,}4]$. Molemmat luvut 3 ja 1,5 ovat tällä välillä. Eli yhtälöillä voisi olla ratkaisuja.

Muta kuitenkin esimerkiksi funktio $f(x) = 2$ täyttää tehtävänannon ehdot. Tällä valinnalla yhtälöillä $f(x) = 3$ ja $f(x) = 1{,}5$ ei ole ratkaisuja.

Ei siis voida sanoa, että yhtälöille löytyy ratkaisuja.

659. **a)** Logaritmi on määritelty silloin kun $3x - x^2 > 0$.

$3x - x^2 = 0$
$x(3 - x) = 0$
$x = 0 \text{ tai } x = 3$



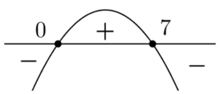
Funktio on siis määritelty kun $0 < x < 3$.

Luonnollinen logaritmi saa suurimman arvonsa, kun se lasketaan mahdollisimman suuresta luvusta. Alaspäin aukeava paraabeli saa suurimman arvonsa huipussa, joka on nollakohtien puolivälissä kohdassa $x = \frac{3}{2}$.

funktion suurin arvo on siis $f(\frac{3}{2}) = \ln(3 \cdot \frac{3}{2} - (\frac{3}{2})^2) = \ln\frac{9}{4}$.

b) Neliöjuuri on määritelty silloin kun $7x - x^2 \geq 0$.

$7x - x^2 = 0$
$x(7 - x) = 0$
$x = 0 \text{ tai } x = 7$



Funktio on siis määritelty kun $0 \leq x \leq 7$.

Neliöjuuri saa suurimman arvonsa, kun se lasketaan mahdollisimman suuresta luvusta. Alaspäin aukeava paraabeli saa suurimman arvonsa huipussa, joka on nollakohtien puolivälissä kohdassa $x = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

funktion suurin arvo on siis $f(\frac{7}{2}) = \sqrt{7 \cdot \frac{7}{2} - (\frac{7}{2})^2} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$.

660. Merkitään mopoilijan nopeutta x km/h.

Mopoilijalta kului 58 km matkaan $\frac{58}{x}$ h.

Nyt autoilijan nopeus on $2x$ km/h.

Autoilijalta kuluin 58 km matkaan $\frac{58}{2x}\text{ h} = \frac{29}{x}\text{ h}$.

Koska $40\,\text{min} = \frac{40}{60}\text{ h} = \frac{2}{3}\text{ h}$, saadaan yhtälö $\frac{58}{x} = \frac{29}{x} + \frac{2}{3}$. Tämän yhtälön ratkaisu on $x = 43{,}5$ (km/h).

Mopon keskinopeus oli siis 43,5 km/h ja auton 87 km/h.

661. **a)** Merkitään alkuperäistä aineen määrää kirjaimella *M* ja vuotuisen muutoksen prosenttikerrointa kirjaimella *k*. Saadaan yhtälö

$k^{29} \cdot M = \dfrac{M}{2}$. Tämän yhtälön ratkaisu on $k = \sqrt[29]{\dfrac{1}{2}} = 0{,}976...$

Aineesta siis häviää 1 – 0,9764… = 0,0236… ≈ 2,4 % vuodessa.

Aine on vähentynyt kolmannekseen, kun $M \cdot \left(\sqrt[29]{\dfrac{1}{2}}\right)^t = \dfrac{M}{3}$.

Tämän yhtälön ratkaisu on *t*= 45,96…
Aikaa kuluu siis noin 46 vuotta.

b) Kohdan *a* perusteella aineenmäärä kuvaa funktio $f(t) = M \cdot \left(\sqrt[29]{\dfrac{1}{2}}\right)^t$.

Kirjoitetaan tämä lauseke pyydetyssä muodossa.

$$f(t) = M \cdot \left(\sqrt[29]{\frac{1}{2}}\right)^t = M \cdot (e^{\ln\sqrt[29]{\frac{1}{2}}})^t = M \cdot e^{\ln\sqrt[29]{\frac{1}{2}} \cdot t}$$

Siis $-\lambda = \ln\sqrt[29]{\dfrac{1}{2}}$, mistä saadaan $\lambda = -\ln\sqrt[29]{\dfrac{1}{2}}$.

