4 Analyyttinen geometria

4.1 Tason käyrä ja suora

LUVUN 4.1 YDINTEHTÄVÄT

401. **a)** Piste on käyrällä, jos se toteuttaa käyrän yhtälön.

$$2\cdot(-1)^4-(-1)^3-(-1)-2^2=2\cdot1+1+1-4=0$$

Piste on käyrällä.

b)
$$\begin{aligned}3\cdot3+2a-7&=0\\9+2a-7&=0\\2a&=-2 \quad \|:2\\a&=-1\end{aligned}$$

402. **a)** $k=\dfrac{-5-(-1)}{10-(-2)}=\dfrac{-4}{12}=-\dfrac{1}{3}$

Suoran yhtälö on

$$\begin{aligned}y-(-1)&=-\frac{1}{3}(x-(-2))\\y+1&=-\frac{1}{3}(x+2)\\y+1&=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\\y&=-\frac{1}{3}x-1\frac{2}{3}\\y&=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Suuntakulma:

$$\begin{aligned}\tan\alpha&=-\frac{1}{3}\\\alpha&=-18{,}43...^\circ\approx-18{,}4^\circ\end{aligned}$$

b) $k=\tan(-30^\circ)=-\tan30^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-0{,}577...\approx-0{,}58$

403. **a)** x-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on 0. Suoran yhtälö on $y = 2$.

b) y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa. Suoran yhtälö on $x = 1$.

c) $k = \tan(-45°) = -\tan 45° = -1$

Suoran yhtälö on

$$y - 2 = -1(x - 1)$$
$$y - 2 = -x + 1$$
$$y = -x + 3.$$

d) $2x + y = 0$

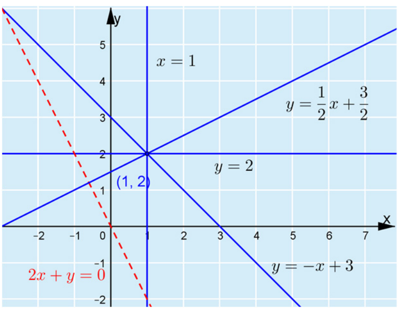
$$y = -2x$$

Suoran kulmakerroin on -2.

Kohtisuoran suoran kulmakerroin on $\frac{1}{2}$, koska kohtisuorien suorien kulmakertoimien tulo on -1.

Suoran yhtälö on

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$
$$y - 2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ eli } x - 2y + 3 = 0.$$



404. Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $\frac{10-5}{-1-2}=-\frac{5}{3}$.

Suoran $3x - 5y - 8 = 0$, eli suoran $y=\frac{3}{5}x-\frac{8}{5}$ kulmakerroin on $\frac{3}{5}$.

Kulmakertoimien tulo on $-\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{15}{15}=-1$, joten pisteiden A ja B kautta kulkeva suora ja suora $3x - 5y - 8 = 0$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Suoran $10x + 6y + 1 = 0$ eli suoran $y=-\frac{5}{3}x-\frac{1}{6}$ kulmakerroin on $-\frac{5}{3}$, joten se on yhdensuuntainen pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kanssa.

Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran suuntakulma on

$\tan\alpha=-\frac{5}{3}$, josta

$$\alpha=-59{,}03...°$$
$$\alpha\approx-59{,}0°.$$

Suora muodostaa x-akselin kanssa kulman, jonka suuruus on noin 59,0°.

405. **a)** Sivun AB keskinormaali kulkee sivun AB keskipisteen kautta.

Keskipiste on $\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{4+0}{2}\right)=(1,2)$.

Sivun AB suuntaisen suoran kulmakerroin on $\frac{0-4}{2-0}=-2$.

Keskinormaalin kulmakerroin on $\frac{1}{2}$, koska $-2\cdot\frac{1}{2}=-1$.

Keskinormaalin yhtälö on

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$$
$$y-2=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$
$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\text{ eli }x-2y+3=0.$$

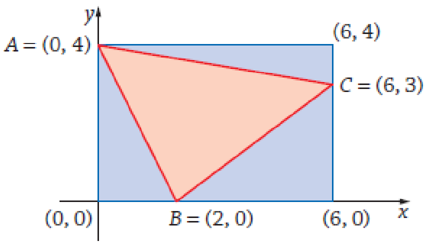
b) Kärjen C kautta piirretty keskijana kulkee pisteen C ja janan AB keskipisteen (1, 2) kautta.

Suoran kulmakerroin on $\frac{3-2}{6-1}=\frac{1}{5}$.

Suoran yhtälö on

$$
\begin{aligned}
y-3&=\frac{1}{5}(x-6)\\
y&=\frac{1}{5}x-\frac{6}{5}+3\\
y&=\frac{1}{5}x+\frac{9}{5} \text{ eli } x-5y+9=0.
\end{aligned}
$$

c)



Kuvan merkinnöillä kolmion ABC pinta-ala
voidaan laskea vähentämällä suorakulmion pinta-alasta kolmen suorakulmaisen kolmion pinta-alat.

Kolmion ABC pinta-ala on

$$6\cdot 4-(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 1)=24-(4+6+3)=11.$$

406. Ratkaistaan suorien leikkauspisteet.

$$\begin{cases} y = 2x \\ x - 5y - 9 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3 \\ x - 5y - 9 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x \\ x + y = 3 \end{cases}$$

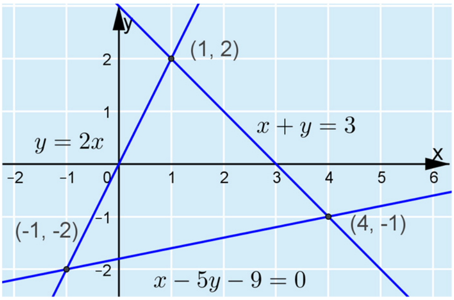
$$x = -1,\ y = -2 \qquad x = 4,\ y = -1 \qquad x = 1,\ y = 2$$

Merkitään kärkipisteet $A = (-1, -2)$, $B = (4, -1)$ ja $C = (1, 2)$.
Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

AB: $\sqrt{(4-(-1))^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{26}$

BC: $\sqrt{(1-4)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

AC: $\sqrt{(-1-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



407. Suoran $2x + 3y = 0$, eli suoran $y = -\frac{2}{3}x$ kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$.

Pisteen (–3, 6) kautta kulkevan yhdensuuntaisen suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - 6 &= -\frac{2}{3}(x + 3) \\ y &= -\frac{2}{3}x + 4. \end{aligned}$$

Olkoon piste A y-akselin leikkauspiste, jolloin $y = 4$ ja kysytty piste $A = (0, 4)$.

Olkoon piste B x-akselin leikkauspiste, jolloin $0 = -\frac{2}{3}x + 4$ ja edelleen $x = 6$. Kysytty piste on $B = (6, 0)$.

Janan AB pituus on $\sqrt{(6-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Janan AB keskipiste on $\left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (3, 2)$.

Janan AB keskinormaalin kulmakerroin on $\frac{3}{2}$, koska $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$.

Keskinormaalin yhtälö on

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{3}{2}(x - 3) \\ y &= \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Keskinormaali leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -\frac{5}{2})$.

Keskinormaali leikkaa x-akselin pisteessä, jossa $y = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} &= 0 \\ x &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Keskinormaali leikkaa x-akselin pisteessä $(\frac{5}{3}, 0)$.

4.2 Ympyrä ja paraabeli

LUVUN 4.2 YDINTEHTÄVÄT

408. **a)** Ympyrän keskipiste on (0, 0) ja säde 9.

$$(x-0)^2+(y-0)^2=9^2$$
$$x^2+y^2=81$$

b) Sijoitetaan piste (–4, 8) ympyrän yhtälöön.

$$(-4)^2+8^2=16+64=80<81$$

Piste on ympyrän sisäpuolella, joten sen kautta ei voida piirtää tangenttia.

