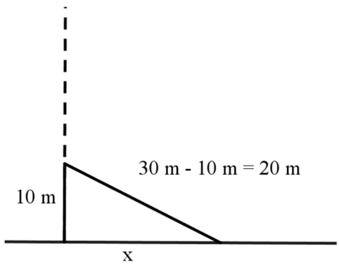
3 Geometria

3.1 Tasogeometria

LUVUN 3.1 YDINTEHTÄVÄT

301. **a)** Piirretään apukuva.

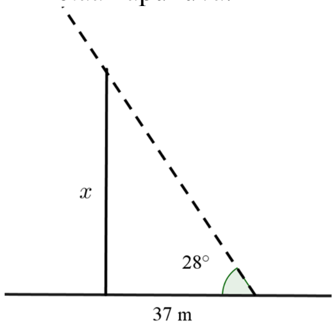


Oletetaan, että puu kasvaa maasta kohtisuorasti ylöspäin. Tyviosa, latvaosa ja maa muodostavat suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan latvan etäisyys tyvestä, x, Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + 10^2 = 20^2$$
$$x^2 = 400 - 100$$
$$x^2 = 300$$
$$x = \sqrt{300} = 17{,}32\ldots \quad (\text{tai } x = -\sqrt{300}\,)$$

Latva osui maahan 17 metrin etäisyydellä tyvestä.

b) Piirretään apukuva.

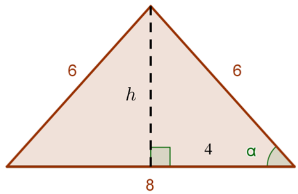


Ratkaistaan puun pituus x tangentin avulla.

$$\tan 28° = \frac{x}{37}$$
$$x = 37 \cdot \tan 28°$$
$$x = 19,67...$$

Puun korkeus on 20 metriä.

c) Piirretään apukuva. Kolmio on tasakylkinen, koska siinä on kaksi yhtä pitkää sivua. Tasakylkisen kolmion korkeusjana h puolittaa kannan.



Kolmion pienin kulma on lyhintä sivua vastassa. Ratkaistaan kolmion korkeusjanan pituus h.

$$h^2 + 4^2 = 6^2$$
$$h^2 = 36 - 16$$
$$h^2 = 20$$
$$h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad (\text{tai } h = -\sqrt{20}\,)$$

Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{6}$$
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$\alpha = 48,1...° \approx 48°$$

302. **a)** Kehäkulma on puolet keskuskulmasta, eli 30°.

b) Keskuskulman ja tangenttikulman summa on 180°, joten tangenttikulma on 180° − 60° = 120°.

c) Kaaren pituuden suhde koko ympyrän kaareen on sama kuin keskuskulman suhde 360°:een.

$$\frac{4}{2\pi r} = \frac{60°}{360°}$$
$$\frac{2}{\pi r} = \frac{1}{6}$$
$$\pi r = 12$$
$$r = \frac{12}{\pi}$$

Halkaisija on $2r = \dfrac{24}{\pi}$.

303. Janan *CA* pituus saadaan vähentämällä janan *PA* pituudesta janan *PC* pituus. Jana *PC* on ympyrän säde, joten sen pituus on 5. Jana *PA* on suorakulmaisen kolmion *PAB* hypotenuusa. Ratkaistaan *PA* Pythagoraan lauseella.

$PA^2 = PB^2 + BA^2$
$PA^2 = 5^2 + 12^2$
$PA^2 = 169$
$PA = 13$ (tai $PA = -13$)

$CA = 13 - 5 = 8.$

Ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta *PAB* kulma *P*, jota merkitään kirjaimella α.

$$\tan\alpha = \frac{12}{5}$$
$$\alpha = 67{,}38...°$$

$$b = \frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi\cdot 5 = 5{,}880... \approx 5{,}9.$$

Janan *CA* pituus on 8 ja kaaren *b* pituus 5,9.