Tätä lauseketta voi halutessaan myös sieventää.

$$\lambda = -\ln\sqrt[29]{\frac{1}{2}} = -\ln(\frac{1}{2})^{\frac{1}{29}} = -\frac{1}{29}\ln(\frac{1}{2}) = \frac{1}{29}\ln(\frac{1}{2})^{-1} = \frac{1}{29}\ln 2 = \frac{\ln 2}{29}$$

Toinen tapa:

Kohdan *a* perusteella aineenmäärä kuvaa funktio $f(t) = M \cdot \left(\sqrt[29]{\frac{1}{2}}\right)^t$.

Kirjoitetaan tämä lauseke pyydetyssä muodossa.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= M \cdot \left(\sqrt[29]{\frac{1}{2}}\right)^t \\
&= M \cdot \left(e^{\ln \sqrt[29]{\frac{1}{2}}}\right)^t \\
&= M \cdot e^{\ln \sqrt[29]{\frac{1}{2}} \cdot t} \\
&= M \cdot e^{\ln (\frac{1}{2})^{\frac{1}{29}} \cdot t} \\
&= M \cdot e^{\frac{1}{29} \ln (\frac{1}{2}) \cdot t} \\
&= M \cdot e^{\frac{1}{29} \ln (2)^{-1} \cdot t} \\
&= M \cdot e^{-\frac{1}{29} \ln 2 \cdot t} \\
&= M \cdot e^{-\frac{\ln 2}{29} \cdot t}
\end{aligned}
$$

Siis $\lambda = \dfrac{\ln 2}{29}$.

662. **a)** Merkitään valon intensiteettiä veden pinnanan tasolla kirjaimella *M* ja jokaisen metrin aiheuttaman muutoksen prosenttikerrointa kirjaimella *k*. Saadaan yhtälö $k^5 \cdot M = \frac{M}{2}$. Tämän yhtälön ratkaisu on

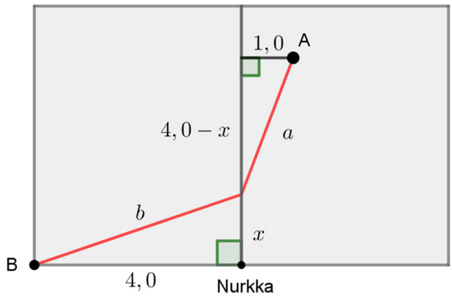
$$k = \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = 0{,}870...$$

Valon intensiteetti siis vähenee 1 – 0,870… = 0,129... ≈ 13 % jokaista metriä kohden.

b) 7,5 metrin syvyydessä valonintensiteetti on $M \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)^{7{,}5} = M \cdot 0{,}378...$

Eli jäljellä on 38 % vedenpinnan intensiteetistä.

663. Piirretään tilanteesta kuva.



Kuvan merkinnöillä tehtävässä kysytään lukua x, kun $a + b = 8$.

Kirjoitetaan luvut a ja b muuttujan x avulla.

Pythagoraan lauseella saadaan

$b^2 = 4,0^2 + x^2$

$b = \sqrt{16 + x^2}$ (tai $b = -\sqrt{16 + x^2}$).

$a^2 = (4,0 - x)^2 + 1,0^2$

$a = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$ (tai $\mathrm{a} = -\sqrt{x^2 - 8x + 17}$).

Saadaan siis yhtälö $a + b = \sqrt{x^2 - 8x + 17} + \sqrt{16 + x^2} = 8.$ Tämän yhtälön ratkaisu on $x = 0,129\ldots$ tai $5,120\ldots$.

Näistä vaon 0,129… on mahdollinen arvo, sillä seinänkorkeus on 5 m.

Kaapeli on siis nurkan kohdalla 13 cm korkeudella maasta.