409. Ympyrän keskipiste on halkaisijan päätepisteiden keskipiste.

$$\left(\frac{4+(-2)}{2},\frac{1+1}{2}\right)=(1,1)$$

Ympyrän säde on puolet halkaisijasta.

$$r=\frac{\sqrt{(4-(-2))^2+(1-1)^2}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Ympyrän yhtälö on

$$(x-1)^2+(y-1)^2=3^2$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=9.$$

410. **a)** Määritetään ympyrän $x^2 + y^2 - 8x + 14 = 0$ keskipiste ja säde.

$$x^2 - 8x + y^2 = -14$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = -14 + 16$$
$$(x - 4)^2 + y^2 = 2$$

Ympyrän keskipiste on (4, 0) ja säde on $\sqrt{2}$.

Pisteen (9, 5) etäisyys ympyrän keskipisteestä on
$\sqrt{(9-4)^2+(5-0)^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}.$

Pisteen (9, 5) lyhin etäisyys ympyrästä $x^2 + y^2 - 8x + 14 = 0$ on
$5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$

b) Suora on normaalimuodossa $x - 1 = 0$.

$$d = \frac{|1\cdot 9 + 0\cdot 5 - 1|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{|8|}{\sqrt{1}} = 8$$

411. Suoran $3x - 4y + 9 = 0$ etäisyys ympyrän keskipisteestä on ympyrän säde. Lasketaan suoran etäisyys pisteestä (4, –1).

$$r = \frac{|3\cdot 4 - 4\cdot(-1) + 9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Ympyrän yhtälö on
$(x - 4)^2 + (y - (-1))^2 = 5^2$
$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25.$

y-akselin jokaisessa pisteessä $x = 0$, joten ympyrä $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$ leikkaa y-akselin pisteessä

$$(0 - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$$
$$(y + 1)^2 = 25 - 16$$
$$(y + 1)^2 = 9$$

$y + 1 = 3$ tai $y + 1 = -3$
$y = 2$ $\qquad$ $y = -4$

Ympyrä leikkaa y-akselin pisteissä (0, 2) ja (0, –4).

412. Piste on ympyrällä, jos se toteuttaa ympyrän yhtälön.
$(6-4)^2+(2-1)^2=2^2+1^2=4+1=5$.
Piste on ympyrällä.

Tangentti on kohtisuorassa ympyrän sädettä vastaan.
Ympyrän keskipiste on (4, 1). Lasketaan keskipisteestä pisteeseen (6, 2) piirretyn säteen suuntaisen suoran kulmakerroin.

$$k_s=\frac{2-1}{6-4}=\frac{1}{2}$$

Tangentin kulmakerroin on –2, koska $-2\cdot\frac{1}{2}=-1$.

Kysytyn tangentin yhtälö on

$$y-2=-2(x-6)$$
$$y=-2x+14.$$

413. Määritetään paraabelien leikkauspisteet.

$$\begin{cases}x=y^2\\x=4y-y^2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}y^2&=4y-y^2\\2y^2-4y&=0\\2y(y-2)&=0\\2y=0 \text{ tai } &y-2=0\\y=0 \quad &y=2\end{aligned}$$

Kun $y=0$, niin $x=0$ ja kun $y=2$, niin $x=2^2=4$.
Paraabelien leikkauspisteet ovat (0, 0) ja (4, 2).

Leikkauspisteiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $\frac{2-0}{4-0}=\frac{1}{2}$.

Kysytyn suoran yhtälö on

$$y-0=\frac{1}{2}(x-0)$$
$$y=\frac{1}{2}x.$$

414. **a)** Paraabelin yhtälö on muotoa $y - 2 = a(x - 1)^2$. Piste (0, 4) toteuttaa paraabelin yhtälön.

$4 - 2 = a\,(0 - 1)^2$

$a = 2$

Paraabelin yhtälö on $y - 2 = 2(x - 1)^2$ eli $y = 2x^2 - 4x + 4$.

b) Paraabelin yhtälö on muotoa $x - 1 = a(y - 2)^2$. Piste (0, 4) toteuttaa paraabelin yhtälön.

$0 - 1 = a(4 - 2)^2$

$-1 = 4a$

$a = -\dfrac{1}{4}$

Paraabelin yhtälö on $x - 1 = -\frac{1}{4}(y - 2)^2$ eli $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$.

415. **a)** Johtosuoralla olevien pisteiden x-koordinaatit ovat samat, joten johtosuoran yhtälö on $x = 1$ eli $x - 1 = 0$.
Paraabelin piste (x, y) on yhtä kaukana polttopisteestä ja johtosuorasta.

Etäisyys polttopisteestä on $\sqrt{(x-2)^2+(y-(-1))^2}$.
Etäisyys johtosuorasta:
$$\frac{|1\cdot x+0\cdot y-1|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|x-1|$$

Saadaan yhtälö:
$\sqrt{(x-2)^2+(y-(-1))^2}=|x-1|$, josta $x=\frac{1}{2}y^2+y+2$.

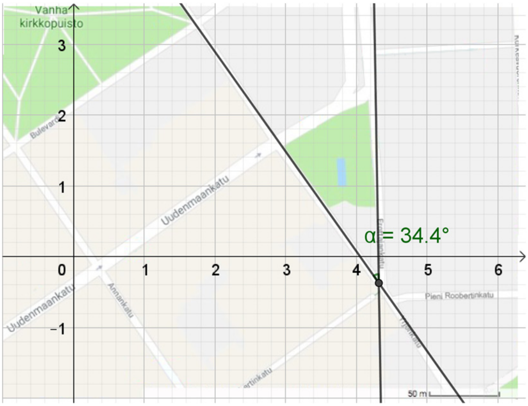
b) Koska johtosuora on y-akselin suuntainen, akseli on x-akselin suuntainen. Akseli kulkee polttopisteen $(2, -1)$ kautta.
Paraabelin akseli on $y = -1$.

c) Paraabeli leikkaa x-akselin pisteessä, jossa $y = 0$:
$x=\frac{1}{2}\cdot 0^2+0+2=2$, josta $x = 2$ ja leikkauspiste $(2, 0)$.

Paraabeli leikkaa y-akselin pisteessä, jossa $x = 0$:
$0=\frac{1}{2}y^2+y+2$.

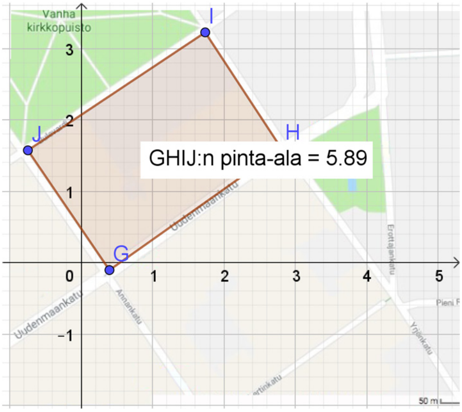
Yhtälöllä $\frac{1}{2}y^2+y+2=0$ ei ole ratkaisua, joten paraabeli ei leikkaa y-akselia.

416. **a)** Piirretään Erottajan ja Yrjönkadun suuntaiset suorat ja mitataan niiden välinen kulma.



Kulma on noin 34°.

b) Asetetaan kuva siten, että koordinaatiston yhden ruudun sivun pituus on 50 metriä kartalla.



Ohjelmalla saadaan pinta-alaksi 5,89 pinta-alayksikköä.
Yhden ruudun sivun pituus on 50 m, joten yhtä pinta-alayksikköä kartalla vastaa $50 \text{ m} \cdot 50 \text{ m} = 2500 \text{ m}^2$ luonnossa.

Korttelin pinta-ala on $5{,}89 \cdot 2500 \text{ m}^2 = 14725 \text{ m}^2$.
Yksi aari on 100 m^2, joten korttelin pinta-ala on n. 150 aaria.

Luvun 4 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

417. A–VI, B–V, C–III, D–VIII, E–II, F–VII, G–IV, H–I

418. **a)** Suoran kulmakerroin on $\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}$.