304. **a)** Kolmion pinta-ala voidaan laskea kaavalla $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 20\cdot \sin\alpha = 30$$
$$100\cdot \sin\alpha = 30$$
$$\sin\alpha = 0,3$$
$$\alpha = 17,45...^\circ \text{ tai } \alpha = 180^\circ - 17,45...^\circ = 162,54...^\circ$$

Kulman suuruus on 17,5° tai 162,5°.

b) Kolmion pienin kulma on lyhintä sivua vastassa. Ratkaistaan kulma α kosinilauseella.

$$3^2 = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6\cdot \cos\alpha$$
$$9 = 16 + 36 - 48\cdot \cos\alpha$$
$$48\cdot \cos\alpha = 43$$
$$\cos\alpha = \frac{43}{48}$$
$$\alpha = 26,38...^\circ$$

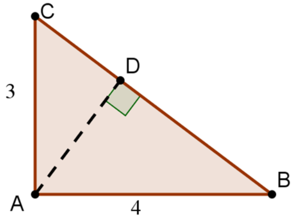
Pienimmän kulman suuruus on 26,4°.

c) Suurin kulma on pisintä sivua vastassa. Lasketaan suurimman kulman α suuruus sinilauseella.

$$\frac{6,3}{\sin 19^\circ} = \frac{14,7}{\sin\alpha}$$
$$6,3\cdot \sin\alpha = 14,7\cdot \sin 19^\circ \quad ||:6,3$$
$$\sin\alpha = 0,759...$$
$$\alpha = 49,43...^\circ \text{ tai } \alpha = 180^\circ - 49,43...^\circ = 130,56...^\circ$$

Kulma on 131°.

305. Piirretään apukuva.



Lasketaan hypotenuusan BC pituus Pythagoraan lauseella.

$BC^2 = 3^2 + 4^2$
$BC^2 = 25$
$BC = 5$ (tai $BC = -5$)

Kolmiot ABC ja ABD ovat yhdenmuotoiset, koska niissä on molemmissa suora kulma ja yhteinen kulma B.

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$$
$$\frac{BD}{4} = \frac{4}{5} \parallel \cdot 4$$
$$BD = \frac{16}{5}$$

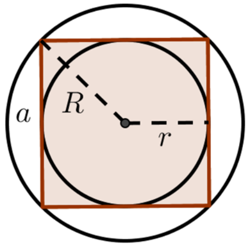
$$DC = BC - BD = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5}$$

Korkeusjana jakaa hypotenuusan osiin, joiden pituudet ovat $\frac{16}{5}$ ja $\frac{9}{5}$.

306. Olkoon B:n etäisyys maan keskipisteestä r ja A:n etäisyys R. B:n radan pituus on $2\pi r$ ja A:n radan pituus on $2\pi R$.
$2\pi R = 2\pi r + 50$
$$R = \frac{2\pi r + 50}{2\pi} = r + \frac{50}{2\pi} = r + 7{,}95...$$

A on 8 km korkeammalla.

307. Piirretään apukuva. Merkitään neliön sivun pituus a, sisään piirretyn ympyrän säde r ja ympäri piirretyn ympyrän säde R.



$r=\frac{a}{2}$

Sisään piirretyn ympyrän ala on $\pi r^2=\pi(\frac{a}{2})^2=\frac{a^2\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} a^2+a^2&=(2R)^2\\ 2a^2&=4R^2\\ R^2&=\frac{1}{2}a^2\\ R&=\frac{a}{\sqrt{2}}\ (\text{tai } R=-\frac{a}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

Ympäri piirretyn ympyrän ala on $\pi R^2=\pi(\frac{a}{\sqrt{2}})^2=\frac{a^2\pi}{2}$.

Pinta-alojen suhde on $\frac{a^2\pi}{4}:\frac{a^2\pi}{2}=\frac{a^2\pi}{4}\cdot\frac{2}{a^2\pi}=\frac{1}{2}=1:2$.

