5 Vektorit

5.1 Vektori

LUVUN 5.1 YDINTEHTÄVÄT

501. Piste P jakaa janan BC suhteessa 1:1 eli kahteen yhtä suureen osaan. Siten $\overline{CP}=\frac{1}{2}\overline{CB}=\frac{1}{2}\overline{u}$ ja $\overline{DP}=\overline{DC}+\overline{CP}=\overline{DC}+\frac{1}{2}\overline{CB}=\overline{v}+\frac{1}{2}\overline{u}=\frac{1}{2}\overline{u}+\overline{v}$.

Vastaavasti $\overline{DQ}=\overline{DA}+\overline{AQ}=\overline{DA}+\frac{3}{7}\overline{AB}=\overline{u}+\frac{3}{7}\overline{v}$.

502. **a)** Pisteen koordinaatit voidaan lukea suoraan paikkavektorin $\overline{i}$:n ja $\overline{j}$:n kertoimista, joten $A = (2, 1)$ ja $B = (−3, −5)$.

b) Vektorin $\overline{AB}$ $\overline{i}$:n suuntaisen komponentin kerroin saadaan päätepisteen B ja alkupisteen A x-koordinaattien erotuksena. Vastaavasti $\overline{j}$:n suuntaisen komponentin kerroin, joten

$\overline{AB}=(-3-2)\overline{i}+(-5-1)\overline{j}=-5\overline{i}-6\overline{j}$.

503. Lasketaan erotusvektori.

$$\begin{aligned}\overline{a}-\overline{b}&=(4\overline{i}+\overline{j}-7\overline{k})-(2\overline{i}-3\overline{j}-5\overline{k})\\&=4\overline{i}+\overline{j}-7\overline{k}-2\overline{i}+3\overline{j}+5\overline{k}\\&=(4-2)\overline{i}+(1+3)\overline{j}+(-7+5)\overline{k}\\&=2\overline{i}+4\overline{j}-2\overline{k}\end{aligned}$$

$$|\overline{a}-\overline{b}|=\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{4+16+4}=\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6}=2\sqrt{6}$$

504. Muodostetaan vektoreiden $\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}$ ja $3\overline{i}-4\overline{k}$ suuntaisia siirtymiä vastaavat vektorit yksikkövektoreiden avulla ja näiden avulla pisteen C paikkavektori.

$|\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$ ja $|3\overline{i}-4\overline{k}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

Siirtymiä vastaavat vektori ovat

$\overline{AB}=9\cdot\dfrac{\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}}{3}=3\cdot(\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k})=3\overline{i}-6\overline{j}+6\overline{k}$ ja

$\overline{BC}=10\cdot\dfrac{3\overline{i}-4\overline{k}}{5}=2\cdot(3\overline{i}-4\overline{k})=6\overline{i}-8\overline{k}$.

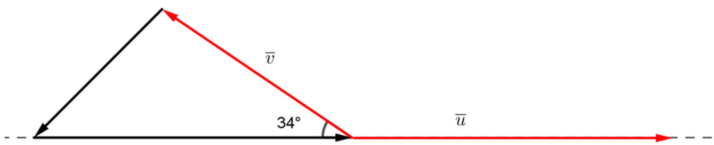
Siten

$$
\begin{aligned}
\overline{OC} &= \overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}\\
&=(\overline{i}-\overline{j})+(3\overline{i}-6\overline{j}+6\overline{k})+(6\overline{i}-8\overline{k})\\
&=\overline{i}-\overline{j}+3\overline{i}-6\overline{j}+6\overline{k}+6\overline{i}-8\overline{k}\\
&=10\overline{i}-7\overline{j}-2\overline{k}
\end{aligned}
$$

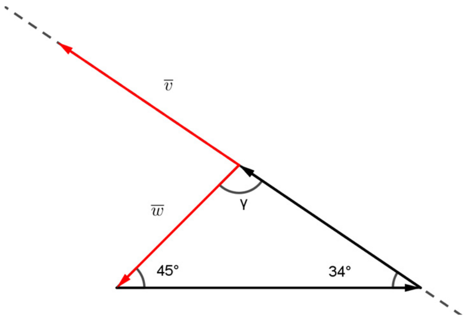
$C=(10,-7,-2)$

505. Vektorien välinen kulma on pienempi niistä kahdesta kulmasta, jotka muodostuvat, kun vektorit piirretään alkamaan samasta pisteestä.

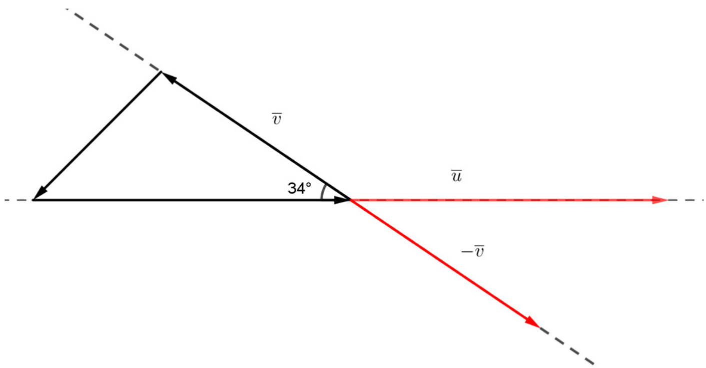
a) $\sphericalangle(\overline{u}, \overline{v}) = 180° - 34° = 146°$ (vieruskulmien summa on 180°)



b) $\gamma = 180° - (34° + 45°) = 101°$ (kolmion kulmien summa on 180º)
$\sphericalangle(\overline{v}, \overline{w}) = 180° - 101° = 79°$ (vieruskulmien summa on 180°)



c) $\sphericalangle(\overline{u}, -\overline{v}) = 34°$, (ristikulmat ovat yhtä suuret)



506. Muodostetaan aluksi kolmion *ABC* sivuvektorit.

$\overline{AB} = (2-3)\overline{i} + (2-4)\overline{j} + (-5-5)\overline{k} = -\overline{i} - 2\overline{j} - 10\overline{k}$

$\overline{AC} = (-3-3)\overline{i} + (-2-4)\overline{j} + (3-5)\overline{k} = -6\overline{i} - 6\overline{j} - 2\overline{k}$

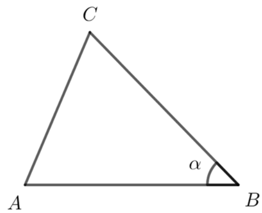
$\overline{BC} = (-3-2)\overline{i} + (-2-2)\overline{j} + (3-(-5))\overline{k} = -5\overline{i} - 4\overline{j} + 8\overline{k}$

Lasketaan seuraavaksi sivuvektoreiden pituudet ja tehdään pituuksien pohjalta päätelmä kolmion muodosta.

$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-10)^2} = \sqrt{105}$

$|\overline{AC}| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{76}$

$|\overline{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{105}$



Koska kolmion sivuista kaksi ovat yhtä pitkiä ja kolmas erimittainen, on kolmio tasakylkinen.

Kolmion huippukulma on kannan *AC* vastainen kulma *B*. Merkitään kulmaa α:lla.

$\overline{BA} = -\overline{AB} = -(-\overline{i} - 2\overline{j} - 10\overline{k}) = \overline{i} + 2\overline{j} + 10\overline{k}$

$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = (\overline{i} + 2\overline{j} + 10\overline{k}) \cdot (-5\overline{i} - 4\overline{j} + 8\overline{k}) = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot (-4) + 10 \cdot 8 = 67$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|}$$

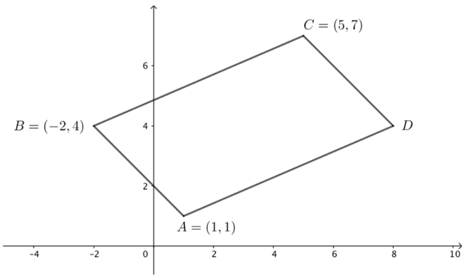
$$\cos\alpha = \frac{67}{\sqrt{105} \cdot \sqrt{105}}$$

$$\alpha = 50{,}350...° \approx 50{,}4°$$

Huippukulman suuruus on noin 50,4°.

507. Muodostetaan pisteen D paikkavektori. Koska suunnikkaan sivut AD ja BC ovat yhdensuuntaiset, on $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OA} + \overline{BC}$.

$\overline{BC} = (5-(-2))\overline{i} + (7-4)\overline{j} = 7\overline{i} + 3\overline{j}$ ja $\overline{OA} = \overline{i} + \overline{j}$
Siten $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{BC} = \overline{i} + \overline{j} + 7\overline{i} + 3\overline{j} = 8\overline{i} + 4\overline{j}$. Pisteen D koordinaatit luetaan paikkavektorista, joten $D = (8, 4)$.



508. Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun $\overline{u} = t\overline{v}$ jollakin $t \neq 0$. Lisäksi, jos $t > 0$, ovat vektorit samansuuntaiset ja jos $t < 0$ ovat vektorit vastakkaissuuntaiset. Muodostetaan yhtälö ja pyritään ratkaisemaan t.

$$\begin{aligned}
\overline{a} + \overline{c} &= t(\overline{b} + \overline{c}) \\
(4\overline{i} - 2\overline{j}) + (d\overline{i} + (d+1)\overline{j}) &= t((-3\overline{i} + \overline{j}) + d\overline{i} + (d+1)\overline{j}) \\
(4+d)\overline{i} + (-2+d+1)\overline{j} &= t((-3+d)\overline{i} + (1+d+1)\overline{j}) \\
(d+4)\overline{i} + (d-1)\overline{j} &= t(d-3)\overline{i} + t(d+2)\overline{j}
\end{aligned}$$

Koska komponentteihin jako on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari
$$\begin{cases} d + 4 = td - 3t \\ d - 1 = td + 2t \end{cases}$$
jonka ratkaisu on $t = -1$.

Yhtälö $\overline{a} + \overline{c} = t \cdot (\overline{b} + \overline{c})$ toteutuu, kun $t = -1$, joten vektorit $\overline{a} + \overline{c}$ ja $\overline{b} + \overline{c}$ ovat yhdensuuntaiset, mutta vastatakkaissuuntaiset. Samansuuntaisuus ei siten toteudu millään d:n arvolla.

<u>Huomautus:</u> Kun $t = -1$, on $d = -\frac{1}{2}$. Tätä ei kuitenkaan tarvitse ratkaista.

5.2 Suora ja taso vektoreiden avulla

LUVUN 5.2 YDINTEHTÄVÄT

509. Suuntavektori on mikä tahansa suoran suuntainen vektori, joten esimerkiksi $\overline{AB}$ on eräs suuntavektori.

$$\overline{AB} = (4-2)\overline{i} + (-7-3)\overline{j} + (-3-6)\overline{k} = 2\overline{i} - 10\overline{j} - 9\overline{k}$$

Suora kulkee pisteen (2, 3, 6) kautta.

Suoran parametriesitys on esimerkiksi

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 10t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 6 - 9t \end{cases}$$

xy-tasossa $z = 0$.