Suoran yhtälö on

$$y-0=\frac{4}{3}(x-0)$$
$$y=\frac{4}{3}x.$$

b) Ympyrän säde on keskipisteen (0, 0) ja pisteen (3, 4) etäisyys.

$$r=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

Ympyrän yhtälö on

$$(x-0)^2+(y-0)^2=5^2$$
$$x^2+y^2=25.$$

c) Paraabelin yhtälö on muotoa $y - 0 = a(x - 0)^2$, eli $y = ax^2$.
Piste (3, 4) toteuttaa paraabelin yhtälön, joten

$$4 = a \cdot 3^2$$
$$a = \frac{4}{9}.$$

Paraabelin yhtälö on $y=\frac{4}{9}x^2$.

419. A–III, B–III, C–III, D–II, E–I

420. Suorat eivät leikkaa, kun suorien kulmakertoimet ovat samat ja vakiotermit eri suuret.

$ax + y + 2 = 0 \qquad\qquad 3x + y + a = 0$

$y = -ax - 2 \qquad\qquad y = -3x - a$

Suorat eivät leikkaa, kun $a = 3$, koska tällöin kulmakertoimet ovat samat, eli –3, ja vakiotermit eri suuret, eli –2 ja –3.

Ratkaistaan suorien leikkauspiste yhtälöparista $\begin{cases} y = -ax - 2 \\ y = -3x - a \end{cases}$.

$-ax - 2 = -3x - a$

$(3 - a)x = 2 - a$

$x = \dfrac{2-a}{3-a}$

Yhtälöllä on ratkaisu, joka on suorien leikkauskohta, kaikilla muilla a:n arvoilla, paitsi arvolla $a = 3$, koska tällöin nimittäjä on 0.

421. **a)** Ympyrän $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$ keskipiste on $(3, -1)$ ja säde on $\sqrt{5}$.

Suoran $x - 2y + 10 = 0$ etäisyys ympyrän keskipisteestä on

$$\frac{|1\cdot 3 - 2\cdot(-1) + 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} \overset{\sqrt{5})}{=} \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}.$$

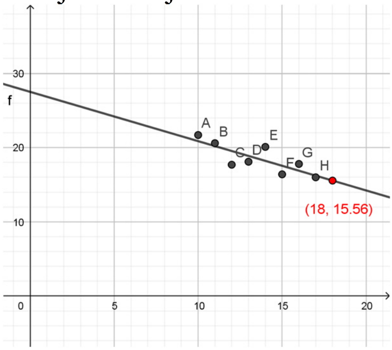
Suoran ja ympyrän etäisyys d on $3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

b) Suora $x + 2y + 4 = 0$ on ympyrän tangentti, jos sen etäisyys ympyrän keskipisteestä on säde.

$$\frac{|1\cdot 3 + 2\cdot(-1) + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \overset{\sqrt{5})}{=} \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Etäisyys on sama kuin ympyrän säde, joten suora $x + 2y + 4 = 0$ on ympyrän tangentti.

422. **a)** Sovitetaan suora havaintopisteisiin Geogebrassa luomalla ensi pisteistä lista ja tämän jälkeen sovittamalla suora SovitaSuora-komennolla.



Näin saadaan arvioksi heinäkuun 2018 keskilämpötilalle 15,6 astetta. Ennuste poikkeaa mitatusta arvosta 21,1 – 15,6 = 5,5 astetta.

b) Sovitetun suoran yhtälö on $y = -0{,}66x + 27{,}52$. Keskilämpötila siis pienenee keskimäärin 0,7 astetta vuodessa.

423. **a)** Suoran kulmakerroin on $\frac{2-6}{5-(-3)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$.

Suoran yhtälö on

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-5)$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}.$$

Paraabelin yhtälö on muotoa $x - 3 = a(y - 0)^2$ eli $x = ay^2 + 3$.
Piste $(-1, 2)$ on paraabelilla, josta saadaan yhtälö
$-1 = a \cdot 2^2 + 3$
$4a = -4$
$a = -1.$

Paraabelin yhtälö on siis $x = -y^2 + 3$.

Ympyrän keskipiste on $(6, -1)$. Ympyrän säde on keskipisteen ja kehän pisteen $(5, 1)$ etäisyys.

$$r = \sqrt{(6-5)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Ympyrän yhtälö on

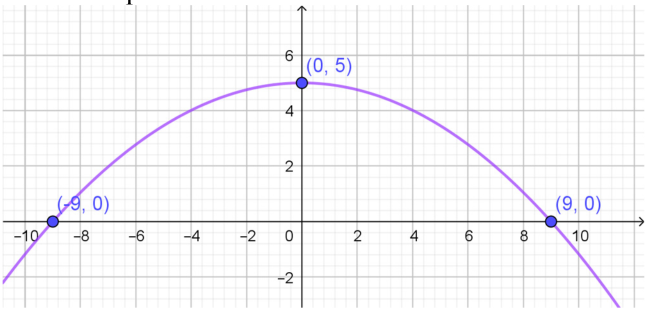
$$(x-6)^2 + (y-(-1))^2 = (\sqrt{5})^2 = (x-6)^2 + (y+1)^2 = 5.$$

b) Määritetään suoran $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ eli suoran $x + 2y - 9 = 0$ etäisyys ympyrän keskipisteestä $(6, -1)$.

$$\frac{|1\cdot 6 + 2\cdot(-1) - 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \overset{\sqrt{5})}{=} \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Etäisyys on sama kuin ympyrän säde, joten suora on ympyrän tangentti.

424. Asetetaan paraabeli koordinaatistoon.



Paraabelin yhtälö on muotoa $y - 5 = a(x - 0)^2$ eli $y = ax^2 + 5$.
Piste (9, 0) toteuttaa paraabelin yhtälön, joten
$0 = a \cdot 9^2 + 5$
$a = -\dfrac{5}{81}$.

Paraabelin yhtälö on siis $y = -\dfrac{5}{81}x^2 + 5$.

Lasketaan, mikä on paraabelin korkeus kohdassa $x = 2{,}60$.
$y = 4{,}582\ldots$

Koska korkeus on suurempi kuin kuorma-auton korkeus, kuorma-auto mahtuu ajamaan sillan ali omalla kaistallaan.

425. **a)** Ympyrän yhtälö on muotoa $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
Pisteet (–2, 1), (0, –3) ja (4, –1) toteuttavat ympyrän yhtälön. Saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases}(-2)^2+1^2+a\cdot(-2)+b\cdot 1+c=0\\ 0^2+(-3)^2+a\cdot 0+b\cdot(-3)+c=0\\ 4^2+(-1)^2+a\cdot 4+b\cdot(-1)+c=0\end{cases} \text{ eli } \begin{cases}4+1-2a+b+c=0\\ 9-3b+c=0\\ 16+1+4a-b+c=0\end{cases}$$

jonka ratkaisu on $a = -2$, $b = 0$ ja $c = -9$.

Ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$ eli $(x - 1)^2 + y^2 = 10$.

Ympyrän säde on $\sqrt{10}$, joten ympyrän pinta-ala on $\pi\cdot(\sqrt{10})^2=10\pi$.

b) Pisteen P pisin ja lyhin etäisyys ympyrän kehälle voidaan mitata ympyrän keskipisteen kautta kulkevaa suoraa pitkin.
Ympyrän keskipiste on a-kohdan perusteella (1, 0) ja säde $\sqrt{10}$.
Pisteen (10, 3) etäisyys keskipisteestä on

$$\sqrt{(10-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}.$$

Pisteen P lyhin etäisyys ympyrälle on $3\sqrt{10}-\sqrt{10}=2\sqrt{10}$ ja pisin etäisyys $3\sqrt{10}+\sqrt{10}=4\sqrt{10}$.