3.2 Avaruusgeometria

LUVUN 3.2 YDINTEHTÄVÄT

308. Veden tilavuus on 5,0 l = 5,0 dm^3 = 5000 cm^3. Tilavuus voidaan laskea kaavalla $\pi r^2 \cdot h$, missä r on pohjan säde ja h veden korkeus.

$$\pi r^2 \cdot 22 = 5000 \,\|: (\pi \cdot 22)$$
$$r^2 = \frac{5000}{\pi \cdot 22}$$
$$r = \sqrt{\frac{5000}{\pi \cdot 22}} = 8{,}50\ldots \text{ (tai } r = -8{,}50\ldots\text{)}$$

$2r = 17{,}01\ldots$

Pohjan halkaisija on 17 cm.

309. Merkitään kuution sivun pituutta kirjaimella a.
Kuution tilavuus on a^3.
Pyramidin tilavuus on $\frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a^3$.

Tilavuuksien suhde on 1:6.

310. **a)** Pallon säde r on puolet kuution sivun pituudesta a, eli $a = 2r$.
Kuution tilavuus on $a^3 = (2r)^3 = 8r^3$.
Pallon tilavuus on $\frac{4}{3}\pi r^3$.
Tilavuuksien suhde on $\frac{4}{3}\pi r^3 : (8r^3) = \frac{4\pi}{3} : 8 = \pi : 6$.

Tyhjää tilaa on $\dfrac{8r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{8r^3} = 0{,}476... \approx 48\%$.

b) Pallon säde r on sama kuin lieriön pohjan säde ja lieriön korkeus on pallon halkaisija, eli $2r$.
Lieriön tilavuus on $\pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$.
Pallon tilavuus on $\frac{4}{3}\pi r^3$.
Tilavuuksien suhde on $\frac{4}{3}\pi r^3 : (2\pi r^3) = \frac{4}{3} : 2 = 2 : 3$.

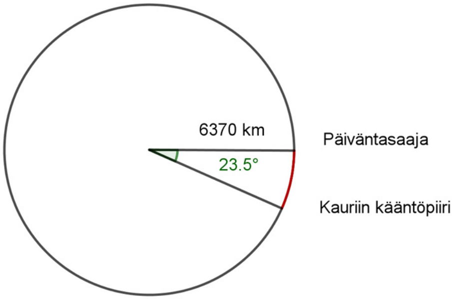
Tyhjää tilaa on $\dfrac{2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = 0{,}333... \approx 33\%$.

311. Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Merkitään 1,0 l pullon korkeutta x.

$$(\frac{x}{20})^3 = \frac{1{,}0}{0{,}33}$$
$$\frac{x^3}{8000} = \frac{1{,}0}{0{,}33} \quad || \cdot 8000$$
$$x^3 = 24242{,}42...$$
$$x = 28{,}94...$$

1,0 litran pullon korkeus on 29 cm.

312. Piirretään apukuva.



Pituus on $\frac{23{,}5°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6370\text{ km} = 2612{,}67...\text{ km} \approx 2610\text{ km}.$

313. Olkoon veden korkeus alussa h, astian pohjan säde r.
Veden tilavuus ennen jäätymistä on $\pi r^2 h$ ja jäätymisen jälkeen $1{,}1\ \pi r^2 h$.
Astian korkeuden tulee siis olla $1{,}1h$.

Astian korkeudesta tulee jättää täyttämättä $0{,}1h$, joka on
$\frac{0{,}1h}{1{,}1h} = 0{,}0909... \approx 9\%$ astian korkeudesta.