$0 = 6 - 9t$, josta $t = \frac{2}{3}$.

$$x = 2 + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$y = 3 - 10 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{11}{3}$$

xy-tason leikkauspiste on $(\frac{10}{3}, -\frac{11}{3}, 0)$.

510. Suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 7 + 3t \end{cases}$$

Suoran mielivaltainen piste $P = (2 + 3t, 3 + t, 7 + 3t)$ on tasossa $x + 2y + z = 1$, jos se toteuttaa tason yhtälön.

Saadaan yhtälö

$2 + 3t + 2(3 + t) + 7 + 3t = 1$ eli $8t + 15 = 1$, josta $t = -\frac{7}{4}$.

$x = 2 + 3 \cdot (-\frac{7}{4}) = -\frac{13}{4}$,

$y = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$ ja

$z = 7 + 3 \cdot (-\frac{7}{4}) = \frac{7}{4}$

Leikkauspiste on siis $(-\frac{13}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4})$.

511. **a)** Suoran suuntavektori on $3\overline{i} - \overline{j}$, joten suoran kulmakerroin on $k = -\frac{1}{3}$.

Suoran yhtälö saadaan kaavalla $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - 0 &= -\frac{1}{3}(x-4) \quad \| \cdot 3 \\ 3y &= -(x-4) \\ x + 3y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on siis $x + 3y - 4 = 0$.

b) Suoran $x = 1 - 2t$, $y = 3t$ suuntavektori on $-2\overline{i} + 3\overline{j}$, joten suoran kulmakerroin on $k = -\frac{3}{2}$.

Arvoa $t = 0$ vastaa piste $(1, 0)$.

$$\begin{aligned} y - 0 &= -\frac{3}{2}(x-1) \quad \| \cdot 2 \\ 2y &= -3(x-1) \\ 2y &= -3x + 3 \\ 3x + 2y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on siis $3x + 2y - 3 = 0$.

512. Määritetään pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran parametrimuotoinen yhtälö. Suoran suuntavektori on
$\overline{AB} = (-1-1)\overline{i} + (1-1)\overline{j} + (3-1)\overline{k} = -2\overline{i} + 0\cdot\overline{j} + 2\overline{k} = -2\overline{i} + 2\overline{k}$.

Suoran kulkee pisteen $A = (1, 1, 1)$ kautta.
Suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Piste $P = (4, 1, -2)$ on suoralla, jos se toteuttaa suoran yhtälön.

Saadaan $\begin{cases} t = -\dfrac{3}{2} \\ 1 = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ joten piste P on suoralla.

Vastaavasti on piste $Q = (0, 2, 4)$ suoralla, jos yhtälöryhmä
$0 = 1 - 2t$, $2 = 1$, $4 = 1 + 2t$ toteutuu.
Tämä on mahdotonta, koska $2 \neq 1$, joten piste Q ei ole suoralla.

Piste P on suoralla, mutta piste Q ei ole.

513. Suoran *a* eräs suuntavektori on
$\overline{AB} = (-2-(-4))\overline{i} + (6-7)\overline{j} + (-3-(-5))\overline{k} = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$.
Suora *a* siis kulkee pisteen $A = (-4, 7, -5)$ kautta vektorin $2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ suuntaisesti.

Suoran *a* parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 7 - t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -5 + 2t \end{cases}$$

Suoran *b* kulkee pisteen $C = (5, 4, 1)$ kautta vektorin $\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ suuntaisesti.
Suoran *b* parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 5 + r \\ y = 4 + r \qquad (r \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2r \end{cases}$$

Suorien leikkauspiste on suorien yhteinen. Syntyy siis yhtälöpari

$$\begin{cases} -4 + 2t = 5 + r \\ 7 - t = 4 + r \\ -5 + 2t = 1 - 2r \end{cases}$$

Tämän ratkaisu on $t = 4$ ja $r = -1$.

Yhteinen piste eli leikkauspiste on siten
$(5 + (-1), 4 + (-1), 1 - 2 \cdot (-1)) = (4, 3, 3)$.

Suorien välinen kulma voidaan päätellä suuntavektorien avulla. Lasketaan aluksi suuntavektoreiden välinen kulma α pistetulon avulla.

$$(2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}) \cdot (\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}) = 2 - 1 - 4 = -3$$

$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}$$
$$\cos\alpha = \frac{-3}{3\cdot\sqrt{6}}$$
$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$
$$\alpha = 114{,}094...^\circ$$

Suorien välinen kulma on aina enintään 90°, joten se on kulman α suplementtikulma 180° − 114,094...° = 65,905...° ≈ 66°.

Suorien välinen kulma on 66°.

514. Määritetään aluksi yhdysjanan keskipiste P.

$$P = (\frac{2+3}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{1+3}{2}) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2)$$

Tason normaalivektori on $AB = (3-2)\overline{i} + (1-0)\overline{j} + (3-1)\overline{k} = \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$

Taso kulkee pisteen $P = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ kautta ja sen normaalivektori on $\overline{i} + j + 2\overline{k}$.

Tason yhtälö on

$$1\cdot(x-\frac{5}{2}) + 1\cdot(y-\frac{1}{2}) + 2\cdot(z-2) = 0$$
$$x + y + 2z - 7 = 0.$$

Jos piste on y-akselilla, on sen x- ja z-koordinaatti 0.
Sijoitetaan siis $x = 0$ ja $z = 0$ yhtälöön.

$0 + y + 2 \cdot 0 - 7 = 0$, josta $y = 7$.

Taso leikkaa y-akselin pisteessä (0, 7, 0).

515. Tapa 1:

Muodostetaan yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen P kautta ja on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Tason $2x + y + 4z + 5 = 0$ eräs normaalivektori on $\overline{n} = 2\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$.

Pisteen $P = (1, 3, 1)$ kautta kulkevan vektorin $\overline{n} = 2\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$ suuntaisen suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 4t. \end{cases}$$

Lasketaan suoran ja tason leikkauspiste. Sijoitetaan $x = 1 + 2t$, $y = 3 + t$ ja $z = 1 + 4t$ tason yhtälöön ja määritetään leikkauspistettä vastaava parametrin t arvo.

$2 \cdot (1 + 2t) + (3 + t) + 4 \cdot (1 + 4t) + 5 = 0$, josta $t = -\frac{2}{3}$.

Kun $t = -\frac{2}{3}$, niin $x = 1 + 2 \cdot (-\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$, $y = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$ ja

$z = 1 + 4 \cdot (-\frac{2}{3}) = -\frac{5}{3}$. Suora ja taso leikkaavat pisteessä $(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{5}{3})$.

Lasketaan tämän pisteen ja pisteen $P = (1, 3, 1)$ välinen etäisyys, joka on samalla pisteen ja tason välinen etäisyys.

$$\sqrt{(1-(-\frac{1}{3}))^2 + (3-\frac{7}{3})^2 + (1-(-\frac{5}{3}))^2} = \sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \approx 3{,}1$$

Tapa 2:

Ylioppilaskokeessa sallitusta kaavakokoelmasta löytyy pisteen (x_0, y_0, z_0) etäisyydelle tasosta $ax + by + cz + d = 0$ kaava

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Lasketaan etäisyys tämän kaavan avulla sijoittamalla pisteen P = (1, 3, 1) koordinaatit ja tason $2x + y + 4x + 5 = 0$ yhtälön x:n, y:n ja z:n kertoimet yhtälöön.

$$d = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot 3 + 4\cdot 1 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{14}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

Huomautus: Vastauksen voi antaa muodossa $\frac{14}{\sqrt{21}}$ tai $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Etäisyys on $\frac{14}{\sqrt{21}}$ eli $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

516. Suoran vektorimuotoisesta yhtälöstä voidaan johtaa suoran mielivaltaisen pisteen P paikkavektori eli parametrimuotoinen yhtälö.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k} + t(2\overline{i} + \overline{j} + s\overline{k}) = \overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k} + 2t\overline{i} + t\overline{j} + st\overline{k} \\ &= (1+2t)\overline{i} + (2+t)\overline{j} + (2+st)\overline{k}\end{aligned}$$

Suoran mielivaltainen piste siis $P = (1 + 2t, 2 + t, 2 + st)$, missä $t \in \mathbb{R}$.

Suora on tasossa, kun piste P toteuttaa tason $3x + 4y + 5z = 21$ yhtälön jokaiselle parametrin t arvoilla. Parametrin arvoa $t = 1$ vastaa piste $(3, 3, 2 + s)$. Sijoitetaan tämän pisteen koordinaatit tason yhtälöön.

$3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot (2 + s) = 21$, josta $s = -2$

Varmistetaan vielä, että arvoa $s = -2$ vastaava piste
$P = (1 + 2t, 2 + t, 2 - 2t)$ toteuttaa tason yhtälön kaikilla t:n arvoilla.

$$\begin{aligned}3 \cdot (1 + 2t) + 4 \cdot (2 + t) + 5 \cdot (2 - 2t) &= 21 \\ 3 + 6t + 8 + 4t + 10 - 10t &= 21 \\ 21 &= 21\end{aligned}$$

Yhtälö on aina tosi.

Suora on tasossa, kun $s = -2$.

517. Suoran $ax + by + c = 0$ kulmakerroin on $k = -\frac{a}{b}$ ja suuntavektori $b\overline{i} - a\overline{j}$.

Lasketaan vektorien $b\overline{i} - a\overline{j}$ ja $a\overline{i} + b\overline{j}$ välinen pistetulo.

$$(b\overline{i} - a\overline{j}) \cdot (a\overline{i} + b\overline{j}) = ba - ab = 0$$

Koska vektorien $b\overline{i} - a\overline{j}$ ja $a\overline{i} + b\overline{j}$ välinen pistetulo on 0, ovat vektorit kohtisuorassa. Siten myös suora $ax + by + c = 0$ on kohtisuorassa sitä suoraa vastaan, jonka suuntavektori on $a\overline{i} + b\overline{j}$.

Luvun 5 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

518. **a)** $\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot \cos(\overline{u}, \overline{v}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos 90° = 6 \cdot 0 = 0$

b) $\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot \cos(\overline{u}, \overline{v}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

519. A–III, B–III, C–II, D–III, E–I

520. **a)** Summavektori on $\overline{a}+\overline{b}=(2\overline{i}+5\overline{j})+(\overline{i}-2\overline{j})=3\overline{i}+3\overline{j}$.

Koska $|3\overline{i}+3\overline{j}|=\sqrt{3^3+3^3}=3\sqrt{2}$, on vektorin $3\overline{i}+3\overline{j}$ suuntainen yksikkövektori

$$\frac{3\overline{i}+3\overline{j}}{3\sqrt{2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}\overline{i}+\frac{3}{3\sqrt{2}}\overline{j}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{i}+\overline{j}).$$

b) Muodostetaan ensin vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$.

$$\overline{AB}=(7-3)\overline{i}+(3-1)\overline{j}=4\overline{i}+2\overline{j}$$

$$\overline{CD}=(-3-1)\overline{i}+(-2-4)\overline{j}=-4\overline{i}-6\overline{j}$$

Lasketaan vektoreiden $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ pituudet ja välinen pistetulo.

$$|\overline{AB}|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$|\overline{CD}|=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=(4\overline{i}+2\overline{j})\cdot(-4\overline{i}-6\overline{j})=-16-12=-28$$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|}$$

$$\cos\alpha=\frac{-28}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{13}}$$

$$\cos\alpha=\frac{-7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}$$

$$\alpha=150{,}255...^\circ\approx 150{,}3^\circ$$

Vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ välinen kulma on 150,3°.