426. Pisteen P koordinaatit ovat $(2, a)$.
Suorat AP ja BP ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Määritetään molempien suorien kulmakertoimet.

AP: $\frac{a-1}{2-0}=\frac{a-1}{2}$

BP: $\frac{a-(-1)}{2-7}=\frac{a+1}{-5}$

Kun suorat ovat kohtisuorassa, niiden kulmakertoimien tulo on -1.

$$\begin{aligned}\frac{a-1}{2}\cdot\frac{a+1}{-5}&=-1\\ \frac{(a-1)(a+1)}{-10}&=-1 \quad \| \cdot(-10)\\ a^2-1&=10\\ a^2&=11\\ a&=-\sqrt{11} \text{ tai } a=\sqrt{11}\end{aligned}$$

Kuvan perusteella piste P on x-akselin alapuolella, joten $P = (2, -\sqrt{11})$.

427. Halkaisijan päätepisteiden kautta kulkeva suora kulkee myös ympyrän keskipisteen kautta.
Määritetään ympyrän keskipiste.

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$$
$$x^2 - 8x + y^2 - 4y = -15$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = -15 + 16 + 4$$
$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

Ympyrän keskipiste on (4, 2).

Suora kulkee pisteiden (0, 0) ja (4, 2) kautta. Suoran kulmakerroin on $\frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$.

Suoran yhtälö on siis $y = \frac{1}{2}x$.

Määritetään suoran ja ympyrän leikkauspisteet yhtälöparista

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}.$$

$$x^2 + (\frac{1}{2}x)^2 - 8x - 4 \cdot \frac{1}{2}x + 15 = 0$$
$$\frac{5}{4}x^2 - 10x + 15 = 0 \quad || \cdot 4$$
$$5x^2 - 40x + 60 = 0 \quad ||: 5$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2}$$
$$= \frac{8 \pm 4}{2}$$
$$x = 6 \text{ tai } x = 2$$

Kun $x = 6$, niin $y = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ ja kun $x = 2$, niin $y = 1$.

Pisteet P ja Q ovat (2, 1) ja (6, 3).

428. Määritetään leikkauspisteet ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$x^2 + (\frac{1}{2}x)^2 = 5$$

$$\frac{5}{4}x^2 = 5 \quad \| \cdot 4$$

$$5x^2 = 20 \quad \| : 5$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ tai } x = -2$$

Kun $x = 2$, niin $y = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ ja kun $x = –2$, niin $y = –1$.

Leikkauspisteet ovat (2, 1) ja (–2, –1).

429. **a)** Pisteen (x, y) etäisyys pisteestä $(1, 2)$ on 3, eli

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=3$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2=9.$$

Käyrä on ympyrä $(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

b) Pisteen (x, y) etäisyys suorasta $x = 2$ eli $x - 2 = 0$ on

$$\frac{|x-2|}{\sqrt{1^2+0^2}}.$$

Pisteen etäisyys origosta on $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$.

Etäisyydet ovat yhtä suuret, joten saadaan yhtälö:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\frac{|x-2|}{\sqrt{1^2+0^2}}$$, josta $\sqrt{x^2+y^2}=|x-2|$.

Yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$(\sqrt{x^2+y^2})^2=|x-2|^2$$
$$x^2+y^2=(x-2)^2$$
$$x^2+y^2=x^2-4x+4$$
$$4x=-y^2+4$$
$$x=-\frac{1}{4}y^2+1$$

Käyrä on paraabeli $x=-\frac{1}{4}y^2+1$.

430. Kirjoitetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$$
$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = -6$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -6 + 1 + 4$$
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = -1$$

Kahden neliön summa ei voi olla negatiivinen. Mikään lukupari (x, y) ei toteuta yhtälöä.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -5 + 1 + 4$$
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

Yhtälö esittää pistettä (1, 2). Lukupareja on yksi.

431. Jos lakipisteen koordinaatit ovat (0, 0), niin antennin reunoilla on koordinaatit (50, 20) ja (–50, 20). Nämä pisteet toteuttavat paraabelin yhtälön $x^2 = 4ay$:

$$50^2 = 4a \cdot 20$$
$$2500 = 80a$$
$$a = \frac{2500}{80} = \frac{125}{4} = 31{,}25.$$

Paraabelin polttopiste $(0, a)$ on nyt $\left(0, \frac{125}{4}\right)$. Antennin vastaanotin tulee asettaa etäisyydelle 31 cm lakipisteestä.

432. $2x - 5y + 10 = 0$

$$-5y = -2x - 10 \quad || : (-5)$$

$$y = \frac{2}{5}x + 2$$

$$y = \frac{2}{5}x - 1$$

Molempien suorien kulmakerroin on $\frac{2}{5}$, joten ne ovat yhdensuuntaiset.

Suoralla $y = \frac{2}{5}x - 1$ on piste $(0, -1)$. Pisteen etäisyys suorasta on lyhin, eli kohtisuorasti mitattu etäisyys. Tämä on samalla myös yhdensuuntaisten suorien välinen etäisyys.

Lasketaan pisteen etäisyys suorasta $2x - 5y + 10 = 0$.

$$\frac{|2 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) + 10|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{15}{\sqrt{29}}$$

Suorien etäisyys on $\frac{15}{\sqrt{29}}$.

433. $f(0) = 2^0 = 1$, $f(1) = 2^1 = 2$ ja $f(2) = 2^2 = 4$.
Toisen asteen polynomifunktion lauseke on $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Tehtävänannon tiedoista saadaan yhtälöryhmä
$g(0) = c = 1$
$g(1) = a + b + c = 2$
$g(2) = 4a + 2b + c = 4$.

Toisesta yhtälöstä saadaan $b = -a - c + 2 = -a - 1 + 2 = -a + 1$.

Kolmannesta yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 4a + 2(-a + 1) + 1 &= 4 \\ 2a &= 1 \\ a &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kun $a = \frac{1}{2}$, niin $b = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

Toisen asteen polynomi on siis $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.

434. Etäisyys origokeskeisestä yksikköympyrästä ympyrästä saadaan vähentämällä säde pisteen etäisyydestä keskipisteestä ja ottamalla tuloksesta itseisarvo.

Pisteen (x, y) etäisyys origosta on $\sqrt{x^2+y^2}$.

Pisteen etäisyys yksikköympyrästä on $\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|$.

Pisteen etäisyys x-akselista on pisteen y-koordinaatin itseisarvo $|y|$.

Yhtä suurista etäisyyksistä saadaan yhtälö $\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right| = |y|$.

Yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|^2 &= |y|^2 \\
(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2 &= y^2 \\
x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}+1 &= y^2 \\
-2\sqrt{x^2+y^2} &= -x^2-1 \quad \|:(-2) \\
\sqrt{x^2+y^2} &= \frac{1}{2}(x^2+1) \\
x^2+y^2 &= \frac{1}{4}(x^2+1)^2 \\
x^2+y^2 &= \frac{1}{4}(x^4+2x^2+1) \\
x^2+y^2 &= \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4} \\
y^2 &= \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4} \\
y^2 &= \frac{1}{4}(x^4-2x+1) \\
y^2 &= \frac{1}{4}(x^2-1)^2 \\
y &= \frac{1}{2}(x^2-1) \text{ tai } y = -\frac{1}{2}(x^2-1) \\
y &= \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \qquad y = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Käyrien $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ ja $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ yhtälöt ovat paraabelien yhtälöitä.

435. Ympyrän $(x-3)^2+y^2=1$ keskipiste on (3, 0) ja säde 1. Pisteen (x, y) etäisyys ympyrästä saadaan vähentämällä säde pisteen etäisyydestä keskipisteestä ja ottamalla tuloksesta itseisarvo.

Pisteen (x, y) etäisyys ympyrän keskipisteestä (3, 0) on
$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$.

Etäisyys ympyrän kehästä on $\left|\sqrt{(x-3)^2+y^2}-1\right|$.