314. **A**: $550 \cdot 10^6$ mm = 550 000 000 mm = 550 km, eli **III**

B: 0,2 l = 0,2 dm^3 = 200 cm^3 = 200 ml = 20 cl, eli **I ja II**

C: 0,00056 m^2 = 0,056 dm^2 = 5,6 cm^2 = 560 mm^2 eli **I ja II**

D: $5{,}6 \cdot 10^8$ dm^2 = $5{,}6 \cdot 10^6$ m^2 = 5 600 000 m^2 = 5,6 km^2 = 560 ha eli **III**

E: $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ m = 0,00012 m = 0,12 mm = 0,012 cm eli **II**

F: 88 mm^3 = 0,088 cm^3 = $88 \cdot 10^{-9}$ m^3 = $8{,}8 \cdot 10^{-8}$ m^3 = 0,088ml
= 0,000088 l = $8{,}8 \cdot 10^{-5}$ l eli **III**

G: 440 000 m^2 = 44 ha = 0,44 km^2 eli **II ja III**

H: 0,05 dl = 5 ml = 5 cm^3 eli **I ja III**

Luvun 3 vahvistavat ja syventävät tehtävät

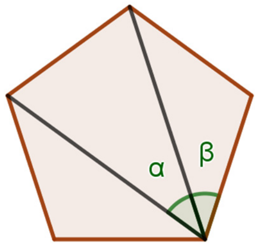
VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

315. **a)** Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Merkitään kantakulmat $5x$ ja huippukulma $2x$. Kolmion kulmien summa on 180°.

$$5x + 5x + 2x = 180°$$
$$12x = 180° \quad ||:12$$
$$x = 15°$$

Kantakulmat ovat $5 \cdot 15° = 75°$ ja huippukulma $2 \cdot 15° = 30°$.

b) Piirretään apukuva.



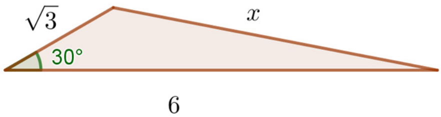
Säännöllisen viisikulmion yhden kulman suuruus on $\frac{3 \cdot 180°}{5} = 108°$.

Muodostuneet kolmiot ovat tasakylkisiä.

$108° + 2\beta = 180°$, josta $\beta = 36°$.

Tällöin $\alpha = 108° - 2\beta = 108° - 72° = 36°$.

316. **a)** Piirretään apukuva.

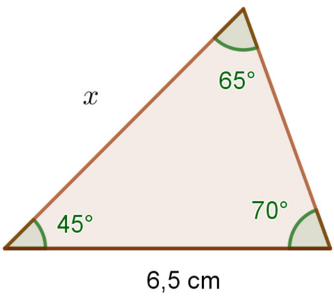


Määritetään kolmannen sivun pituus x kosinilauseen avulla.

$$x^2 = 6^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30°$$
$$x^2 = 36 + 3 - 12 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x^2 = 21$$
$$x = \sqrt{21} \text{ (tai } x = -\sqrt{21})$$

Kolmannen sivun pituus on $\sqrt{21}$.

b) Piirretään apukuva. Kolmion kolmas kulma on 180° − 45° − 65° = 70°. Pisin sivu on suurinta kulmaa vastassa.



Ratkaistaan pisin sivu x sinilauseella.

$$\frac{x}{\sin 70°} = \frac{6,5}{\sin 65°} \quad \| \cdot \sin 70°$$
$$x = 6,73...$$

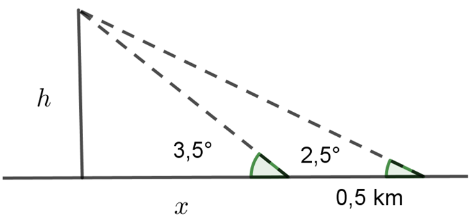
Pisin sivu on 6,7 cm.

c) Suurin kulma on pisintä sivua vastapäätä. Ratkaistaan suurin kulma α kosinilauseella.

$$\sqrt{19}^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\alpha$$
$$19 = 9 + 16 - 24\cos\alpha$$
$$24\cos\alpha = 6$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{4}$$
$$\alpha = 75{,}52...°$$

Suurin kulma on 75,5°.

317. Piirretään apukuva. Merkitään tornin korkeutta h ja lähemmän katselupaikan etäisyyttä x.



Oletetaan, että torni on kohtisuorassa maanpintaan nähden.

Ratkaistaan h suorakulmaisista kolmioista.