664. Logaritmi on määritelty kun $|\sin x| > 0$, eli täsmällen silloin kun $\sin x \neq 0$, eli kun $x \neq n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Yhtälö $\ln|\sin x| = 0$ toteutuu kun $|\sin x| = 1$ eli kun $\sin x = 1$ tai kun $\sin x = -1$.

Nämä yhtälöt toteutuvat, kun $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Kaikki nämä kulmat toteuttavat ehdon $x \neq n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisu on siis $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

665.
$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos 2x \leq 1 \quad \|\cdot 3 \\ -3 &\leq 3\cos 2x \leq 3 \quad \| + 4 \\ 1 &\leq 4 + 3\cos 2x \leq 7 \end{aligned}$$

Lausekkeen $4 + 3\cos 2x$ arvo on siis välillä $[1, 7]$.

Näin ollen lauseke $\frac{5}{4+3\cos 2x}$ saa suurimmillaan arvon $\frac{5}{1} = 5$ ja pienimillään arvon $\frac{5}{7}$.

Arvo 5 saadaan, kun $4 + 3\cos 2x = 1$, eli kun $\cos 2x = -1$.

Näin käy, kun $2x = \pi + n \cdot 2\pi$, eli $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Arvo $\frac{5}{7}$ saadaan kun $4 + 3\cos 2x = 7$, eli kun $\cos 2x = 1$.

Näin käy kun $2x = n \cdot 2\pi$, eli $x = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

666. Lauseke $\sqrt{a+1}$ on määritelty kun $a + 1 \geq 0$ eli kun $a \geq -1$.

Lähdetään ratkaisemaan yhtälöä.

$$\cos x = 2 - \sqrt{a+1}\cos x$$
$$\cos x + \sqrt{a+1}\cos x = 2$$
$$(1+\sqrt{a+1})\cos x = 2$$

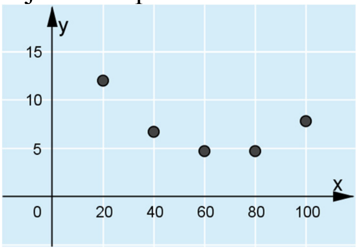
Yhtälö ei toteudu, jos $1+\sqrt{a+1}=0$, eli jos $\sqrt{a+1}=-1$. Näin ei käy millään a:n arvolla, eli kerroin $1+\sqrt{a+1}\neq 0$.

$$(1+\sqrt{a+1})\cos x = 2 \quad \|:(1+\sqrt{a+1})$$
$$\cos x = \frac{2}{1+\sqrt{a+1}}$$

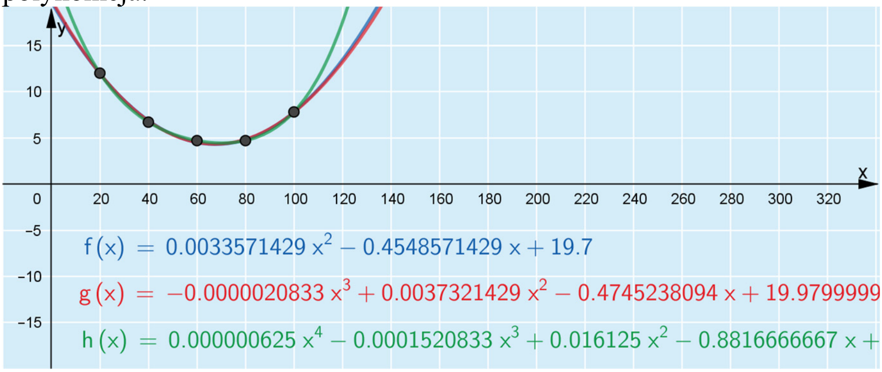
Koska $-1 \leq \cos x \leq 1$, yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $-1 \leq \dfrac{2}{1+\sqrt{a+1}} \leq 1$. Tämän kaksoisepäyhtälön ratkaisu on $a \geq 0$.

Kaikki nämä luvut toteuttavat ehdon $a \geq -1$.
Yhtälöllä on siis ratkaisuja kun $a \geq 0$.