521. Muodostetaan vektorin $\overline{a}$ yksikkövektori.

$|\overline{a}| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (-2)^2} = \frac{5}{2}$, joten

$\overline{a}^0 = \frac{1}{|a|} \cdot \overline{a} = \frac{2}{5}(\frac{3}{2}\overline{i} - 2\overline{j}) = \frac{3}{5}\overline{i} - \frac{4}{5}\overline{j}$

$\overline{b} = -5\overline{a}^0 = -5(\frac{3}{5}\overline{i} - \frac{4}{5}\overline{j}) = -3\overline{i} + 4\overline{j}$

Olkoon kysytty piste P. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$\overline{OP} = 4\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{b} = 4\overline{i} + 3\overline{j} + (-3\overline{i} + 4\overline{j}) = \overline{i} + 7\overline{j}$

Pisteen $\overline{b}$ loppupiste on (1, 7).

522. Mediaani eli keskijana on jana, joka yhdistää kolmion kärjen ja vastakkaisen sivun keskipisteen. Olkoon mediaanien leikkauspiste P ja janan BC keskipiste Q. Piste P jakaa jokaisen mediaanin kärjestä lukien suhteessa 2:1, joten $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AQ}$.

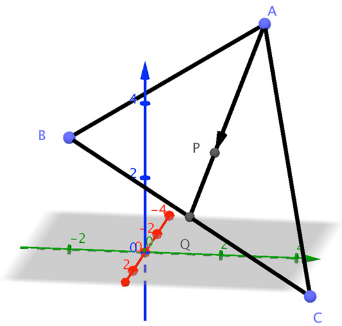
Piste $Q = (\frac{0+4}{2}, \frac{-2+5}{2}, \frac{3+0}{2}) = (2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, joten
$\overline{AQ} = (2-(-1))\overline{i} + (\frac{3}{2} -)\overline{j} + (\frac{3}{2} - 6)\overline{k} = 3\overline{i} - \frac{3}{2}\overline{j} - \frac{9}{2}\overline{k}$.

Pisteen P paikkavektori on

$$\begin{aligned}
\overline{OP} &= \overline{OA} + \overline{AP} \\
&= \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AQ} \\
&= -\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k} + \frac{2}{3}(3\overline{i} - \frac{3}{2}\overline{j} - \frac{9}{2}\overline{k}) \\
&= -\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k} + 2\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k} \\
&= \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}.
\end{aligned}$$

Mediaanien leikkauspiste on (1, 2, 3).

Huomautus: Pisteen P voi määrittää sopivilla ohjelmilla.



523. Lausutaan vektori PQ sivuvektoreiden avulla.

$$
\begin{aligned}
\overline{PQ} &= \overline{PA} + \overline{AD} + \overline{DQ} \\
&= \frac{2}{5}\overline{BA} + \overline{AD} + \frac{1}{5}\overline{DC} \\
&= \frac{2}{5}\overline{BA} + \overline{AD} + \frac{1}{5}\overline{AB} \\
&= -\frac{2}{5}\overline{AB} + \overline{AD} + \frac{1}{5}\overline{AB} \\
&= -\frac{1}{5}\overline{AB} + \overline{AD}
\end{aligned}
$$

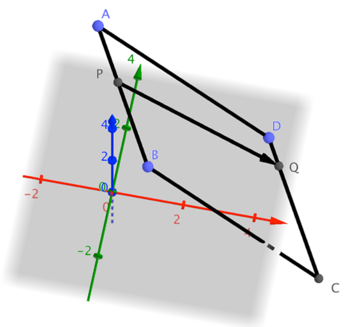
Muodostetaan tarvittavat sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.

$$\overline{AB} = (1-(-1))\overline{i} + (0-3)\overline{j} + (2-4)\overline{k} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - 2\overline{k}$$

$$\overline{AD} = (4-(-1))\overline{i} + (2-3)\overline{j} + (1-4)\overline{k} = 5\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$$

Siten

$$\overline{PQ} = -\frac{1}{5}\overline{AB} + \overline{AD} = -\frac{1}{5}(2\overline{i} - 3\overline{j} - 2\overline{k}) + (5\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}9 = \frac{23}{5}\overline{i} - \frac{2}{5}\overline{j} - \frac{13}{5}\overline{k}$$



524. Etsitään kertoimet r ja t siten, että $\overline{i}+7\overline{j}=r\overline{a}+t\overline{b}$.

$$\begin{aligned}\overline{i}+7\overline{j}&=r\overline{a}+t\overline{b}\\ \overline{i}+7\overline{j}&=r(2\overline{i}+3\overline{j})+t(-7\overline{i}+6\overline{j})\\ \overline{i}+7\overline{j}&=2r\overline{i}+3r\overline{j}-7t\overline{i}+6t\overline{j}\\ 1\cdot\overline{i}+7\overline{j}&=(2r-7t)\overline{i}+(3r+6t)\overline{j}\end{aligned}$$

Koska komponentteihinjako on yksikäsitteinen, tulee olla $1 = 2r - 7t$ ja $7 = 3r + 6t$. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases}1=2r-7t & \|\cdot(-3)\\ 7=3r+6t & \|\cdot 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}-3=-6r+21t\\ 14=6r+12t\end{cases}$$

$$\begin{aligned}11&=33t\\ t&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Kun $t=\frac{1}{3}$, $7=3r+6\cdot\frac{1}{3}$ eli $3r = 5$, josta $r=\frac{5}{3}$.

Siis $\overline{i}+7\overline{j}=\frac{5}{3}\overline{a}+\frac{1}{3}\overline{b}$.

525. Eräs vektoria $-\overline{i}+3\overline{j}$ vastaan kohtisuora vektori on $\overline{a}=3\overline{i}+\overline{j}$, sillä pistetulo $(-\overline{i}+3\overline{j})\cdot(3\overline{i}+\overline{j})=-3+3=0$.

Muodostetaan vektorin $\overline{a}$ yksikkövektori.

$|\overline{a}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, joten $\overline{a}^0=\frac{1}{|\overline{a}|}\cdot\overline{a}=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot(3\overline{i}+\overline{j})$.

Myös vektorin $\overline{a}^0$ vastavektori $-\overline{a}^0$ kelpaa, joten ehdot täyttävät vektorit ovat $\frac{1}{\sqrt{10}}(3\overline{i}+\overline{j})$ ja $-\frac{1}{\sqrt{10}}(3\overline{i}+\overline{j})$.

Huomautus:
Vektoria $a\overline{i}+b\overline{j}$ vastaan kohtisuora vektori saadaan aina vaihtamalla $\overline{i}$:n ja $\overline{j}$:n kertoimet ja toisen kertoimen etumerkki, sillä muodostettujen vektorien $a\overline{i}-b\overline{j}$ ja $-a\overline{i}+b\overline{j}$ pistetulo vektorin $a\overline{i}+b\overline{j}$ kanssa on nolla.

526. Olkoon kysytty vektori $P=(x, y)$. Määritetään pisteestä P pisteisiin A, B, C, D ja E piirretyt vektorit.

$\overline{PB}=(1-x)\overline{i}+(-2-y)\overline{j}$, $\overline{PC}=(2-x)\overline{i}+(1-y)\overline{j}$,
$\overline{PD}=(2-x)\overline{i}+(3-y)\overline{j}$ ja $\overline{PE}=(-2-x)\overline{i}+(-2-y)\overline{j}$

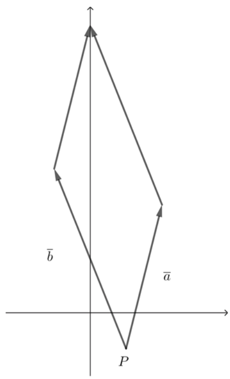
Lasketaan vektoreiden summa.

$$
\begin{aligned}
&\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PE}\\
&=(-1-x)\overline{i}+(1-y)\overline{j}+(1-x)\overline{i}+(-2-y)\overline{j}+(2-x)\overline{i}+(1-y)\overline{j}\\
&\quad+(2-x)\overline{i}+(3-y)\overline{j}+(-2-x)\overline{i}+(-2-y)\overline{j}\\
&=(2-5x)\overline{i}+(1-5y)\overline{j}
\end{aligned}
$$

Vektori $(2-5x)\overline{i}+(1-5y)\overline{j}$ on nollavektori, kun $2-5x=0$ ja $1-5y=0$. Tällöin $x=\frac{2}{5}$ ja $y=\frac{1}{5}$.

Kysytty tason piste on siis $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$.

527. Suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste Q puolittaa kummankin lävistäjän. Siten



$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})\\ &= \frac{1}{2}(\overline{i}+4\overline{j}+(-2\overline{i}+5\overline{j}))\\ &= \frac{1}{2}(-\overline{i}+9\overline{j})\\ &= -\frac{1}{2}\overline{i}+\frac{9}{2}\overline{j}.\end{aligned}$$

Pisteen Q koordinaatit saadaan paikkavektorista.

$$\overline{OQ} = \overline{OP}+\overline{PQ} = \overline{i}-\overline{j}+(-\frac{1}{2}\overline{i}+\frac{9}{2}\overline{j}) = \frac{1}{2}\overline{i}+\frac{7}{2}\overline{j}$$

Siis $\overline{PQ} = -\frac{1}{2}\overline{i}+\frac{9}{2}\overline{j}$ ja $Q = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$.

528. Vektorin $2\overline{i}+m\overline{j}$ pituus on $|2\overline{i}+m\overline{j}| = \sqrt{2^2+m^2} = \sqrt{m^2+4}$. Oletuksena on, että m = 2, 3, 4, ... eli m on jokin positiivinen kokonaisluku. Jotta pituus on pienempi kuin m + 1 tulee epäyhtälön $\sqrt{m^2+4} < m+1$ olla tosi kun m = 2, 3, 4, ... Epäyhtälön molemmat puolet ovat positiivisia, joten ne voidaan korottaa neliöön ja saatu epäyhtälö on yhtäpitävä alkuperäisen kanssa.

$$\begin{aligned}\sqrt{m^2+4} &< m+1\\ m^2+4 &< m^2+2m+1\\ 3 &< 2m\\ m &> \frac{3}{2}\end{aligned}$$

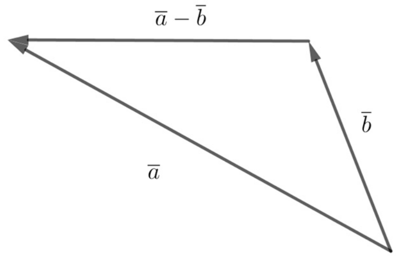
Epäyhtälö $\sqrt{m^2+4} < m+1$ toteutuu täsmälleen kun $m > \frac{3}{2}$, erityisesti se siis toteutuu kun m = 2, 3, 4, ... Täten on osoitettu, että vektorin $2\overline{i}+m\overline{j}$ pituus on pienempi kuin m + 1.