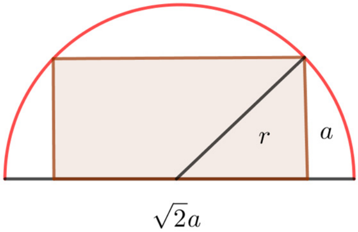
$$\tan 3{,}5° = \frac{h}{x} \qquad \tan 2{,}5° = \frac{h}{x+0{,}5}$$
$$h = x \cdot \tan 3{,}5° \qquad h = (x+0{,}5)\cdot \tan 2{,}5°$$

$$x \cdot \tan 3{,}5° = (x+0{,}5)\cdot \tan 2{,}5°$$
$$x \cdot \tan 3{,}5° = x \cdot \tan 2{,}5° + 0{,}5 \cdot \tan 2{,}5°$$
$$x(\tan 3{,}5° - \tan 2{,}5°) = 0{,}5 \cdot \tan 2{,}5°$$
$$x = \frac{0{,}5 \cdot \tan 2{,}5°}{\tan 3{,}5° - \tan 2{,}5°}$$
$$x = 1{,}247...$$

$$h = x \cdot \tan 3{,}5° = 1{,}247... \cdot \tan 3{,}5° = 0{,}0762...$$

Tornin korkeus on 76 m ja katseluetäisyydet ovat 1,2 km ja 1,7 km.

318. Piirretään poikkileikkauskuva kuution pohjan lävistäjää pitkin. Merkitään kuution sivua a. Kuution pohjan lävistäjä on $\sqrt{2}a$.



$$r^2 = a^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = a^2 + \frac{2}{4}a^2 = \frac{3}{2}a^2$$

$$r = \sqrt{\frac{3}{2}}a \text{ (tai } r = -\sqrt{\frac{3}{2}}a)$$

Kuution tilavuus on a^3.
Puolipallon tilavuus on

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{2}{3}\pi(\sqrt{\frac{3}{2}}a)^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}a^3 = \sqrt{\frac{3}{2}}\pi a^3 = \frac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3.$$

Tilavuuksien suhde on $\frac{a^3}{\frac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3} = \frac{2}{\sqrt{6}\pi} = 0,259...$.

Kuution tilavuus on 26 % puolipallon tilavuudesta.

319. Olkoon padan sisäsäde r.

Padan sisäosan tilavuus on $\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$.

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 74$$

$$r = 3,28...(\text{dm})$$

Padan säde on 3,28… dm = 32,8… cm.
(67,0 cm – 2 · 32,8… cm) : 2 = 0,686… cm

Padan seinämän paksuus on 0,7 cm.

320. Pisin sivuista on $a + 1$, joka on siis hypotenuusa.
Suorakulmaisille kolmioille on voimassa Pythagoraan lause.

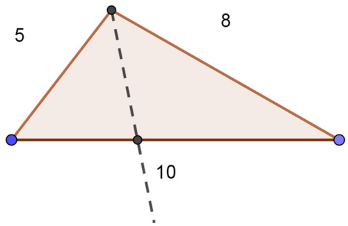
$$\begin{aligned}(a-1)^2 + a^2 &= (a+1)^2 \\ a^2 - 2a + 1 + a^2 &= a^2 + 2a + 1 \\ a^2 - 4a &= 0 \\ a(a-4) &= 0 \\ a &= 0 \text{ tai } a = 4\end{aligned}$$

Jotta muodostuisi kolmio, tulee olla $a = 4$.

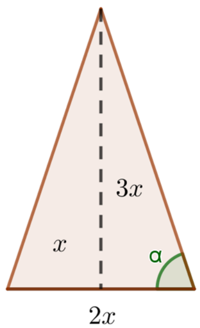
Koska puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora, suorakulmaisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija on kolmion hypotenuusa.
Halkaisija on $4 + 1 = 5$, joten säde on $2\frac{1}{2}$.

321. **a)** Kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Suurinta kulmaa vastassa on pisin sivu 10. Kulmanpuolittaja jakaa sivun suhteessa 5:8.