667. Sijoitetaan pisteet koordinaatistoon.



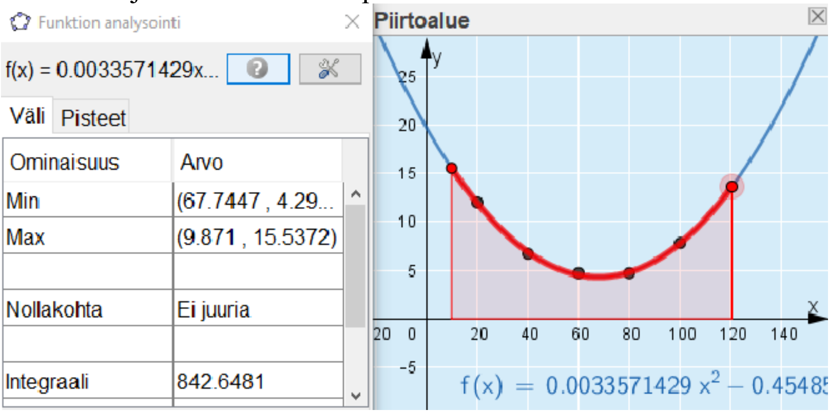
Kuvan perusteella suora ei sovi malliksi. Kokeillaan 2., 3., … asteen polynomeja.



Sekä toisen, että kolmannen asteenpolynomit näyttät kuvaavan tilannetta hyvin. Valitaan malliksi toisen asteen polynomifunktio.

Kun nopeus on 90 km/h mallin mukainen kulutus on
$f(90) = 5{,}95\ldots \approx 6{,}0$ litraa.

Etsitään ohjelman toiminnolla pienin kulutus.



Mallin mukaan kulutus on pienin kun nopeuden ollessa noin 68 km/h.

Vastaukset riippuvat valitus polunomimallin asteesta.

668. Koska kehältä valitun pisteen korkeus nousee ja laskee säännöllisesti ympyrän kehällä, kuvataan sen korkeutta funktion $f(x) = A\sin(Cx + D) + B$ avulla.

Määritetään vakiot A, B, C ja D.

Kehän etäisyys pyörimisakselista, eli kehäympyrän säde on 25 m ja halkaisija 50 m.
Kehän laki on 54 m korkeudessa. Näin ollen alin korkeus on
54 m − 50 m = 4m.

Siis $4 \leq f(x) \leq 54$. Tämän tiedon avulla saadaan vakiot A ja B.

$$
\begin{aligned}
-1 &\leq \sin(Cx + D) \leq 1 && \|\cdot 25 \text{ (ympyrän säde)}\\
-25 &\leq 25\sin(Cx + D) \leq 25 && \| + 29\\
4 &\leq 25\sin(Cx + D) + 29 \leq 54
\end{aligned}
$$

Maailmanpyörä pyörähtää täyden kierroksen 6 minuutissa, eli funktion f perusjakso $\frac{2\pi}{C} = 6$, josta $2\pi = 6C$ ja edelleen $C = \frac{\pi}{3}$.

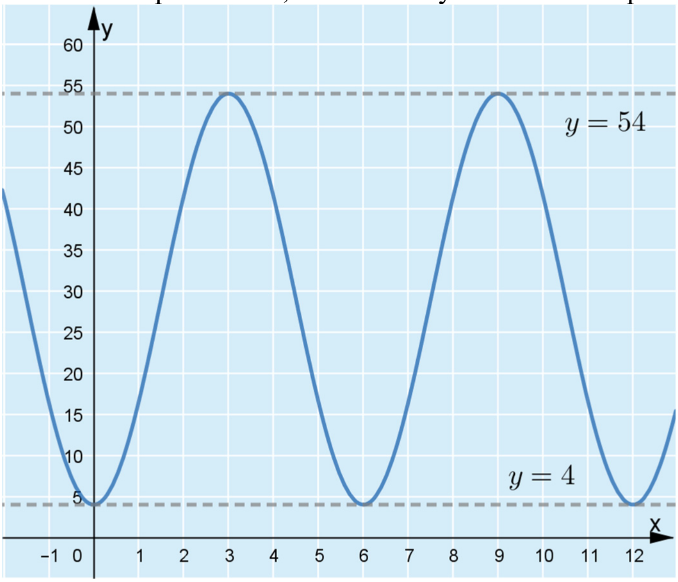
Määritetän vakio D sen tiedon avulla, että $f(0) = 4$.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 25\sin(\tfrac{\pi}{3}\cdot 0 + D) + 29 = 25\sin(D) + 29 = 4\\
25\sin D &= -25 \quad \|:25\\
\sin D &= -1
\end{aligned}
$$

Eräs tämän ehdon täyttävä luku on $\frac{3\pi}{2}$.