529. **a)** Kolmion kaksi sivuvektoria eli siten myös vastaavat sivut ovat yhtä pitkät. Lisäksi sivuvektorit ovat toisaan vastaan kohtisuorassa, joten kyseisten sivujen välillä on 90° kulma. Kolmio on siis tasakylkinen ja suorakulmainen. Kolmion kantakulmat ovat 45°.

b) Vektori $\overline{a}-\overline{b}$ on kolmion kolmas sivuvektori. Koska sivuvektorien pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen on kolmio suorakulmainen. Sivujen pituuksista ja muista kulmista ei voida sanoa mitään.

c) Kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä eli kolmio on tasasivuinen. Tasasivuisena kolmion kaikki kulmat ovat 60°.

d) Jos kahden vektorin pistetulo on negatiivinen, on näiden vektorien välinen kulma tylppä. Vektorit $\overline{a}-\overline{b}$ ja $-\overline{b}$ ovat samasta kärjestä lähtevät sivuvektorit. Koska näiden vektoreiden välinen pistetulo on tylppä, on kolmio tylppäkulmainen.



530. Tulkitaan valonsäteiden eteneminen suorina.

Pisteen $P_1 = (10, 0, 0)$ kautta vektorin $\overline{v}_1 = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}$ suuntaisesti kulkevan suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 0 + 4t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 3t \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 4t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3t \end{cases}$$

Pisteen $P_2 = (310, 480, 400)$ kautta vektorin $\overline{v}_2 = -4\overline{i} - 6\overline{j} - 5\overline{k}$ suuntaisesti kulkevan suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 310 - 4r \\ y = 480 - 6r \qquad (r \in \mathbb{R}) \\ z = 400 - 5r \end{cases}$$

Selvitetään leikkaavatko suorat eli tutkitaan toteutuuko yhtälöryhmä $10 + 2t = 310 - 4r$, $4t = 480 - 6r$, $3t = 400 - 5r$ joillakin r:n ja t:n arvolla.

$$\begin{cases} 10 + 2t = 310 - 4r \\ 4t = 480 - 6r \\ 3t = 400 - 5r \end{cases}$$

Yhtälöryhmän kaksi alempaa yhtälöä muodostavat yhtälöparin

$$\begin{cases} 4t + 6r = 480 \\ 3t + 5r = 400 \end{cases}$$

Tämän yhtälöparin ratkaisu on $r = 80$ ja $t = 0$. Nämä eivät kuitenkaan toteuta ensimmäistä yhtälöä, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua eivätkä valonsäteet siis kohtaa toisiaan.

531. Tulkitaan valonsäteiden eteneminen suorina.

Pisteen $A = (1, -2, 3)$ kautta vektorin $\overline{u} = 2\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$ suuntaisesti kulkevan suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

Pisteen $B = (9, -1, -12)$ kautta vektorin $\overline{v} = -\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$ suuntaisesti kulkevan suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 9 - r \\ y = -1 - 2r \quad (r \in \mathbb{R}) \\ z = -12 + 3r \end{cases}$$

Määritetään suorien leikkauspiste eli ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 1 + 2t = 9 - r \\ -2 - t = -1 - 2r \\ 3 - 3t = -12 + 3r. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = 2$ ja $t = 3$. Parametrin arvoa $r = 2$ vastaava piste on $(9 - 2, -1 - 2 \cdot 2, -12 + 3 \cdot 2) = (7, -5, -6)$ ja parametrin arvoa $t = 3$ vastaava piste on $(1 + 2 \cdot 3, -2 - 3, 3 - 3 \cdot 3) = (7, -5, -6)$. On näytetty, että suorat leikkaavat toisensa ja että leikkauspiste on $(7, -5, -6)$.

532. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun $\overline{a} = x\overline{b}$ jollakin luvulla $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \overline{a} &= x\overline{b} \\ 5\overline{i} - 2\overline{j} &= x(3\overline{i} + t\overline{j}) \\ 5\overline{i} - 2\overline{j} &= 3x\overline{i} + xt\overline{j} \end{aligned}$$

Koska komponentteihinjako on yksikäsitteinen, on $5 = 3x$ ja $-2 = xt$.
Syntyy siis yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x = 5 \\ xt = -2 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $x = \frac{5}{3}$ ja $t = -\frac{6}{5}$.

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset, kun $t = -\frac{6}{5}$.

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, kun niiden välinen pistetulo on 0 eli $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{b} &= 0 \\ (5\overline{i} - 2\overline{j}) \cdot (3\overline{i} + t\overline{j}) &= 0 \\ 15 - 2t &= 0 \\ t &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorat, kun $t = \frac{15}{2}$.

533. Olkoon piste $P = (x, y)$. Piste $A = (1, 2)$, joten $\overline{AB} = (x-1)\overline{i} + (y-2)\overline{j}$.

Kulma OAB on suora, kun vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AO}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. $\overline{AB}$ ja $\overline{AO}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan myös silloin, kun vektorin $\overline{AO}$ vastavektori $\overline{OA}$ ja $\overline{AB}$ ovat kohtisuorassa. Tällöin vektoreiden välinen pistetulo on 0 eli

$$\begin{aligned} \overline{AB}\cdot\overline{OA} &= 0 \\ ((x-1)\overline{i} + (y-2)\overline{j})\cdot(\overline{i} + 2\overline{j}) &= 0 \\ (x-1)\cdot 1 + (y-2)\cdot 2 &= 0 \\ x + 2y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Vektorin $\overline{OA}$ pituus on $|\overline{OA}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ja vektorin $\overline{OB}$ pituus on $|\overline{OB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Koska vektorin $\overline{OB}$ pituus on kaksi kertaa vektorin $\overline{OA}$ pituus, on $|\overline{OB}| = 2\cdot|\overline{OA}|$ eli $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{5}$. Muodostuu yhtälöpari

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

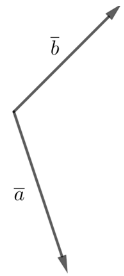
Yhtälöparin ratkaisut ovat
$x = 1 - 2\sqrt{3}$ ja $y = 2 + \sqrt{3}$ tai $x = 1 + 2\sqrt{3}$ ja $y = 2 - \sqrt{3}$, joten

$B = (1 - 2\sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3})$ tai $B = (1 + 2\sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3})$.

534. **a)** Jos vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ asetetaan alkamaan samasta pisteestä ovat $-\overline{b}+\overline{a}$ ja $-\overline{a}+\overline{b}$ mahdollisia sivuvektoreita. Siis

$\overline{c}=-\overline{b}+\overline{a}=-(2\overline{i}+2\overline{j})+(\overline{i}-3\overline{j})=-\overline{i}-5\overline{j}$ tai

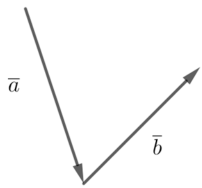
$\overline{c}=-\overline{a}+\overline{b}=-(-\overline{b}+\overline{a})=\overline{i}+5\overline{j}.$



Jos vektori $\overline{b}$ asetetaan alkamaan vektorin $\overline{a}$ loppupisteestä, ovat vektorit $\overline{a}+\overline{b}$ ja $-\overline{b}-\overline{a}$ mahdollisia sivuvektoreita. Siis

$\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}=(\overline{i}-3\overline{j})+(2\overline{i}+2\overline{j})=3\overline{i}-\overline{j}$ tai

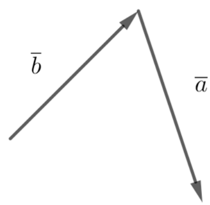
$\overline{c}=-\overline{b}-\overline{a}=-3\overline{i}+\overline{j}.$



Jos vektori $\overline{a}$ asetetaan alkamaan vektorin $\overline{b}$ loppupisteestä, ovat vektorit $\overline{b}+\overline{a}$ ja $-\overline{a}-\overline{b}$ mahdollisia sivuvektoreita. Siis

$\overline{c}=\overline{b}+\overline{a}=(2\overline{i}+2\overline{j})+(\overline{i}-3\overline{j})=3\overline{i}-\overline{j}$ tai

$\overline{c}=-\overline{a}-\overline{b}=-3\overline{i}+\overline{j}.$



Vektoreista $\overline{a},\overline{b}$ ja $\overline{c}$ voidaan muodostaa kolmio, kun

$\overline{c}=\overline{i}+5\overline{j}$, $\overline{c}=-\overline{i}-5\overline{j}$, $\overline{c}=3\overline{i}-\overline{j}$ ja $\overline{c}=-3\overline{i}+\overline{j}$

b) Pisteen P y- ja z-koordinaatit ovat 0, joten $P = (x, 0, 0)$.
Jana AB näkyy suorassa kulmassa, jos kulma P on suora eli jos vektorit $\overline{PA}$ ja $\overline{PB}$ ovat kohtisuorassa. Näin tapahtuu, kun $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 0$ eli kun

$$((2-x)\overline{i} + (3-0)\overline{j} + (-4-0)\overline{k}) \cdot ((4-x)\overline{i} + (0-0)\overline{j} + (1-0)\overline{k}) = 0$$
$$((2-x)\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}) \cdot ((4-x)\overline{i} + \overline{k}) = 0$$
$$(2-x)(4-x) - 4 = 0$$
$$8 - 6x + x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

Yhtälön $x^2 - 6x + 4 = 0$ ratkaisut ovat $x = 3 - \sqrt{5}$ ja $x = 3 + \sqrt{5}$.

Jana AB näkyy suorassa kulmassa pisteissä $P = (3 - \sqrt{5}, 0)$ ja $P = (3 + \sqrt{5}, 0)$.

535. Paikkavektorin $\overline{r} = (2t-1)\overline{i} + (3t+\frac{1}{2})\overline{j}$ loppupiste on $(2t-1, 3t+\frac{1}{2})$.

Tämä piste on paraabelilla $y = \frac{1}{2}x^2$, jos se toteuttaa paraabelin yhtälön.

Muodostetaan ja ratkaistaan syntyvä yhtälö.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}x^2 \\
3t + \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}(2t-1)^2 \quad \| \cdot 2 \\
6t + 1 &= 4t^2 - 4t + 1 \\
4t^2 - 10t &= 0 \\
2t(2t-5) &= 0 \\
2t = 0 \quad &\text{tai} \quad 2t - 5 = 0 \\
t = 0 \quad &\text{tai} \quad t = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Loppupiste on paraabelilla, jos $t = 0$ tai jos $t = \frac{5}{2}$.