Osat ovat $\frac{5}{13}\cdot 10=\frac{50}{13}$ ja $\frac{8}{13}\cdot 10=\frac{80}{13}$.



b) Piirretään apukuva. Merkitään kantaa $2x$ ja korkeutta $3x$. Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan.



Määritetään kantakulma α suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\tan\alpha=\frac{3x}{x}$$
$$\tan\alpha=3$$
$$\alpha=71{,}56...°$$

Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Huippukulman suuruus on $180° - 2 \cdot 71{,}56…° = 36{,}86…°$.

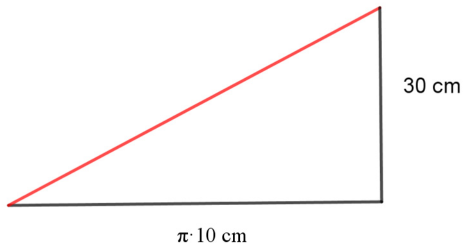
Kolmion kulmat ovat 71,6°, 71,6° ja 36,9°.

322. **a)** Säännöllisen n-kulmion yhdestä kulmasta voidaan piirtää $n-3$ lävistäjää. Nämä lävistäjät jakavat n-kulmion $n-2$ kolmioon. n-kulmion kulmien summa on yhtä suuri kuin $n-2$ kolmion kulmien yhteenlaskettu summa eli $(n-2)\cdot 180°$.

b) n-kulmion kulmien summa on $(n-2)\cdot 180°$.

Yhden kulman suuruus on tällöin $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$.

323. Yhdellä kierroksella naru nousee $\frac{1}{3}$ putken pituudesta, eli 30 cm ja kiertää kokonaisen kierroksen, eli $\pi \cdot 10$ cm. Piirretään apukuva.



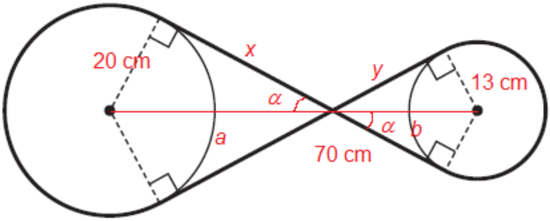
Ratkaistaan narun yhdellä kierroksella kiertämä matka x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 30^2 + (\pi \cdot 10)^2$$
$$x^2 = 900 + 100\pi^2$$
$$x = \sqrt{900+100\pi^2} \text{ (tai } x = -\sqrt{900+100\pi^2}\text{)}$$

$$3\cdot\sqrt{900+100\pi^2} = 130{,}31...$$

Narun pituus on 130 cm.

324. Piirretään kuva. Isomman hihnapyörän säde on 20,0 cm ja pienemmän 13,0 cm.



Kuvaan merkityt kulmat α ovat ristikulmina yhtä suuret. Muodostuneet suorakulmaisetkolmiot ovat siten yhdenmuotoiset.

$$\frac{20}{x}=\frac{13}{y}$$

$$y=\frac{13x}{20}$$

Määritetään kolmioiden hypotenuusat *a* ja *b*.

$$a^2=20^2+x^2$$

$$a=\sqrt{400+x^2}$$

$$b^2=13^2+y^2=13^2+(\frac{13x}{20})^2$$

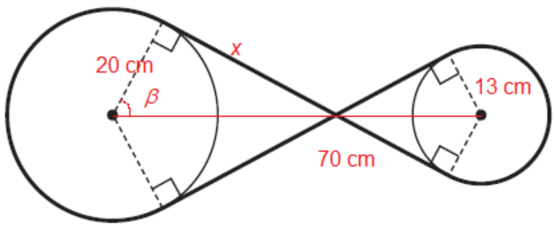
$$b=\sqrt{169+\frac{169x^2}{400}}$$

$$a+b=70$$

$$\sqrt{400+x^2}+\sqrt{169+\frac{169x^2}{400}}=70$$

$$x=37{,}41\ldots \text{ (tai } x=-37{,}41\ldots)$$

$$y=\frac{13x}{20}=24{,}31\ldots$$



Ratkaistaan kulma β.