Pisteen etäisyys y-akselista on pisteen x-koordinaatin itseisarvo $|x|$.

$\left|\sqrt{(x-3)^2+y^2}-1\right|=|x|$, josta $x=\frac{1}{8}y^2+1$.

Pisteiden joukko on paraabeli $x=\frac{1}{8}y^2+1$.

436. Paraabeli sivuaa y-akselia, joten y-akselilla ja paraabelilla on tarkalleen yksi leikkauspiste.
Paraabelin ja y-akselin ($x = 0$) leikkauspiste voidaan ratkaista yhtälöstä $ay^2 + 3y + a = 0$.
Tällä yhtälöllä on yksi ratkaisu, kun diskriminantti on 0.
Diskriminantti $D = 3^2 - 4 \cdot a \cdot a = 9 - 4a^2$, joten

$$9 - 4a^2 = 0$$
$$a^2 = \frac{9}{4}$$
$$a = \frac{3}{2} \text{ tai } a = -\frac{3}{2}.$$

Paraabelin yhtälö on $x = \frac{3}{2}y^2 + 3y + \frac{3}{2}$ tai $x = -\frac{3}{2}y^2 + 3y - \frac{3}{2}$.

Ratkaistaan y-akselin leikkauspiste kummastakin yhtälöstä erikseen.

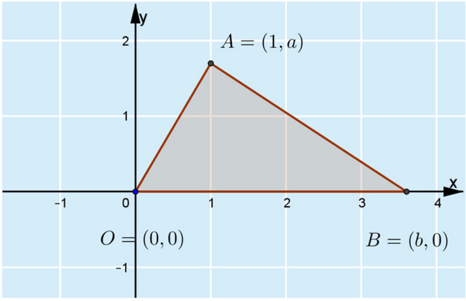
$$\frac{3}{2}y^2 + 3y + \frac{3}{2} = 0 \quad \| \cdot 2$$
$$3y^2 + 6y + 3 = 0 \quad \| : 3$$
$$y^2 + 2y + 1 = 0$$
$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1$$

Kun $a = \frac{3}{2}$, y-akselin sivuamispiste on $(0, -1)$.

$$-\frac{3}{2}y^2 + 3y - \frac{3}{2} = 0 \quad \| \cdot 2$$
$$-3y^2 + 6y - 3 = 0 \quad \| : (-3)$$
$$y^2 - 2y + 1 = 0$$
$$y = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

Kun $a = -\frac{3}{2}$, y-akselin sivuamispiste on $(0, 1)$.

437. Piirretään kuva.



Sivu OB on x-akselilla, koska pisteiden O ja B y-koordinaatit ovat 0. Kulma O ei voi olla suora kulma, koska tällöin sivun OA tulisi olla y-akselilla. Pisteen A x-koordinaatti on 1, joten se ei voi olla y-akselilla.

Suora kulma voi olla kulma A tai kulma B.

Jos kulma B on suora kulma, tulee sivun AB olla y-akselin suuntainen, eli pisteen B x-koordinaatin tulee olla 1, eli $b = 1$.
Piste B on siis tällöin (1, 0).
Kolmion OAB kannan pituus on 1 ja korkeus on pisteen A y-koordinaatti a. Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a = \frac{a}{2}$.

Pinta-alan tulee olla $3b = 3$, joten saadaan yhtälö $\frac{a}{2} = 3$ ja edelleen $a = 6$.

Jos kulma A on suora, tulee sivujen OA ja AB suuntaisten suorien kulmakertoimien tulon olla -1.

$$k_{OA} = \frac{a-0}{1-0} = a \text{ ja } k_{AB} = \frac{0-a}{b-1} = \frac{a}{1-b}$$

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{a}{1-b} &= -1 \quad \| \cdot (1-b) \neq 0, \text{ eli } b \neq 1 \\ a^2 &= -1 + b \\ b &= a^2 + 1 \end{aligned}$$

Kolmion kannan pituus on pisteen B x-koordinaatti, eli b ja korkeus pisteen A y-koordinaatti, eli a.

Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot b \cdot a = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 1) \cdot a$.

Pinta-alan tulee olla $3b$.

Nyt $\frac{1}{2} \cdot (a^2 + 1) \cdot a = 3b$ eli $\frac{(a^2 + 1)a}{2} = 3(a^2 + 1)$, josta $a = 6$.

Kun $a = 6$, niin $b = 6^2 + 1 = 37$.

Kolmio on suorakulmainen ja pinta-ala on $3b$, kun $a = 6$ ja $b = 1$ tai $a = 6$ ja $b = 37$.

438. Paraabelit $y = x^2 + ax - 2a$ kulkevat saman pisteen kautta kaikilla a:n arvoilla. Valitaan $a = 0$ ja $a = 1$ ja lasketaan näin saatujen käyrien leikkauspiste.

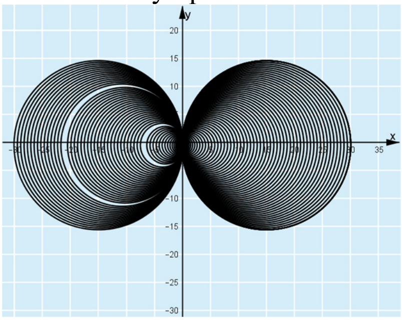
Yhtälöparin $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^2 + x - 2 \end{cases}$ ratkaisu on $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$.

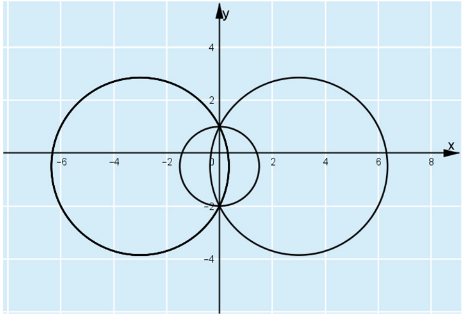
Osoitetaan vielä, että piste (2, 4) toteuttaa kaikkien paraabelien $y = x^2 + ax - 2a$ yhtälön:
$2^2 + 2a - 2a = 4$.

Jokaisella käyrällä $y = x^2 + ax - 2a$ on y-koordinaatti 4, kun $x = 2$.
Paraabelit $y = x^2 + ax - 2a$ kulkevat siis aina pisteen (2, 4) kautta.

Pisteen etäisyys origosta on $\sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

439. Piirretään käyräparvi eri vakion a:n arvoilla.





Oikeanpuoleisessa kuvassa ovat käyrät arvoilla $a = -1$, $a = 0$ ja $a = 1$. Kaikki käyrät näyttäisivät kulkevan pisteiden (0, 1) ja (0, –2) kautta. Käyrät näyttävät olevan ympyröitä.

Kirjoitetaan yhtälö $x^2 + y^2 + 6ax + y - 2 = 0$ muotoon $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, josta nähdään mahdollinen ympyrän keskipiste ja säde.

$$x^2 + y^2 + 6ax + y - 2 = 0$$
$$x^2 + 6ax + y^2 + y = 2$$
$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3a + (3a)^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + (3a)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$(x + 3a)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} + 9a^2$$

Koska $\frac{5}{4} + 9a^2 > 0$ kaikilla a:n arvoilla, niin käyrä

$$(x + 3a)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} + 9a^2 = (x - (-3a))^2 + (y - (-\frac{1}{2}))^2 = \frac{5}{4} + 9a^2$$

on ympyrä kaikilla a:n arvoilla.

Ympyrän keskipiste on $(-3a, -\frac{1}{2})$, eli ympyrän keskipiste on suoralla

$y = -\frac{1}{2}$.

Käyrän yhtälössä vakio a ei vaikuta käyrän pisteiden koordinaatteihin, kun $x = 0$. Tällöin kun $x = 0$, niin $y^2 + y - 2 = 0$, jonka ratkaisuna on $y = 1$ ja $y = -2$.

Kaikki käyrät kulkevat siis pisteiden (0, 1) ja (0, –2) kautta.