Siis $f(x) = 25\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{3\pi}{2}) + 29.$

Tarkistetaan piirtämällä, että kuva näyttää siltä miltä pitääkin.



Määritetään, milloin tarkastelupiste on 20 m korkeudella, eli ratkaistaan yhtälö $25\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{3\pi}{2}) + 29 = 20$.

Kaksi ensimmäistä ratkaisua ovat ensimmäisen kierroksen aikana, joten etsitään yhtälön välillä $0 < x < 6$ olevat ratkaisut.

Saadaan $x = 1{,}148\ldots$ min ≈ 1 min 9 s ja $x = 4{,}851\ldots$ min ≈ 4 min 51 s.

669. **a)** Kuuloskynnyksellä 120 dB saadaanyhtälö $120 = 10\lg\frac{I}{I_0}$. Ratkaistaan tästä kipukynnystä vastaava intensiteetti I.

$$120 = 10\lg\frac{I}{I_0} \quad \|:10$$
$$12 = \log_{10}\frac{I}{I_0}$$
$$\frac{I}{I_0} = 10^{12} \quad \| \cdot I_0$$
$$I = 10^{12} I_0$$

Kipukynnyksen desibelimäärän intensiteetti on siis 10^{12}-kertainen.

b) Intensiteetillä I pätee $L = 10\lg\frac{I}{I_0}$. Kun intensiteetti 1000-kertaistuu lukuun $1000I$ saadaan desibelilukemaksi

$$\begin{aligned}
10\lg\frac{1000I}{I_0} &= 10\lg(1000 \cdot \frac{I}{I_0}) \\
&= 10(\log_{10}1000 + \lg\frac{I}{I_0}) \\
&= 10(3 + \lg\frac{I}{I_0}) \\
&= 30 + 10\lg\frac{I}{I_0} \\
&= 30 + L
\end{aligned}$$

Desibelilukema siis kasvaa 30:llä.

c) Arvolla 85 dB saadaan yhtälö $85=10\lg\frac{I_{85}}{I_0}$ ja 5 dB:llä kasvanut 90 dB:n arvolla saadaan yhtälö $90=10\lg\frac{I_5}{I_0}$. Ratkaistaan näistä intensiteetit.

$$\begin{aligned}85&=10\lg\frac{I_{85}}{I_0} \quad \|:10\\ 8,5&=\log_{10}\frac{I_{85}}{I_0}\\ \frac{I_{85}}{I_0}&=10^{8,5} \quad \|\cdot I_0\\ I_{85}&=10^{8,5}I_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}90&=10\lg\frac{I_9}{I_0} \quad \|:10\\ 9&=\log_{10}\frac{I_9}{I_0}\\ \frac{I_9}{I_0}&=10^9 \quad \|\cdot I_0\\ I_9&=10^9 I_0\end{aligned}$$

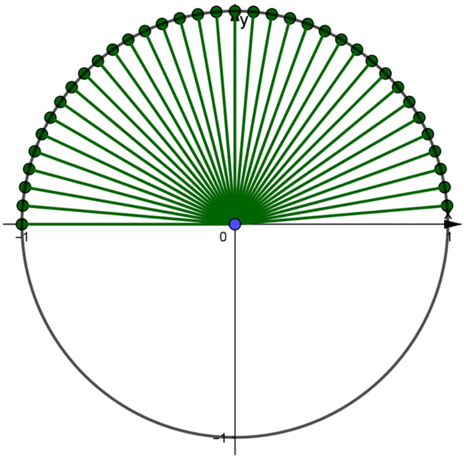
Lasketaan sitten intensiteettien suhde.