$$\tan\beta = \frac{x}{20}$$
$$\beta = 61{,}87...^\circ$$

Hihnan pituus isomman pyörän kehällä on

$$\frac{360^\circ - 2\beta}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 20 = 82{,}68...$$

Hihnan pituus pienemmän pyörän kehällä on

$$\frac{360^\circ - 2\beta}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 13 = 53{,}60...$$

Hihnan pituus yhteensä on
82,68… + 53,60….+ 2 · 37,41… + 2 · 24,31… = 259,53… ≈ 260 cm.

325. Merkitään pohjan halkaisija x ja korkeus $2x$.

Pohjan pinta-ala on $\pi\cdot(\frac{x}{2})^2$.

$$\pi\cdot(\frac{x}{2})^2 = 150$$
$$x = 13{,}81...\ (\text{tai } x = -13{,}81...)$$

Korkeus on $2x = 27{,}63...$.

Lieriön tilavuus on $150\cdot 27{,}63... = 4145{,}92... \approx 4150\ \text{cm}^3$.

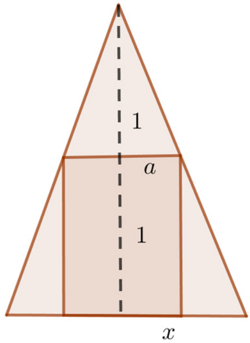
326. **a)** Runko pitenee muotonsa säilyttäen, jolloin alkuperäinen ja kasvanut puu ovat yhdenmuotoiset. Koska mitat kasvavat viidesosan, eli 20%, on mittakaava 1:1,2.
Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio eli $(1:1,2)^3 = 1: 1,728$.
Puun tilavuus kasvaa siis 73 %.

b) Olkoon puun tyven halkaisija *a* ja korkeus *h*. Puun tilavuus alussa on
$\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot h$.

Kun tyven halkaisija kasvaa viidesosan eli 20 % ja korkeus neljäsosan eli 25 %, on uusi tilavuus $\frac{1}{3}\pi\cdot(1,2\cdot\frac{a}{2})^2\cdot 1,25h = 1,8\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot(\frac{a}{2})^2\cdot h$.

Tilavuus kasvaa 80 %.

327. **a)** Piirretään poikkileikkauskuva.



Muodostunut pieni kartio ja iso kartio ovat yhdenmuotoiset. Koska korkeuksien suhde on 1:2, myös pohjaympyröiden säteiden suhde on 1:2, joten $x = 2a$.

Kartioiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio, eli 1:8. Kartion toisen osan suhde koko kartioon on siten 7:8.

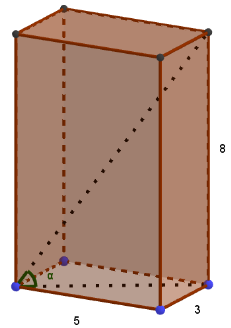
Kartion osien suhde on 1:7.

b) Lieriön korkeus on 1 ja pohjan säde a. Kartion pohjan säde on $2a$. Lieriön tilavuus on $\pi \cdot a^2 \cdot 1$.

Kartion tilavuus on $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2a)^2 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8a^2 = \frac{8}{3}\pi a^2$.

Lieriön ja kartion tilavuuksien suhde on $\frac{\pi a^2}{\frac{8}{3}\pi a^2} = \frac{3}{8} = 3:8$.

328. **a)** Piirretään apukuva.