440. Olkoon kannan päätepisteiden y-koordinaatti a. Koska kannan päätepisteet ovat ympyrällä $x^2 + y^2 = 6$, saadaan kannan päätepisteiden x-koordinaatit ratkaisemalla yhtälöstä x.

$$x^2 + y^2 = 6$$
$$x^2 = 6 - y^2$$
$$x = \pm\sqrt{6-y^2}$$

Kannan päätepisteiden x-koordinaatit ovat $\sqrt{6-a^2}$ ja $-\sqrt{6-a^2}$.

Kannan pituus on $\left|\sqrt{6-a^2} - (-\sqrt{6-a^2})\right| = \left|2\sqrt{6-a^2}\right| = 2\sqrt{6-a^2}$.

Kolmion korkeus on $|a|$.

Kolmion pinta-ala on

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6-a^2}\cdot|a| = |a|\sqrt{6-a^2}.$$

Pinta-alan tulee olla 3, joten saadaan yhtälö $|a|\sqrt{6-a^2} = 3$ ja sen ratkaisuna $a = \sqrt{3}$ tai $a = -\sqrt{3}$.

Kannan päätepisteiden x-koordinaatit ovat $\sqrt{6-(\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$ ja $-\sqrt{6-(\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3}$.

Kannan päätepisteet ovat $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ja $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ tai $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ ja $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

441. Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} x^2+y^2-8x+11=0 \\ x^2+y^2+4x-6y-7=0 \end{cases}$.

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{cases} x^2+y^2-8x \qquad +11=0 \\ x^2+y^2+4x-6y-7=0 \end{cases} \\
- & \\
\hline
 & -12x+6y+18=0 \\
 & 6y = 12x-18 \quad \|:6 \\
 & y = 2x-3
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2+(2x-3)^2-8x+11&=0 \\
x^2+4x^2-12x+9-8x+11&=0 \\
5x^2-20x+20&=0 \quad \|:5 \\
x^2-4x+4&=0 \\
(x-2)^2&=0 \\
x-2&=0 \\
x&=2
\end{aligned}
$$

$$y=2x-3=2\cdot 2-3=1$$

Sivuamispiste on (2, 1).

Kirjoitetaan ympyrän $x^2 + y^2 - 8x + 11 = 0$ yhtälö keskipistemuotoon.

$$
\begin{aligned}
x^2-8x+16+y^2&=-11+16 \\
(x-4)^2+y^2&=5
\end{aligned}
$$

Ympyrän keskipiste on (4, 0) ja säde on $\sqrt{5}$.
Tangentin sivuamispiste on (2, 1), joten tangentin yhtälö on

$$
\begin{aligned}
y-1&=k(x-2) \\
y&=kx-2k+1
\end{aligned}
$$

$kx - y - 2k + 1 = 0$,
missä k on tangentin kulmakerroin.

Tangentin etäisyys ympyrän keskipisteestä (4, 0) on säde.
Saadaan yhtälö

$$\frac{|k\cdot 4-1\cdot 0-2k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5} \quad \|\cdot\sqrt{k^2+1}\neq 0$$

$$|2k+1|=\sqrt{5(k^2+1)}$$

Molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$|2k+1|^2=(\sqrt{5(k^2+1)})^2$$

$$4k^2+4k+1=5k^2+5$$

$$-k^2+4k-4=0$$

$$k=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-4\pm 0}{-2}=2$$

Tangentin kulmakerroin on 2, joten tangentin yhtälö on
$y = 2x - 4 + 1$
$y = 2x - 3.$

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

442. Ratkaistaan suoran $y = ax + 1$ ja käyrän $y = x^3 - 2x + 1$ leikkauspisteet yhtälöparista $\begin{cases} y = ax+1 \\ y = x^3 - 2x + 1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = ax+1 \\ y = x^3 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$x^3 - 2x + 1 = ax + 1$$
$$x^3 - 2x - ax = 0$$
$$x(x^2 - 2 - a) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x^2 - 2 - a = 0$$
$$x^2 = 2 + a$$

Leikkauspisteitä on aina vähintään yksi, $x = 0$. Tällöin $y = 1$, eli leikkauspiste on (0, 1).

Leikkauspisteitä on täsmälleen yksi, kun yhtälöllä $x^2 = 2 + a$ ei ole ratkaisuja tai yhtälön ratkaisu on 0.
Tämä toteutuu, kun $2 + a \leq 0$, eli $a \leq -2$.

443. **a)** Tangentin yhtälö on

$$y - 3 = k(x - 1)$$
$$y = kx - k + 3$$
$$kx - y - k + 3 = 0,$$

missä k on tangentin kulmakerroin.

Kirjoitetaan ympyrän $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$
$$x^2 + 4x + y^2 - 2y = -1$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = -1 + 4 + 1$$
$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

Ympyrän keskipiste on (–2, 1) ja säde 2.

Piste (1, 3) on ympyrän ulkopuolella, koska $1^2 + 3^2 + 4 - 6 + 1 = 9 > 2$.

Tangentin $kx - y - k + 3 = 0$ etäisyys ympyrän keskipisteestä (–2, 1) on ympyrän säde.

$$\frac{|k\cdot(-2)-1\cdot 1-k+3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 2$$
$$\frac{|-3k+2|}{\sqrt{k^2+1}} = 2 \quad \|\cdot\sqrt{k^2+1}$$
$$|-3k+2| = 2\sqrt{k^2+1}$$

Yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$|-3k+2|^2 = (2\sqrt{k^2+1})^2$$
$$9k^2-12k+4 = 4(k^2+1)$$
$$5k^2-12k = 0$$
$$k(5k-12) = 0$$
$$k = 0 \text{ tai } 5k-12 = 0$$
$$k = \frac{12}{5}$$

Tangenttien yhtälöt ovat $y = 3$ ja $y = \frac{12}{5}x + \frac{3}{5}$, eli $12x - 5y + 3 = 0$

b) Suoran $3x - 4y + 1 = 0$, eli $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ kulmakerroin on $\frac{3}{4}$. Tangentin yhtälö on $y = \frac{3}{4}x + b$, eli $3x - 4y + 4b = 0$.

Kirjoitetaan ympyrän $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$ yhtälö keskipistemuotoon.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 &= 0 \\
x^2 - 8x + y^2 - 4y &= 5 \\
x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 &= 5 + 16 + 4 \\
(x-4)^2 + (y-2)^2 &= 25
\end{aligned}
$$

Ympyrän keskipiste on (4, 2) ja säde 5.

Tangentin $3x - 4y + 4b = 0$ etäisyys ympyrän keskipisteestä (4, 2) on säde 5.

$$
\begin{aligned}
\frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 4b|}{\sqrt{3^3 + (-4)^2}} &= 5 \\
\frac{|4 + 4b|}{5} &= 5 \quad \| \cdot 5 \\
|4 + 4b| &= 25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4 + 4b &= 25 \quad \text{tai} \quad & 4 + 4b &= -25 \\
4b &= 21 & 4b &= -29 \\
b &= \frac{21}{4} & b &= -\frac{29}{4}
\end{aligned}
$$

Tangenttien yhtälöt ovat $y = \frac{3}{4}x + \frac{21}{4}$, eli $3x - 4y + 21$ ja

$y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$, eli $3x - 4y - 29 = 0$.

444. Määritetään piste P, eli suoran $y = ax$ ja paraabelin $y = x^2$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned} ax &= x^2 \\ ax - x^2 &= 0 \\ x(a - x) &= 0 \\ x &= 0 \text{ tai } x = a \end{aligned}$$

Kun $x = a$, niin $y = a^2$. Piste P on (a, a^2).

Määritetään piste Q, eli suoran $y = ax$ ja paraabelin $y = ax^2$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned} ax &= ax^2 \\ ax - ax^2 &= 0 \\ ax(1 - x) &= 0 \\ ax &= 0 \text{ tai } 1 - x = 0 \\ x &= 0 \qquad\quad x = 1 \end{aligned}$$

Kun $x = 1$, niin $y = a$. Piste Q on $(1, a)$.