$$\frac{I_9}{I_{85}}=\frac{10^9 I_0}{10^{8,5}I_0}=\frac{10^9}{10^{8,5}}=10^{9-8,5}=10^{0,5}=3,162...=316,2...\%$$

Intensiteetti on siis kasvanut noin 216 %.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

670. Hahmotellaan kulmia 5 asteen välein yksikköympyrään.



(Käytetyt komennot syötekentässä ovat:

x^2+y^2=1

A=(0,0)

Jono((cos(n°),sin(n°)),n,5,180,5)

Jono(Jana(A,L1(n)),n,1,180/5,1)

Koska cos α on kehäpisteen x-koordinaatti, huomataan, että yhteenlaskussa löytyy pareittain kulmat, joiden x-koordinaatit ovat toistensa vastaluvut, eli niiden summa on nolla.

Suplementtikulmien kosinit ovat toistensa vastaluvut, joiden summa on nolla. Näin saadaan

$\cos 1° + \cos 179° = 0$

$\cos 2° + \cos 178° = 0$

$\cos 3° + \cos 177° = 0$

…

$\cos 89° + \cos 91° = 0$

Ainoat kulmat, jotka eivät näin kumoudu ovat $\cos 90° = 0$ ja $\cos 180° = -1$.

Siis $\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \ldots + \cos 180° = -1$.

671.

$$\begin{aligned} f(a+b)+f(a-b) &= \frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-(a+b)})+\frac{1}{2}(e^{a-b}+e^{-(a-b)}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-a-b}+e^{a-b}+e^{-a+b}) \end{aligned}$$

Tarkistetaan sitten, mitä toinen lauseke antaa, jotta tiedetään, mihin tähdätään.

$$\begin{aligned} 2f(a)f(b) &= 2\cdot\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\cdot\frac{1}{2}(e^{b}+e^{-b}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})(e^{b}+e^{-b}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{a}e^{b}+e^{a}e^{-b}+e^{-a}e^{b}+e^{-a}e^{-b}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{a-b}+e^{-a+b}+e^{-a-b}) \end{aligned}$$

Tämä on täsmälleen sama, kuin edellä, joten on osoitettu, että tällä funktiolla $f(a+b)+f(a-b)=2f(a)f(b)$.

672. **a)** Logaritmi $\log_y x$ on määritelty kun $x > 0$ kun $y > 0$, $y \neq 1$.
Logaritmi $\log_x y$ on määritelty, kun $y > 0$ kun $x > 0$, $x \neq 1$.
Kaikki ehdot ovat voimassa, eli yhtälö muodostaa käyrän, kun $x > 0$, $y > 0$ ja $x \neq 0$ ja $y \neq 0$.

Koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä on $x > 0$ ja $y < 0$. Näin lausekkeiden määrittelyehdoista nähdään, että käyrä sijaitsee kokonaisuudessaan koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä.

b) Muokataan yhtälöä kirjoittamalla molemmat logaritmit saman kantaluvun avulla. Valitaan kantaluvuksi x.

$$\log_y x = \log_x y$$

$$\frac{\log_x x}{\log_x y} = \log_x y$$

$$\frac{1}{\log_x y} = \log_x y \quad \| \cdot \log_x y \neq 0$$

$$1 = (\log_x y)^2$$

$$(\log_x y)^2 = 1$$

$$\log_x y = 1 \qquad\qquad \log_x y = -1$$

$$y = x^1 \qquad\qquad y = x^{-1}$$

$$y = x \qquad\qquad y = \frac{1}{x}$$

Käyrä siis koostuu kahdesta osasta, suorasta $y = x$ ja hyperbelistä $y = \frac{1}{x}$, kun $x > 0$ ja $x \neq 1$, mikä kuvastakin näkyy.