Näitä t:n arvoja vastaa paikkavektorit

$\overline{r} = (2\cdot 0 - 1)\overline{i} + (3\cdot 0 + \frac{1}{2})\overline{j} = -\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j}$ ja

$\overline{r} = (2\cdot \frac{5}{2} - 1)\overline{i} + (3\cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2})\overline{j} = 4\overline{i} + 8\overline{j}$.

Vektoreiden $-\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j}$ ja $4\overline{i} + 8\overline{j}$ välinen kulma saadaan pistetulon avulla.

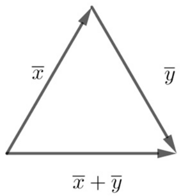
$$|-\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j}| = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|4\overline{i} + 8\overline{j}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$(-\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j}) \cdot (4\overline{i} + 8\overline{j}) = -4 + 4 = 0$$

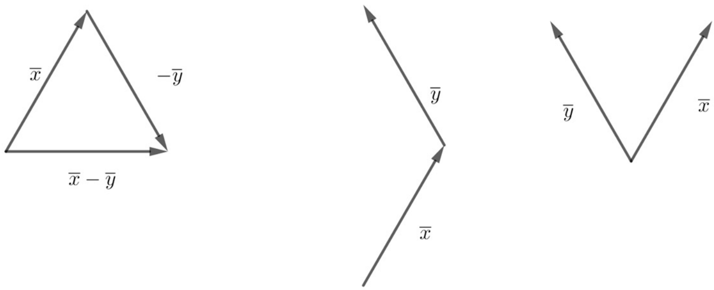
Vektoreiden välinen kulma on 90°.

536. **a)** Jos vektoreilla $\overline{x}$, $\overline{y}$ ja $\overline{x}+\overline{y}$ on sama pituus, muodostavat ne tasasivuisen kolmion.



Jos $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ asetetaan alkamaan samasta pisteestä, muodostuu niiden välille 120° suuruinen kulma (kulman 60° vieruskulma).

b) Jos vektoreilla $\overline{x}$, $\overline{y}$ ja $\overline{x}-\overline{y}$ on sama pituus, muodostavat ne tasasivuisen kolmion.



Jos $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ asetetaan alkamaan samasta pisteestä, muodostuu niiden välille 60° suuruinen kulma.

537. Vektori $2\overline{i}+3\overline{j}$ on suoran normaalivektori. Vektoria $2\overline{i}+3\overline{j}$ vastaa kulmakerroin $k_n=\frac{3}{2}$. Jos suoran suuntavektoria vastaa kulmakerroin k, toteuttavat kulmakertoimet k ja k_n yhtälön $k\cdot k_n=-1$, josta $k=-\frac{2}{3}$.

Suoran yhtälö on $y-y_0=k(x-x_0)$, kun $(x_0, y_0) = (3, 1)$ ja $k=-\frac{2}{3}$. Siten

$$\begin{aligned} y-3&=-\frac{2}{3}(x-1) \quad \|\cdot 3 \\ 3y-9&=-2(x-1) \\ 3y-9&=-2x+2 \\ 2x+3y-11&=0 \end{aligned}$$

Pisteen (2, 2) etäisyys suorasta $2x+3y-11=0$ saadaan kaavalla
$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, missä $a = 2$, $b = 3$ ja $(x_0, y_0) = (2, 2)$. Siten
$$d=\frac{|2\cdot 2+3\cdot 2-11|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

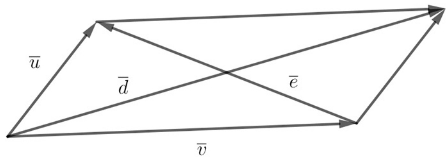
Huomautus (toinen tapa suoran yhtälön määrittämiseksi):
Jos xy-tason suoran normaalivektori on $a\overline{i}+b\overline{j}$, suoran normaalimuotoinen yhtälö on $ax+by+c=0$ jollakin c. Vakio c saadaan selville sijoittamalla yhtälöön jokin tunnettu suoran piste ja ratkaisemalla c tästä yhtälöstä.

Tässä tehtävässä yhtälö on siis $2x+3y+c=0$. Koska piste (3, 1) on suoralla, syntyy yhtälö $2\cdot 1+3\cdot 3+c=0$, josta $c=-11$. Suoran normaalimuotoinen yhtälö on siis $2x+3y+11=0$.

538. Suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste puolittaa lävistäjät. Jos suunnikkaan sivuvektorit ovat $\overline{u}$ ja $\overline{v}$, niin

$\overline{u} = \frac{1}{2}\overline{d} + \frac{1}{2}\overline{e} = \frac{1}{2}(12\overline{i} + 8\overline{j}) + \frac{1}{2}(4\overline{i} - 6\overline{j}) = 6\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{i} - 3\overline{j} = 8\overline{i} + \overline{j}$ ja

$\overline{v} = \frac{1}{2}\overline{d} - \frac{1}{2}\overline{e} = \frac{1}{2}(12\overline{i} + 8\overline{j}) - \frac{1}{2}(4\overline{i} - 6\overline{j}) = 6\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{i} + 3\overline{j} = 4\overline{i} + 7\overline{j}.$



Koska $|\overline{u}| = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$ ja $|\overline{v}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$, ovat suunnikkaan sivuvektorit ja siten myös kaikki sivut yhtä pitkä ja suunnikas on neljäkäs.

539. Suoran kulmakerroin on $k=-\frac{2}{3}$, joten suoran yhtälö on $y=-\frac{2}{3}x+b$ jollakin vakiolla *b*. Suora leikkaa *y*-akselin pisteessä (0, *b*). Suoran ja *x*-akselin leikkauspiste saadaan yhtälöstä $-\frac{2}{3}x+b=0$, josta $x=\frac{3b}{2}$.

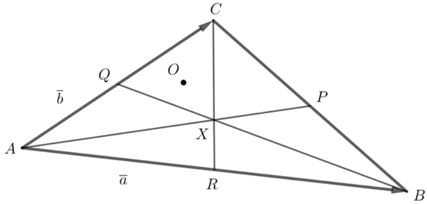
Kolmion pinta-ala on siis toisaalta $\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|\frac{3b}{2}|$ ja toisaalta tiedetään, että se on 15. Syntyy siis yhtälö $\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|\frac{3b}{2}|=15$. Ratkaistaan tästä vakio *b*.

$$\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|\frac{3b}{2}|=15$$
$$\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|\frac{3}{2}b|=15$$
$$\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|\frac{3}{2}|\cdot|b|=15$$
$$\frac{3}{4}\cdot|b|\cdot|b|=15 \quad \|\cdot\frac{4}{3}$$
$$|b^2|=20$$
$$b^2=20$$
$$b=\pm2\sqrt{5}$$

Siis $y=-\frac{2}{3}x+2\sqrt{5}$ eli $2x+3y-6\sqrt{5}$ tai

$y=-\frac{2}{3}x-2\sqrt{5}$ eli $2x+3y+6\sqrt{5}$.

540. Janat AP, CR ja BQ ovat kolmion mediaanit ja ne leikkaavat toisensa samassa pisteessä joka jakaa jokaisen kolmion kärjestä lukien suhteessa 2:1. Merkitään leikkauspistettä kirjaimella X.



Nyt $\overline{AX} = \frac{2}{3}\overline{AP}$ ja $\overline{XP} = \frac{1}{3}\overline{AP}$, $\overline{BX} = \frac{2}{3}\overline{BQ}$ ja $\overline{XQ} = \frac{1}{3}\overline{BQ}$ sekä $\overline{CX} = \frac{2}{3}\overline{CR}$ ja $\overline{XR} = \frac{1}{3}\overline{CR}$.

$$\begin{aligned}\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC} &= (\overline{OX}+\overline{XA})+(\overline{OX}+\overline{XB})+(\overline{OX}+\overline{XC})\\ &= 3\overline{OX}+\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}\\ &= 3\overline{OX}-\frac{2}{3}\overline{AP}-\frac{2}{3}\overline{BQ}-\frac{2}{3}\overline{CR}\\ &= 3\overline{OX}-\frac{2}{3}(\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{OP}+\overline{OQ}+\overline{OR} &= (\overline{OX}+\overline{XP})+(\overline{OX}+\overline{XQ})+(\overline{OX}+\overline{XR})\\ &= 3\overline{OX}+\overline{XP}+\overline{XQ}+\overline{XR}\\ &= 3\overline{OX}+\frac{1}{3}\overline{AP}+\frac{1}{3}\overline{BQ}+\frac{1}{3}\overline{CR}\\ &= 3\overline{OX}+\frac{1}{3}(\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR})\end{aligned}$$

Tarkastellaan mitä on summa $\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR}$. Kun merkitään $\overline{AB}=\overline{a}$ ja $\overline{AC}=\overline{b}$ saadaan

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR} &= (\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{BC})+(-\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b})+(-\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{a})\\ &= \overline{a}+\frac{1}{2}(-\overline{a}+\overline{b})-\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}-\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{a}\\ &= \overline{0}.\end{aligned}$$

Siis $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3\overline{OX}$ ja $\overline{OP}+\overline{OQ}+\overline{OR}=3\overline{OX}$, joten vektorisummat ovat yhtä suuret.

541. **a)** $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos(\overline{a}, \overline{b}) = 4 \cdot 2 \cdot \cos 90° = 8 \cdot 0 = 0$

b) $\overline{a} \cdot \overline{d} = |\overline{a}| \cdot |\overline{d}| \cdot \cos(\overline{a}, \overline{d}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 180° = 16 \cdot (-1) = -16$

c) Koska $|\overline{c}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$, on

$$\overline{a} \cdot \overline{c} = |\overline{a}| \cdot |\overline{c}| \cdot \cos(\overline{a}, \overline{c}) = 4 \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{4}{\sqrt{20}} = 16.$$

542. **a)** Paraabelia siirretään kaksi yksikköä ylöspäin. Näin tapahtuu, kun käyrän jokaisen pisteen y-koordinaattiin lisätään luku 2 eli pisteestä $(x, y) = (x, x^2)$ tulee piste $(x, x^2 + 2)$. Käyrän yhtälö on $y = x^2 + 2$.

b) Paraabelia siirretään kolme yksikköä oikealle. Näin tapahtuu, kun käyrän jokaiseen x-koordinaattiin lisätään luku 3 eli pisteestä $(x, y) = (x, x^2)$ tulee piste $(x + 3, x^2)$. Tämä on luontevampi esittää muodossa $(x, (x - 3)^2)$ eli käyrän yhtälö on $y = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$.

c) Yhdistetään a- ja b-kohdan päättelyt, jolloin käyrän yhtälö on $y = (x - 3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 11$.

543. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ voidaan asettaa alkamaan mistä pisteestä tahansa, joten valitaan origo. Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ päätepisteet ovat nyt $(1, 1)$ ja $(-2, -3)$. Näiden pisteiden kautta piirretyn suoran kulmakerroin on $k = \frac{-3-1}{-2-1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ ja yhtälö $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 1)$, joka normaalimuodossa on $4x - 3y - 1 = 0$. Lasketaan origon etäisyys tästä suorasta, jolloin saadaan kysytyn korkeusjanan pituus.

$$\frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}$$

Korkeus janan pituus on $\frac{1}{5}$.