$OP{:}PQ = 1{:}1$, eli $OQ = 2OP$.

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-0)^2 + (a-0)^2} &= 2\sqrt{(a-0)^2 + (a^2-0)^2} \\ \sqrt{1+a^2} &= 2\sqrt{a^2+a^4} \end{aligned}$$

Molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$\begin{aligned} (\sqrt{1+a^2})^2 &= (2\sqrt{a^2+a^4})^2 \\ 1+a^2 &= 4(a^2+a^4) \\ 1+a^2-4a^2-4a^4 &= 0 \\ -4a^4-3a^2+1 &= 0 \end{aligned}$$

Tehdään sijoitus $a^2 = t$.

$$-4t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot(-4)\cdot 1}}{2\cdot(-4)} = \frac{3 \pm 5}{-8}$$

$$t = -1 < 0 \ \text{ tai } \ t = \frac{1}{4} > 0$$

Kun $t = \frac{1}{4}$, niin $a^2 = \frac{1}{4}$ ja edelleen $a = \frac{1}{2}$ tai $a = -\frac{1}{2}$.

Luvun a tulee olla positiivinen, joten $a = \frac{1}{2}$.

445. Ympyrä sivuaa suoraa $3x - 4y = 0$ pisteessä (8, 6), eli suora on ympyrän tangentti. Tähän pisteeseen piirretty säteen suuntainen suora on kohtisuorassa tangenttia vastaan. Tangentin kulmakerroin on $\frac{3}{4}$, joten sen normaalin kulmakerroin on $-\frac{4}{3}$.

Normaalin yhtälö on $y-6=-\frac{4}{3}(x-8)$ eli $y=-\frac{4}{3}x+\frac{50}{3}$.

Ympyrä sivuaa myös x-akselia, joten sen keskipisteen etäisyys x-akselista on r, eli keskipisteen y-koordinaatti on r.
Saadaan

$$-\frac{4}{3}x+\frac{50}{3}=r$$
$$x=-\frac{3}{4}r+\frac{25}{2}.$$

Ympyrän keskipisteen koordinaatit ovat $\left(-\frac{3}{4}r+\frac{25}{2},\ r\right)$.
Ympyrän keskipisteen etäisyys tangentista on säde r, ja tästä tiedosta saadaan yhtälö $\frac{|3\cdot(-\frac{3}{4}r+\frac{25}{2})-4r|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=r$ ja sen ratkaisuna r:n arvo.

$$\frac{|3\cdot(-\frac{3}{4}r+\frac{25}{2})-4r|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=r$$
$$\frac{\left|-\frac{25}{4}r+\frac{75}{2}\right|}{5}=r$$
$$\left|-\frac{25}{4}r+\frac{75}{2}\right|=5r$$

$$-\frac{25}{4}r+\frac{75}{2}=5r \quad \text{tai} \quad -\frac{25}{4}r+\frac{75}{2}=-5r$$
$$-45r=-150 \qquad\qquad -5r=-150$$
$$r=\frac{10}{3} \qquad\qquad r=30$$

Kun $r = 30$, ympyrä sivuaa negatiivista x-akselia.
Ympyrän keskipiste on $\left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{10}{3}+\frac{25}{2},\ \frac{10}{3}\right)=(10,\ \frac{10}{3})$ ja säde $\frac{10}{3}$.

446. Olkoon kolmannen kärjen B koordinaatit (a, a^2).

Sivun OB keskipiste on $\left(\dfrac{0+a}{2}, \dfrac{0+a^2}{2}\right) = \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a^2}{2}\right)$.

Keskipisteen x-koordinaatti on $x = \dfrac{a}{2}$ ja y-koordinaatti

$y = \dfrac{a^2}{2} = 2 \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 2x^2$, joten se piirtää käyrän $y = 2x^2$.

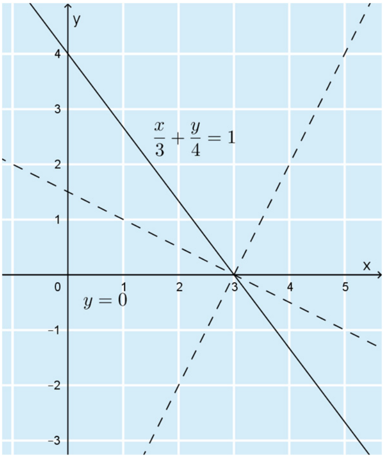
Sivun AB keskipiste on $\left(\dfrac{2+a}{2}, \dfrac{0+a^2}{2}\right) = \left(\dfrac{a+2}{2}, \dfrac{a^2}{2}\right)$. Jos sivun AB

keskipiste on x, eli $\dfrac{a+2}{2} = x$, niin $a = 2x - 2$. Tällöin y-koordinaatti on

$$\frac{a^2}{2} = \frac{(2x-2)^2}{2} = \frac{4(x-1)^2}{2} = 2(x-1)^2.$$

Keskipiste piirtää käyrän $y = 2(x - 1)^2$.

447. Piirretään tilanteesta kuva.



Kulmanpuolittajan jokainen piste on yhtä etäällä kulman kyljistä. Olkoon kulmanpuolittajalla oleva piste (x, y). Pisteen etäisyys x-akselista on $|y|$ ja suorasta $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ eli suorasta $4x + 3y - 12 = 0$ on $\frac{|4x+3y-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$.

Yhtä suurista etäisyyksistä saadaan yhtälö:

$$\frac{|4x+3y-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|y|$$

$$|4x+3y-12|=5|y|$$

$$4x+3y-12=5y \quad \text{tai} \quad 4x+3y-12=-5y$$

$$y=2x-6 \qquad\qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

Kysytty kulmanpuolittaja puolittaa x-akselin ja suoran välisen terävän kulman, joten sen kulmakertoimelle k on voimassa $|k| < 1$. Nyt $k=-\frac{1}{2}$ täyttää tämän ehdon.

Kysytty kulmanpuolittajan yhtälö on $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ eli $x + 2y - 3 = 0$.

448. Täydennetään ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 + 2ax + 4ay + 2y + 6a + 1 = 0$$
$$x^2 + 2ax + y^2 + (4a + 2)y = -6a - 1$$
$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2(2a + 1)y + (2a + 1)^2 = -6a - 1 + a^2 + (2a + 1)^2$$
$$(x + a)^2 + (y + (2a + 1))^2 = -6a - 1 + a^2 + 4a^2 + 4a + 1$$
$$(x + a)^2 + (y + (2a + 1))^2 = 5a^2 - 2a$$

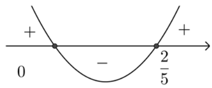
Yhtälö esittää ympyrää, kun $5a^2 - 2a > 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö funktion nollakohtien ja kuvaajan muodon perusteella:

$5a^2 - 2a = 0$

$a(5a - 2) = 0$

$a = 0$ tai $a = \frac{2}{5}$.



$5a^2 - 2a > 0$, kun $a < 0$ tai $a > \frac{2}{5}$.

Yhtälö siis esittää ympyrää, kun $a < 0$ tai $a > \frac{2}{5}$.

Ympyröiden keskipisteet ovat $(-a, -2a - 1)$.
Kun merkitään $x = -a$, niin $y = 2x - 1$.
Kun $a < 0$, niin $-a > 0$, eli $x > 0$.
Kun $a > \frac{2}{5}$, niin $-a < -\frac{2}{5}$, eli $x < -\frac{2}{5}$.

Keskipisteet ovat suoralla $y = 2x - 1$, väleillä $x > 0$ ja $x < -\frac{2}{5}$.

Keskipisteet ovat siis suoralla $y = 2x - 1$, josta on poistettu väliltä $[-\frac{2}{5}, 0]$ jana.