Toinen tapa:
Muokataan yhtälöä kirjoittamalla molemmat logaritmit saman kantaluvun avulla. Valitaan kantaluvuksi y.

$$\log_y x = \log_x y$$
$$\log_y x = \frac{\log_y y}{\log_y x}$$
$$\log_y x = \frac{1}{\log_y x} \quad \| \cdot \log_x y \neq 0$$
$$(\log_y x)^2 = 1$$
$$\log_y x = 1 \qquad \log_y x = -1$$
$$x = y^1 \qquad x = y^{-1}$$
$$y = x \qquad x = \frac{1}{y} \quad \| \cdot \frac{y}{x}, x \neq 0, y \neq 0$$
$$y = \frac{1}{x}$$

Käyrä siis koostuu kahdesta osasta, suorasta $y = x$ ja hyperbelistä $y = \frac{1}{x}$, kun $x > 0$ ja $x \neq 1$, mikä kuvastakin näkyy.

Kolmas tapa:
Muokataan yhtälöä kirjoittamalla molemmat logartimit saman kantaluvun avulla. Koska $x \neq 1$ ja $y \neq 1$, kaikilla luvuilla $k > 0$ ja $k \neq 1$ pätee $\log_k x \neq 0$ ja $\log_k y \neq 0$. Kantaluvuksi voidaan siis valita mikä luku $k > 0$, $k \neq 1$ tahansa. Valitaan kantaluvuksi e.

$$\log_y x = \log_x y$$
$$\frac{\ln x}{\ln y} = \frac{\ln y}{\ln x} \quad \|\text{kerrotaan ristiin, } \ln x \neq 0, \ln y \neq +$$
$$(\ln x)^2 = (\ln y)^2$$
$$\ln x = \ln y \qquad \ln x = -\ln y$$
$$x = y \qquad \ln x = \ln y^{-1}$$
$$y = x \qquad x = \frac{1}{y} \quad \| \cdot \frac{y}{x}, x \neq 0, y \neq 0$$
$$y = \frac{1}{x}$$

Käyrä siis koostuu kahdesta osasta, suorasta $y = x$ ja hyperbelistä $y = \frac{1}{x}$, kun $x > 0$ ja $x \neq 1$, mikä kuvastakin näkyy.

673. **a)** Vektorin ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla.

$$\begin{aligned}\overline{a}\cdot\overline{b} &= (\cos\varphi-2\sin\varphi)(\cos\varphi+\sin\varphi)+1\cdot 1+(\sin\varphi+2\cos\varphi)(\sin\varphi-\cos\varphi)\\ &= \cos^2\varphi+\cos\varphi\sin\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi-2\sin^2\varphi+1\\ &\quad +\sin^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi+2\cos\varphi\sin\varphi-2\cos^2\varphi\\ &= 1-\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\\ &= 1-(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\\ &= 1-1\\ &= 0\end{aligned}$$

b) Kun $\varphi = 0$ saadaan

$$\begin{aligned}\overline{a} &= (\cos 0-2\sin 0)\overline{i}+\overline{j}+(\sin 0+2\cos 0)\overline{k}\\ &= (1-2\cdot 0)\overline{i}+\overline{j}+(0+2\cdot 1)\overline{k}\\ &= \overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{b} &= (\cos 0+\sin 0)\overline{i}+\overline{j}+(\sin 0-\cos 0)\overline{k}\\ &= (1+0)\overline{i}+\overline{j}+(0-1)\overline{k}\\ &= \overline{i}+\overline{j}-\overline{k}\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}s\overline{a}\cdot t\overline{b} &= s(\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k})+t(\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})\\ &= (s+t)\overline{i}+(s+t)\overline{j}+(2s-t)-\overline{k}\end{aligned}$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä $\begin{cases} s+t=1\\ s+t=-1\\ 2s-t=0.\end{cases}$

Kaksi ensimmäistä yhtälöä eivät voi toteutua samoilla vakioiden s ja t arvoilla, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Ei siis ole kertoimia s ja t, joila $\overline{i}-\overline{j}=s\overline{a}\cdot t\overline{b}$.