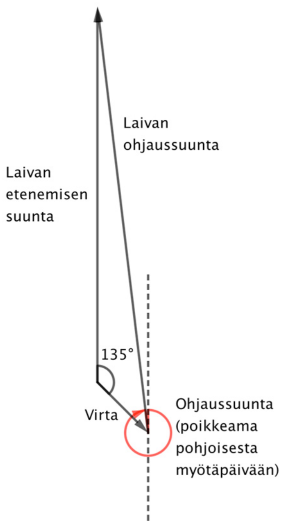
544. Koska vektori $2\overline{i} - \overline{j} + t(\overline{i} + 2\overline{j})$ alkaa origosta kyseessä on paikkavektori. Määritetään sen päätepiste (x, y).

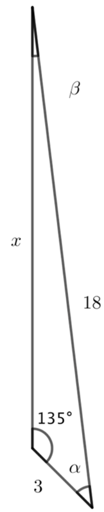
$$2\overline{i} - \overline{j} + t(\overline{i} + 2\overline{j}) = 2\overline{i} - \overline{j} + t\overline{i} + 2t\overline{j} = (2 + t)\overline{i} + (-1 + 2t)\overline{j}$$

Siten päätepisteen koordinaatit ovat
$x = 2 + t$ ja $y = -1 + 2t$.

Koska $t = x - 2$, on
$y = -1 + 2(x - 2)$ eli $2x - y - 5 = 0$.

545. Laivaa täytyy ohjata likimain pohjoiseen, pohjoisesta hieman luodetta kohti. Jos merivirtaa kuvaavan suuntavektorin päätepisteestä piirretään vektori, joka kuvaa laivan oikeaa ohjaussuuntaa ja yhdistetään virran alkupiste sekä ohjaussuunnan loppupiste, syntyy kolmio, jonka kolmas sivu on laivan etenemisen suunta eli pohjoisen suunta. Tässä kolmiossa on yksi 135° kulma (90° + 45°). Merivirtaa kuvaavan vektorin pituus on 3 ja laivan ohjaussuuntaa kuvaavan vektorin pituus on 18.





Syntyvästä kolmiosta voidaan ratkaista kulma β sinilauseella:

$\dfrac{3}{\sin\beta} = \dfrac{18}{\sin 135°}$, josta $\beta = 6{,}768...°$

Siten $\alpha = 180° - 135° - \beta = 38{,}231...° \approx 38°$.

Ohjaussuunnan poikkeama pohjoisen suunnasta vastapäivään on $90° - 45° - 38° = 7°$, joten kompassisuunta on $360° - 7° = 353°$.

Laivan etenemisen nopeus eli x saadaan esimerkiksi kosinilauseella yhtälöstä $x^2 = 3^2 + 18^2 - 2 \cdot 3 \cdot 18 \cdot \cos 38{,}231...°$, josta $x = 15{,}75... \approx 16$.

On ohjattava suuntaan 353°, jolloin laiva etenee pohjoista kohti 16 solmun vauhdilla.

546. Tetraedri on säännöllinen, jos sen kaikki särmät ovat yhtä pitkät.
Lasketaan särmävektoreiden pituudet.

$$|\bar{a}| = |\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j} + \bar{k}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|\bar{b}| = |-\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j} + \bar{k}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|\bar{c}| = \left|\frac{2}{3}(2\sqrt{2}\bar{j} - \bar{k})\right| = \left|\frac{4\sqrt{2}}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}\right|$$
$$= \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{32}{9} + \frac{4}{9}} = 2$$

Muodostetaan kolme muuta särmävektoria.

$$\bar{d} = -\bar{a} + \bar{b} = -(\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j} + \bar{k}) + (-\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j} + \bar{k}) = -2\bar{i}$$

$$\bar{e} = -\bar{b} + \bar{c} = -(-\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j} + \bar{k}) + \frac{2}{3}(2\sqrt{2}\bar{j} - \bar{k})$$
$$= \bar{i} - \sqrt{2}\bar{j} - \bar{k} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k} = \bar{j} + \frac{\sqrt{2}}{3}\bar{j} - \frac{5}{3}\bar{k}$$

$$\bar{f} = -\bar{a} + \bar{c} = -(\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j} + \bar{k}) + \frac{4\sqrt{2}}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}$$
$$= -\bar{i} - \sqrt{2}\bar{j} - \bar{k} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k} = -\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{3}\bar{j} - \frac{5}{3}\bar{k}$$

Lasketaan näiden pituudet.

$$|\bar{d}| = |-2\bar{i}| = 2$$

$$|\bar{e}| = \left|\bar{j} + \frac{\sqrt{2}}{3}\bar{j} - \frac{5}{3}\bar{k}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|\bar{f}| = \left|-\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{3}\bar{j} - \frac{5}{3}\bar{k}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Koska jokainen särmävektori on yhtä pitkä, on tetraedri säännöllinen.

Huomatus:
Pelkästään annettujen vektorien $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ pituuksien laskeminen ei riitä.

547. Koska vektori $\overline{b}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{i}$ kanssa, on $\overline{b} = x\overline{i}$ jollakin reaaliluvulla x.

Olkoon $\overline{a} = y\overline{i} + z\overline{j}$, missä y ja z ovat jotkin reaaliluvut.

Koska $\overline{a} + \overline{b} = 4\overline{i} + \overline{j}$, saadaan yhtälö:

$$\begin{aligned} \overline{a} + \overline{b} &= 4\overline{i} + \overline{j} \\ (y\overline{i} + z\overline{j}) + x\overline{i} &= 4\overline{i} + \overline{j} \\ (x + y)\overline{i} + z\overline{j} &= 4\overline{i} + \overline{j} \end{aligned}$$

Tästä syntyy yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ z = 1. \end{cases}$$

Koska $\overline{a} \cdot \overline{b} = 4$, niin $(y\overline{i} + z\overline{j}) \cdot x\overline{i} = 4$, josta $xy = 4$.

$x + y = 4$, josta $y = 4 - x$

Yhtälö $xy = 4$ saa muodon $x(4 - x) = 4$ ja edelleen $-x^2 + 4x - 4 = 0$.

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 4 &= 0 \qquad \| \cdot (-1) \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ (x - 2)^2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Koska $x = 2$, on $y = 4 - 2 = 2$.

Kysytyt vektorit ovat $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i}$.

548. Tasojen välinen kulma on enintään 90° ja se määritetään tasojen normaalivektoreiden välisen kulman avulla.

Tason $2x + y - z + 1 = 0$ eräs normaalivektori on $\overline{n}_1 = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$.
Tason $6x + 3y + 2z - 10 = 0$ eräs normaalivektori on $\overline{n}_2 = 6\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$.

Lasketaan vektoreiden $\overline{n}_1$ ja $\overline{n}_2$ välinen kulma.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}$$
$$\cos\alpha = \frac{12 + 3 - 2}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{36+9+4}}$$
$$\cos\alpha = \frac{13}{\sqrt{6} \cdot 7}$$
$$\cos\alpha = 0{,}7581...$$
$$\alpha = 40{,}696...° \approx 40{,}7°$$

Tasojen välinen kulma on 40,7°

Huomautus:
Jos normaalivektoreiden välinen kulma on suurempi kuin 90°, osoittavat ne eri puolille tasoja. Tasojen välinen kulma saadaan tällöin vähentämällä tästä kulmasta 90°. Hahmottele kuva!

549. Vektori $\overline{u} = t\overline{b}$ jollekin luvulle t ja $\overline{v} \cdot \overline{b} = 0$. Lisäksi on oltava $\overline{a} = \overline{u} + \overline{v}$, josta $\overline{v} = \overline{a} - \overline{u} = \overline{a} - t\overline{b}$.

Sijoitetaan $\overline{v} = \overline{a} - t\overline{b}$ yhtälöön $\overline{v} \cdot \overline{b} = 0$ ja ratkaistaan t.

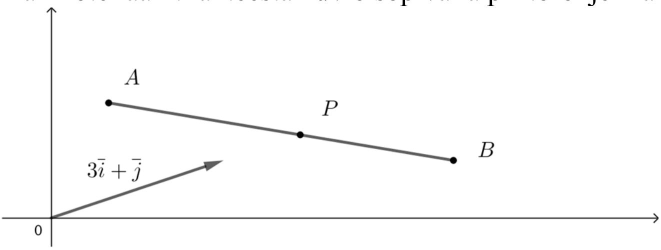
$$\begin{aligned} \overline{v} \cdot \overline{b} &= 0 \\ (\overline{a} - t\overline{b}) \cdot \overline{b} &= 0 \\ \overline{a} \cdot \overline{b} - t\overline{b} \cdot \overline{b} &= 0 \\ (8-5-6) - t(4+1+4) &= 0 \\ -3-9t &= 0 \\ t &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Siis $\overline{a} = \overline{u} + \overline{v}$, missä

$\overline{u} = t\overline{b} = -\frac{1}{3}\overline{b} = -\frac{1}{3}(2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}) = -\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{1}{3}\overline{j} + \frac{2}{3}\overline{k}$ ja

$\overline{v} = \overline{a} - \overline{u} = (4\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}) - (-\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{1}{3}\overline{j} + \frac{2}{3}\overline{k}) = \frac{14}{3}\overline{i} - \frac{14}{3}\overline{j} + \frac{7}{3}\overline{k}$.

550. Hahmotellaan tilanteesta kuvio sopivalla piirto-ohjelmalla.



Lausutaan $\overline{OP}$ aluksi eri tavoilla.
Toisaalta

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OA}+\overline{AP}\\ &= (\overline{i}+2\overline{j})+r\cdot\overline{AB}\\ &= (\overline{i}+2\overline{j})+r\cdot((7-1)\overline{j}+(1-2)\overline{j})\\ &= \overline{i}+2\overline{j}+6r\overline{j}-r\overline{j}\\ &= (1+6r)\overline{i}+(2-r)\overline{j},\end{aligned}$$

missä r on jokin reaaliluku.

Toisaalta $\overline{OP}=t(3\overline{i}+\overline{j})=3t\overline{i}+t\overline{j}$, missä t on jokin reaaliluku.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan r ja t. Luku r on kysytty janan AB jakosuhde.

$$(1+6r)\overline{i}+(2-r)\overline{j}=3t\overline{i}+t\overline{j}$$

Komponentteihinjako on yksikäsitteinen, joten $1 + 6r = 3t$ ja $2 - r = t$.
Ratkaistaan syntyvä yhtälöpari.

$$\begin{cases}1+6r=3t\\ 2-r=t \qquad \|\cdot(-3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+6r=3t\\ -6+3r=-3t\end{cases}$$

$$\begin{aligned}-5+9r&=0\\ r&=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

Kertoimesta $r=\dfrac{5}{9}$ nähdään jako-osien yhteismäärä 9, AP:n jako-osien lukumäärä 5 sekä PB:n jako-osien lukumäärä 4, joten suhde on 5:4.