449. Ympyrä sivuaa x-akselia, joten sen keskipisteen etäisyys x-akselista on ympyrän säde r, joten keskipisteen y-koordinaatti on r.

Ympyrän keskipiste on suoralla $y = \frac{1}{2}x$, eli $x = 2y$. Keskipisteen koordinaatit ovat $(2r, r)$.

Ympyrä sivuaa suoraa $4x + 3y - 24 = 0$, joten keskipisteen etäisyys suorasta on säde.

$$\frac{|4 \cdot 2r + 3r - 24|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = r$$

$$|11r - 24| = 5r$$

$$11r - 24 = 5r \quad \text{tai} \quad 11r - 24 = -5r$$

$$6r = 24 \qquad\qquad 16r = 24$$

$$r = 4 \qquad\qquad r = \frac{3}{2}$$

Kun ympyrän säde on 4, keskipiste on (8, 4) ja yhtälö on $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$ eli $x^2 + y^2 - 16x - 8y + 64 = 0$.

Kun ympyrän säde on $\frac{3}{2}$, keskipiste on $(3, \frac{3}{2})$ ja yhtälö

$(x-3)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ eli $x^2 + y^2 - 6x - 3y + 9 = 0$.

450. Olkoon kärki $O = (0, 0)$ ja kolmion kaksi muuta kärkeä $A = (a, a^2)$ ja $B = (b, b^2)$, $a \neq 0$ ja $b \neq 0$.
Sivujen OA ja OB suuntaisten suorien tulee olla kohtisuorassa toisiaan vastaan, eli kulmakertoimien tulon tulee olla -1.

$k_{OA} = \frac{a^2}{a} = a$ ja $k_{OB} = \frac{b^2}{b} = b$.

$ab = -1$, eli $b = -\frac{1}{a}$

Kolmion hypotenuusa on suoralla AB.

Suoran AB kulmakerroin on $\frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b + a$.

Suoran AB yhtälö on

$$\begin{aligned}
y - a^2 &= (b+a)(x-a) \\
y &= (b+a)x - (b+a)a + a^2 \\
y &= (b+a)x - ab \\
y &= (-\frac{1}{a} + a)x - (-1) \\
y &= \frac{a^2-1}{a}x + 1
\end{aligned}$$

Lasketaan suoran ja paraabelin akselin $x = 0$ leikkauspisteet.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{a^2-1}{a} \cdot 0 + 1 \\
y &= 1
\end{aligned}$$

Leikkauspiste ei riipu vakion a arvosta eli pisteiden A ja B sijainnista.

Piste on $(0, 1)$.

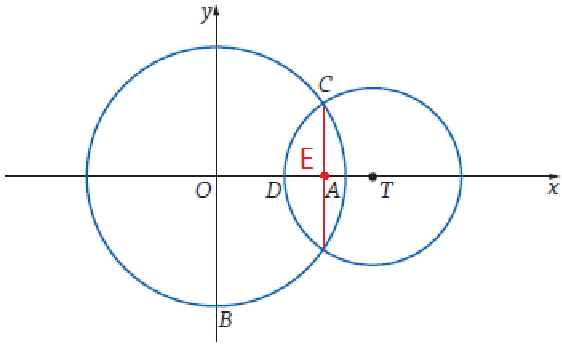
451. Suora $x_0x + y_0y = 1$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ tangentti, jos suoran etäisyys ympyrän keskipisteestä (0, 0) on säde 1.

Suoran yhtälö normaalimuodossa on $x_0x + y_0y - 1 = 0$.
Lasketaan suoran etäisyys keskipisteestä, kun tiedetään, että $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

$$\frac{|x_0 \cdot 0 + y_0 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

Piste (x_0, y_0) toteuttaa suoran ja ympyrän yhtälön, eli se on suoran ja ympyrän ainut yhteinen piste.

452. **a)** Olkoon piste $C = (x, y)$. Täydennetään kuvaan piste $E = (x, 0)$.



Kolmiot OTC ja OAC ovat yhdenmuotoiset, koska niissä molemmissa on suora kulma ja kulma O.
Tällöin

$$\frac{OT}{OC} = \frac{OC}{OE}$$

$$\frac{t}{1} = \frac{1}{x}$$

$$tx = 1$$

$$x = \frac{1}{t}$$

Koska piste C on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ kehällä, niin

$$y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t}.$$

Pisteen C koordinaatit parametrin t avulla ovat

$$C = \left(\frac{1}{t}, \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}\right) = \left(\frac{1}{t}, \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t}\right).$$

b) Ympyrän säde on pisteiden C ja T etäisyys.

$$r=\sqrt{(t-\frac{1}{t})^2+(0-\frac{\sqrt{t^2-1}}{t})^2}=\sqrt{(\frac{t^2-1}{t})^2+\frac{t^2-1}{t^2}}=\sqrt{\frac{(t^2-1)^2+t^2-1}{t^2}}.$$

Pisteen D x-koordinaatti on $t-r$, joten

$$t-\sqrt{\frac{(t^2-1)^2+t^2-1}{t^2}}=t-\sqrt{\frac{t^4-2t^2+1+t^2-1}{t^2}}=t-\sqrt{\frac{t^4-t^2}{t^2}}=t-\sqrt{t^2-1}.$$

Pitää osoittaa, että pisteet $B=(0,-1)$, $D=(t-\sqrt{t^2-1},\ 0)$ ja

$C=(\frac{1}{t},\frac{\sqrt{t^2-1}}{t})$ ovat samalla suoralla.

Määritetään kulmakerroin BD ja BC suuntaisille suorille.

$$k_{BD}=\frac{0+1}{t-\sqrt{t^2-1}-0}=\frac{1}{t-\sqrt{t^2-1}}=t+\sqrt{t^2-1}$$

$$k_{BC}=\frac{\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}+1}{\frac{1}{t}-0}=\sqrt{t^2-1}+t=t+\sqrt{t^2-1}$$

Kulmakertoimet ovat samat, joten pisteet ovat samalla suoralla.

453. $\dfrac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}=C$

$$(x-3)^2+y^2=C((x+3)^2+y^2)$$
$$(x-3)^2+y^2-C(x+3)^2-Cy^2=0$$
$$x^2-6x+9+y^2-C(x^2+6x+9)-Cy^2=0$$
$$(1-C)x^2-(1+C)6x+(1-C)y^2+(1-C)9=0 \;\|:(1-C)\neq 0$$
$$x^2-\frac{1+C}{1-C}\cdot 6x+y^2+9=0$$
$$x^2-2\cdot 3\cdot\frac{1+C}{1-C}x+(3\cdot\frac{1+C}{1-C})^2+y^2=-9+(3\cdot\frac{1+C}{1-C})^2$$
$$(x-3\cdot\frac{1+C}{1-C})^2+y^2=-9+9(\frac{1+C}{1-C})^2$$

Kun $C > 0$, $C \neq 1$, niin $|1 + C| > |1 - C|$ ja $(\frac{1+C}{1-C})^2>1$.

Tällöin $9(\frac{1+C}{1-C})^2>9$ ja $-9+9(\frac{1+C}{1-C})^2>0$.

Yhtälö esittää ympyrää.

$C = 0$:

$(x-3)^2+y^2=-9+9$

$(x-3)^2+y^2=0$

Käyrä on piste (3, 0).

$C = 1$:

$\dfrac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}=1$

$(x-3)^2+y^2=(x+3)^2+y^2$

$x^2-6x+9=x^2+6x+9$

$-12x=0$

$x=0$

Käyrä on suora $x = 0$.

Olkoon $A \neq B$ sekä $A > 0$ ja $B > 0$ että $A \neq 1$ ja $B \neq 1$.
Tällöin käyrät ovat

$$\frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}=A \text{ ja } \frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}=B.$$

Jotta käyrät leikkaisivat, pitäisi olla $A = B$, joka on vastoin oletusta.
Käyrät eivät siis leikkaa.