674. Muokataan funktioin lauseketta taulukosta löytyviä kaavoja käyttäen.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 3x + \sin 2x + \sin x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x \cos x + \sin x \\ &= 4\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x \cos x \\ &= \sin x(4 - 4\sin^2 x + 2\cos x) = 0 \end{aligned}$$

$\sin x = 0$ eli $x = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$

tai

$$4 - 4\sin^2 x + 2\cos x = 0$$
$$4 - 4(1 - \cos^2 x) + 2\cos x = 0$$
$$4 - 4 + 4\cos^2 x + 2\cos x = 0$$
$$2\cos x(2\cos x + 1) = 0$$

$2\cos x = 0$ tai $2\cos x + 1 = 0$

$\cos x = 0$ $\qquad \cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$ $\qquad x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, tai $x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi\ n \in \mathbb{Z}$

Siis $x = n \cdot \pi$ tai $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ tai $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai

$x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi\ n \in \mathbb{Z}$

675. Taulukosta löytyvän kaavan avulla saadaan

$$\begin{aligned}\sin(2x+\frac{\pi}{6}) &= \sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}\\ &= \sin 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Koska kaksinkertaisen kulman sinille on vain yksi kaava, muokataan lauseketta seuraavaksi sen avulla.

$$\begin{aligned}\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2} &= 2\sin x\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}\\ &= \sin x\cos x\cdot\sqrt{3}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Tästä päästään eteenpäin tiedon tan $x = 2$, eli $\frac{\sin x}{\cos x}=2,$ avulla, sillä nyt sin x = 2cos$x$.

$$\begin{aligned}\sin x\cos x\cdot\sqrt{3}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2} &= 2\cos x\cdot\cos x\cdot\sqrt{3}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}\\ &= 2\sqrt{3}\cos^2 x+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Valitaan kaksinkertaisen kulman kosinin kaavoista se, jossa on vain cos^2x.

$$\begin{aligned}2\sqrt{3}\cos^2 x+\cos 2x\cdot\frac{1}{2} &= 2\sqrt{3}\cos^2 x+(2\cos^2 x-1)\cdot\frac{1}{2}\\ &= 2\sqrt{3}\cos^2 x+\cos^2 x-\frac{1}{2}\\ &= (2\sqrt{3}+1)\cos^2 x-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Koska nyt sin x = 2cos$x$ ja aina sin^2x + cos^2 x = 1, saadaan 4cos^2x + cos^2 x = 1, mistä edelleen $\cos^2 x=\frac{1}{5}.$

Siis

$$\begin{aligned}&(2\sqrt{3}+1)\cos^2 x-\frac{1}{2}\\ &= (2\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}+1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}+2}{10}-\frac{5}{10}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}\end{aligned}$$

Siis $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}.$

676.

$$
\begin{aligned}
\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} &= \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} \\
&= 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cancel{\cos\frac{x}{2}}}\cdot\frac{\cos^{\cancel{2}}\frac{x}{2}}{1} \\
&= 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} \\
&= \sin(2\cdot\tfrac{x}{2}) \\
&= \sin x
\end{aligned}
$$

$$\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cancel{\cos^2}\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cancel{\cos^2}\frac{x}{2}}{1}$$

$$=\cos(2\cdot\tfrac{x}{2})$$

$$=\cos x$$

677. $\cos 3t = \cos(t + 2t)$

$$\begin{aligned}
&= \cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t \\
&= \cos t(2\cos^2 t - 1) - \sin t \cdot 2\sin t \cos t \\
&= 2\cos^3 t - \cos t - 2\sin^2 t \cos t \\
&= 2\cos^3 t - \cos t - 2(1 - \cos^2 t)\cos t \\
&= 2\cos^3 t - \cos t - 2\cos t + 2\cos^3 t \\
&= 4\cos^3 t - 3\cos t
\end{aligned}$$

$8x^3 - 6x - 1 = 0$

$$\begin{aligned}
8\cos^3\frac{\pi}{9}-6\cos\frac{\pi}{9}-1 &= 2(4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9})-1 \\
&= 2(\cos(3\cdot\frac{\pi}{9}))-1 \\
&= 2(\cos(\frac{\pi}{3}))-1 \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}-1 \\
&= 0
\end{aligned}$$