551. Vektorin $4\overline{i}+3\overline{j}$ pituus on $\sqrt{4^2+3^2}=5,$ joten ensin siirrytään vektorin $2\cdot\frac{4\overline{i}+3\overline{j}}{5}=\frac{2}{5}(4\overline{i}+3\overline{j})=\frac{8}{5}\overline{i}+\frac{6}{5}\overline{j}$ verran.

Vektorin $5\overline{i}-12\overline{j}$ pituus on $\sqrt{5^2+(-12)^2}=13,$ joten tämän jälkeen siirrytään vektorin
$t\cdot\frac{5\overline{i}-12\overline{j}}{13}=\frac{t}{13}(5\overline{i}-12\overline{j})=\frac{5}{13}t\overline{i}-\frac{12}{13}t\overline{j}$ verran.

Olkoon kysytty piste $P = (x, y)$, jolloin
$\overline{OP}=\frac{8}{5}\overline{i}+\frac{6}{5}\overline{j}+\frac{5}{13}t\overline{i}-\frac{12}{13}t\overline{j}=(\frac{8}{5}+\frac{5}{13}t)\overline{i}+(\frac{6}{5}-\frac{12}{13}t)\overline{j}.$

On siis $x=\frac{8}{5}+\frac{5}{13}t$ ja $y=\frac{6}{5}-\frac{12}{13}t.$ Kyseessä on suoran yhtälö, joka voidaan esittää yhtälöparina

$$\begin{cases} x=\frac{8}{5}+\frac{5}{13}t \\ y=\frac{6}{5}-\frac{12}{13}t, \end{cases}$$

josta voidaan lukea eräs suoran piste $(\frac{8}{5},\frac{6}{5})$ sekä suuntavektori

$\frac{5}{13}\overline{i}-\frac{12}{13}\overline{j}.$

Suuntavektoria vastaa kulmakerroin $k=-\frac{12}{13}:\frac{5}{13}=-\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{5}=-\frac{12}{5}.$

Suoran yhtälö on siten

$$y-y_0=k(x-x_0)$$
$$y-\frac{6}{5}=-\frac{12}{5}(x-\frac{8}{5})$$
$$60x+25y-126=0$$

552. **a)** Tason yhtälö on $ax + by + cz + d = 0$, missä a, b, c ja d ovat jotkin vakiot. Tason $ax + by + cz + d = 0$ ja xy-tason leikkaussuora on $ax + by + d = 0$, sillä xy-tason pisteillä $z = 0$.
Siten kyseessä olevan tason yhtälössä $a = 1$, $b = 2$ ja $d = -3$ eli yhtälö on $x + 2y + cz - 3 = 0$.

Tuntematon vakio c saadaan ratkaisua sen tiedon perusteella, että piste $(2, 4, 6)$ toteuttaa yhtälön eli yhtälö $2 + 2 \cdot 4 + c \cdot 6 - 3 = 0$ tosi. Tästä saadaan, että $c = -\frac{7}{6}$. Tason yhtälö on siis $x + 2y - \frac{7}{6}z - 3 = 0$ eli $6x + 12y - 7z - 18 = 0$.

b) Jokaisessa x-akselin pisteessä $y = 0$ ja $z = 0$. Sijoitetaan nämä luvut tason yhtälöön, jolloin saadaan $6x - 18 = 0$ eli $x = 3$.
Taso leikkaa x-akselin pisteessä $(3, 0, 0)$.

y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$ ja $z = 0$, joten $12y - 18 = 0$, josta $y = \frac{3}{2}$. Taso leikkaa y-akselin pisteessä $(0, \frac{3}{2}, 0)$.

z-akselin leikkauspisteessä $x = 0$ ja $y = 0$, joten $-7z - 18 = 0$, josta $z = -\frac{18}{7}$. Taso leikkaa z-akselin pisteessä $(0, 0, -\frac{18}{7})$.

553. Suora on kohtisuorassa tasoa vastaan, jos se on kohtisuorassa kahta tason erisuuntaista vektoria vastaan. Muodostetaan suoran suuntavektori.

$$\overline{s} = (4-2)\overline{i} + (\frac{1}{2} - 11\frac{1}{2})\overline{j} + (-1-2)\overline{k} = 2\overline{i} - 11\overline{j} - 3\overline{k}$$

Muodostetaan kaksi pisteestä (1, 1, 1) lähtevää erisuuntaista tason vektoria $\overline{u}$ ja $\overline{v}$.

$$\overline{u} = (5-1)\overline{i} + (2-1)\overline{j} + (0-1)\overline{k} = 4\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$$

$$\overline{v} = (4-1)\overline{i} + (1-1)\overline{j} + (3-1)\overline{k} = 3\overline{i} + 2\overline{k}$$

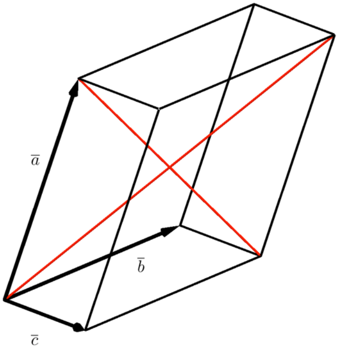
Lasketaan vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{s}$ sekä $\overline{v}$ ja $\overline{s}$ välinen pistetulo.

$$\overline{s} \cdot \overline{u} = (2\overline{i} - 11\overline{j} - 3\overline{k}) \cdot (4\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}) = 8 - 11 + 3 = 0$$

$$\overline{s} \cdot \overline{v} = (2\overline{i} - 11\overline{j} - 3\overline{k}) \cdot (3\overline{i} + 2\overline{k}) = 6 - 6 = 0$$

Koska pistetulot ovat nollia, on suoran suuntavektori kohtisuorassa kahta tasolla olevaa vektoria vastaan ja siten myös tasoa vastaan.

554. Piirretään tilannetta havainnollistava kuva.



Lävistäjävektorit ovat
$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=(2\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k})+(-\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k})+(3\overline{i}+\overline{j})=4\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k}$

ja
$-\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=-(2\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k})+(-\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k})+(3\overline{i}+\overline{j})=3\overline{j}-3\overline{k}$.

Lasketaan lävistäjävektoreiden pistetulo.
$(4\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k})\cdot(3\overline{j}-3\overline{k})=12-12=0$

Koska lävistäjävektoreiden pistetulo on 0, ovat ne kohtisuorassa.

555. Lasketaan kolmion sivuvektoreiden $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $-\overline{a}+\overline{b}$ pituudet.

$|\overline{a}| = |t\overline{i} + 2\overline{j}| = \sqrt{t^2+4}$

$|\overline{b}| = |-2\overline{i} + (t-2)\overline{j}| = \sqrt{4+(t-2)^2} = \sqrt{4+t^2-4t+4} = \sqrt{t^2-4t+8}$

$|-\overline{a}+\overline{b}|$
$= |-(t\overline{i}+2\overline{j}) + (-2\overline{i}+(t-2)\overline{j})|$
$= |(-t-2)\overline{i} + (t-4)\overline{j}|$
$= \sqrt{(-t-2)^2+(t-4)^2}$
$= \sqrt{t^2+4t+4+t^2-8t+16}$
$= \sqrt{2t^2-4t+20}$

Koska $t^2 - 4t + 8 \le 2t^2 - 4t + 8 < 2t^2 - 4t + 20$, on $|-\overline{a}+\overline{b}| > |\overline{b}|$.
Koska $t^2 + 4 \le t^2 + 4 + (t-2)^2 = 2t^2 - 4t + 8 < 2t^2 - 4t + 20$, on $|-\overline{a}+\overline{b}| > |\overline{a}|$.

Koska vektori $-\overline{a}+\overline{b}$ on pidempi kuin kumpikaan vektoreista $\overline{a}$ ja $\overline{b}$, on kolmion kolmas sivu pisin.

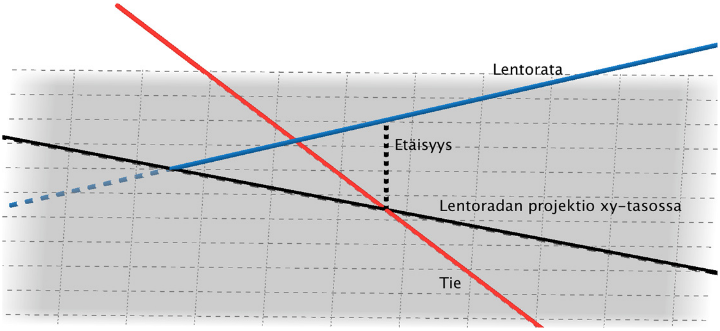
556. Lentokoneen lentorataa vastaan suoran yhtälö parametrimuodossa on

$$\begin{cases} x = 1500 - 20t \\ y = 2000 + 10t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 3t \end{cases}$$

Lentokone ylittää maantien, kun lentokoneen lentoradan projektio *xy*-tasossa ja suora $2x + y = 200$ leikkaavat.

Lentoradan projektio on xy-tason suora, joka saadaan asettamalla lentoradan z-koordinaatti nollaksi.

$$\begin{cases} x = 1500 - 20t \\ y = 2000 + 10t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$



557. Määritetään aluksi $|\overline{AP}|$ ja $|\overline{BP}|$.

$|\overline{AP}| = \sqrt{(x-(-2))^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+4x+4+y^2}$

$$\begin{aligned}|\overline{BP}| &= \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\\ &= \sqrt{x^2-4x+4+y^2-6y+9}\\ &= \sqrt{x^2+y^2-4x-6y+13}\end{aligned}$$

Ehdosta $|\overline{AP}| \le 2|\overline{BP}|$ saadaan

$\sqrt{x^2+4x+4+y^2} \le 2\sqrt{x^2+y^2-4x-6y+13}.$

Koska epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, säilyy järjestys korotettaessa puolittain neliöön.

$$x^2+4x+4+y^2 \le 4\cdot(x^2+y^2-4x-6y+13)$$

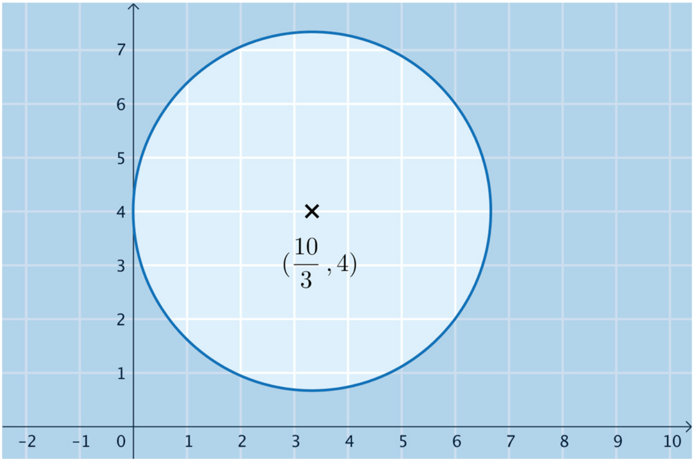
$-3x^2-3y^2+20x+24y-48 \le 0$

Pyritään täydentämään yhtälöön binomien neliöt.

$$\begin{aligned}-3x^2-3y^2+20x+24y-48 &\le 0 \qquad \| :(-3)\\ x^2+y^2-\frac{20}{3}x-8y+16 &\ge 0\\ (x-\frac{10}{3})^2+(y-4)^2 &\ge (\frac{10}{3})^2\end{aligned}$$

Käyrä $(x-\frac{10}{3})^2+(y-4)^2=(\frac{10}{3})^2$ on ympyrä, jonka keskipiste on $(\frac{10}{3}, 4)$ säde on $\frac{10}{3}$.

Ehdon $(x-\frac{10}{3})^2+(y-4)^2 \ge (\frac{10}{3})^2$ toteuttavat siten kaikki mainitulla ympyrällä ja sen ulkopuolella olevat pisteet.



558. Kolmion OAB kylkien OA ja OB pituudet ovat $|\overline{a}|$ ja $|\overline{b}|$. Kolmion kolmas kylki on AB, jota vastaa vektori $\overline{AO}+\overline{OB}=-\overline{OA}+\overline{OB}=-\overline{a}+\overline{b}$. Sivun AB pituus on siis $|-\overline{a}+\overline{b}|$.

Jotta voidaan käyttää annettua pistetuloehtoa, lasketaan vektorin $-\overline{a}+\overline{b}$ pituuden neliö, joka on vektorin pistetulo itsensä kanssa.

$$\begin{aligned}
\left|-\overline{a}+\overline{b}\right|^2 &= (-\overline{a}+\overline{b})\cdot(-\overline{a}+\overline{b}) \\
&= -\overline{a}\cdot\overline{a}-2\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{b} \\
&= -2\overline{a}\cdot\overline{b}-2\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{b} \\
&= \overline{b}\cdot\overline{b} \\
&= |\overline{b}|^2\,.
\end{aligned}$$

Siten $|-\overline{a}+\overline{b}|=|\overline{b}|$ eli AB ja OB ovat yhtä pitkät. Kolmio on OAB on näin ollen tasakylkinen.

559. Normaalivektori voidaan muodostaa, jos tunnetaan jotkin kaksi tason vektoria. Nämä voidaan vastaavasti muodostaa, jos tunnetaan jotkin kolme tason pistettä. Määritetään tunnetun pisteen lisäksi kaksi pistettä suoralta antamalla parametrille t jotkin kaksi arvoa, esimerkiksi $t = 0$ ja $t = 1$.

Kun $t = 0$, $x = 1 + 0 = 1$, $y = 2 + 0 = 2$ ja $z = 3 + 0 = 3$, joten parametrin arvoa $t = 0$ vastaa piste on (1, 2, 3).

Kun $t = 1$, $x = 1 + 1 = 2$, $y = 2 + 2 \cdot 1 = 4$ ja $z = 3 + 3 \cdot 1 = 6$, joten parametrin arvoa $t = 1$ vastaa piste on (2, 4, 6).

Vektori pisteestä (1, 1, 1) pisteeseen (1, 2, 3) on
$(1-1)\overline{i} + (2-1)\overline{j} + (3-1)\overline{k} = \overline{j} + 2\overline{k}$.

Vektori pisteestä (1, 1, 1) pisteeseen (2, 4, 6) on
$(2-1)\overline{i} + (4-1)\overline{j} + (6-1)\overline{k} = \overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}$.

Normaalivektori on $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$ joillakin kertoimilla a, b ja c. Koska normaalivektori on kohtisuorassa jokaista tasossa olevaa vektoria vastaa, niin $\overline{n} \cdot (\overline{j} + 2\overline{k}) = 0$ ja $\overline{n} \cdot (\overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}) = 0.$ Tästä muodostuu kaksi yhtälöä.

$$\begin{aligned} \overline{n} \cdot (\overline{j} + 2\overline{k}) &= 0 \\ (a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}) \cdot (\overline{j} + 2\overline{k}) &= 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 2 &= 0 \\ b + 2c &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{n} \cdot (\overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}) &= 0 \\ (a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}) \cdot (\overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}) &= 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 3 + c \cdot 5 &= 0 \\ a + 3b + 5c &= 0 \end{aligned}$$

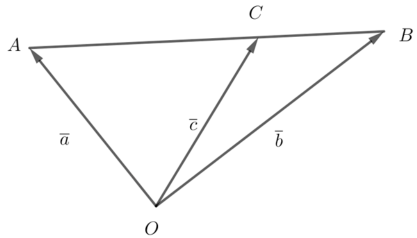
Ehdoista syntyy yhtälöpari.

$$\begin{cases} b + 2c = 0 \\ a + 3b + 5c = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparille löytyy useita ratkaisuja, koska normaalivektoreita on useita: normaalivektorin pituus ei ole merkityksellinen. Siten yksi kertoimista a, b ja c voidaan valita vapaasti (kunhan ei valita kertoimeksi lukua 0). Valitaan $a = 1$. Yhtälöparin ensimmäistä yhtälöstä saadaan $b = -2c$. Sijoitetaan nämä toiseen, jolloin saadaan yhtälö $1 + 3 \cdot (-2c) + 5c = 0$. Tästä saadaan $c = 1$, joten $b = -2$.

Siten eräs tason normaalivektori on $\overline{n} = \overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$.

560. Pisteiden A ja B kautta kulkee suora. Suoran eräs suuntavektori on $\overline{AB} = -\overline{a} + \overline{b}$. Jos merkitään vektoreiden yhteistä alkupistettä kirjaimella O, jokainen suoran piste P toteuttaa ehdon $\overline{OP} = \overline{OA} + t \cdot \overline{AB}$ jollakin parametrin t arvolla. Näytetään, että myös piste C toteuttaa tämän ehdon.



$$\overline{OC} = \overline{c} = \frac{|\overline{b}|\overline{a} + |\overline{a}|\overline{b}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} = \frac{|\overline{b}|\overline{a}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} + \frac{|\overline{a}|\overline{b}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}\overline{a} + \frac{|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}\overline{b},$$

mutta tämä muoto on ihan outo. Kokeillaan tarkastella erotusta $\overline{c} - \overline{a}$ ja yritetään saada sitä kautta jotain tolkullista aikaan.

$$\begin{aligned}
\overline{c} - \overline{a} &= \frac{|\overline{b}|\overline{a} + |\overline{a}|\overline{b}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} - \overline{a} \\
&= \frac{|\overline{b}|\overline{a} + |\overline{a}|\overline{b}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} - \frac{\overline{a}(|\overline{a}| + |\overline{b}|)}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} \\
&= \frac{|\overline{b}|\overline{a} + |\overline{a}|\overline{b} - \overline{a}|\overline{a}| - |\overline{b}|\overline{a}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} \\
&= \frac{|\overline{a}|\overline{b} - \overline{a}|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} \\
&= \frac{|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}(\overline{b} - \overline{a}),
\end{aligned}$$

joten $\overline{c} = \overline{a} + \dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}(\overline{b} - \overline{a})$.

Nyt $\overline{OC} = \overline{c} = \overline{a} + \dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}(\overline{b} - \overline{a}) = \overline{OA} + t \cdot (\overline{b} - \overline{a}) = \overline{OA} + t \cdot \overline{AB}$, missä

$$t = \frac{|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}.$$

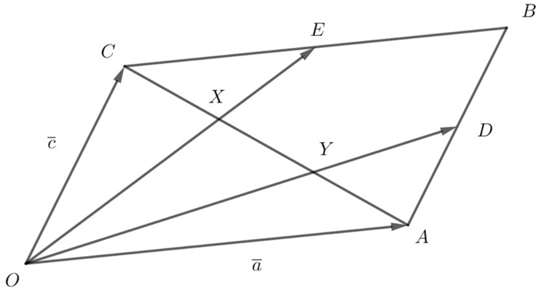
Koska $|\overline{a}|+|\overline{b}|>0$ on t määritelty aina ja piste C on aina pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla. Koska lisäksi $|\overline{a}|+|\overline{b}|>|\overline{a}|,$ on $0 < t < 1$ eli piste C on janalla AB.

Jakosuhde on janojen AP ja PB pituuksien suhde. AP:n pituus on kerroin t ja PB:n pituus

$$1-t=1-\frac{|\overline{a}|}{|\overline{a}|+|\overline{b}|}=\frac{|\overline{a}|+|\overline{b}|}{|\overline{a}|+|\overline{b}|}-\frac{|\overline{a}|}{|\overline{a}|+|\overline{b}|}=\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|+|\overline{b}|}.$$

Suhde on $\dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{a}|+|\overline{b}|}:\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|+|\overline{b}|}=\dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|},$ kun $|\overline{b}|\neq 0.$

561. Merkitään $\overline{OA} = \overline{a}$ ja $\overline{OC} = \overline{c}$. Piirretään tilannetta havainnollistava kuva.



Leikatkoon vektorit $\overline{OE}$ ja $\overline{OD}$ janan AC pisteissä X ja Y.

Oletetaan, että X ja Y jakavat janan kolmeen yhtä pitkään osaan ja osoitetaan, että $\overline{OX} = t \cdot \overline{OE}$ jollekin t ja $\overline{OY} = r \cdot \overline{OD}$ jollekin r eli että pisteet X ja Y ovat janoilla OE ja OD.

$$\overline{OX} = \overline{OC} + \frac{1}{3}\overline{CA} = \overline{c} + \frac{1}{3}(-\overline{c} + \overline{a}) = \frac{2}{3}\overline{c} + \overline{a} = \frac{1}{3}(2\overline{c} + \overline{a})$$

Toisaalta $\overline{OE} = \overline{c} + \frac{1}{2}\overline{a} = \frac{1}{2}(2\overline{c} + \overline{a})$, josta $2\overline{c} + \overline{a} = 2\overline{OE}$. Siten

$$\overline{OX} = \frac{1}{3}(2\overline{c} + \overline{a}) = \frac{1}{3} \cdot 2\overline{OE} = \frac{2}{3}\overline{OE}.$$

Samoin $\overline{OY} = \overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{AC} = \overline{a} + \frac{1}{3}(-\overline{a} + \overline{c}) = \frac{2}{3}\overline{a} + \overline{c} = \frac{1}{3}(2\overline{a} + \overline{c})$.

Toisaalta $\overline{OD} = \overline{a} + \frac{1}{2}\overline{c} = \frac{1}{2}(2\overline{a} + \overline{c})$, josta $2\overline{a} + \overline{c} = 2\overline{OD}$. Siten

$$\overline{OY} = \frac{1}{3}(2\overline{a} + \overline{c}) = \frac{1}{3} \cdot 2\overline{OD} = \frac{2}{3}\overline{OD}.$$

On siis osoitettu, että janan AD kolmeen yhtä suureen osaan jakavat pisteet ovat janoilla OD ja OE eli että vektorit $\overline{OE}$ ja $\overline{OD}$ jakavat janan kolmeen yhtä suureen osaan.