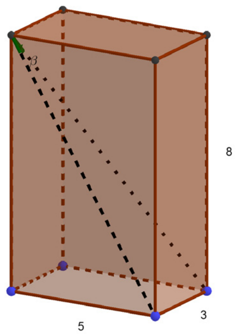


Pohjan lävistäjän pituus on $\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.

$$\tan\alpha=\frac{8}{\sqrt{34}}$$
$$\alpha=53{,}91...°$$

Avaruuslävistäjän ja pohjan halkaisijan välinen kulma on 53.9°-

b)



Pohjan halkaisija pituus on $\sqrt{5^2+8^2}=\sqrt{89}$.

$$\tan\beta=\frac{3}{\sqrt{89}}$$
$$\beta=17{,}64...°$$

Avaruuslävistäjän ja pohjan välinen kulma on 17,6°.

329. Kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.
Merkitään $AC = 4x$ ja $BC = 3x$.
Merkitään $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = \alpha$.

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos\alpha$$
$$4^2 = (4x)^2 + 6^2 - 2 \cdot 4x \cdot 6 \cdot \cos\alpha$$

$$DB^2 = DC^2 + BC^2 - 2 \cdot DC \cdot BC \cdot \cos\alpha$$
$$3^2 = 6^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3x \cdot \cos\alpha$$

Ratkaistaan yhtälöparista x.

$$\begin{cases} 4^2 = (4x)^2 + 6^2 - 2 \cdot 4x \cdot 6 \cdot \cos\alpha \\ 3^2 = 6^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3x \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

$x = 2$ tai $x = -2$, joista vain $x = 2$ kelpaa ratkaisuksi.

$AC = 4 \cdot 2 = 8$ ja $BC = 3 \cdot 2 = 6$.

330. **a)** Kuutiot ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Mittakaava on 1:1,1, joten pinta-alojen suhde on 1:1,21. Pinta-ala kasvaa 21 %.

b) Kuutiot ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Tilavuuksien suhde on 1:0,75, joten mittakaava on suhteen kuutiojuuri 1: 0,9085… Särmä lyhenee 9,1 %.

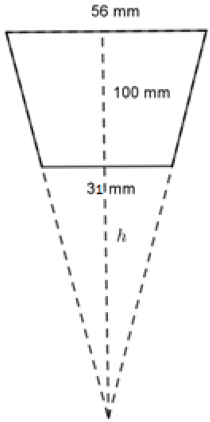
c) Kuutiot ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Pinta-alojen suhde on 1:1,44. Mittakaava on pinta-alojen suhteen neliöjuuri ja tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$k = \sqrt{\frac{1}{1,44}}$$

$$k = \frac{1}{1,2}$$

Mittakaava on 1:1,2, joten tilavuuksien suhde on $(1:1,2)^3 = 1 : 1,728$. Tilavuus kasvaa 73 %.

331. **a)** Piirretään poikkileikkauskuva.



Kartio, josta pikari on saatu katkaisemalla, on korkeudeltaan h + 100.
Kartio ja poistettu pienempi kartio ovat yhdenmuotoisia.

$$\frac{56}{h+100}=\frac{31}{h}$$
$$h=124$$

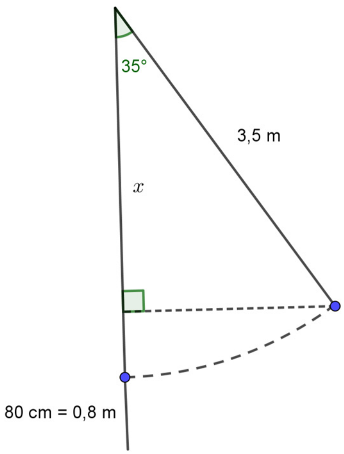
Pikarin tilavuus saadaan, kun ison kartion tilavuudesta poistetaan pienemmän kartion tilavuus. Pohjien säteet ovat 28 mm ja 15,5 mm ja koko kartion korkeus on 100 mm + 124 mm = 224 mm.

$$\frac{1}{3}\pi\cdot 28^2\cdot 224-\frac{1}{3}\pi\cdot 15{,}5^2\cdot 124=152707{,}5...$$

Pikarin tilavuus on noin 150 000 mm^3 = 0,15 dm^3 = 0,15 l = 150 ml.

b) Kartion korkeus on noin 220 mm.

332. Piirretään kuva.

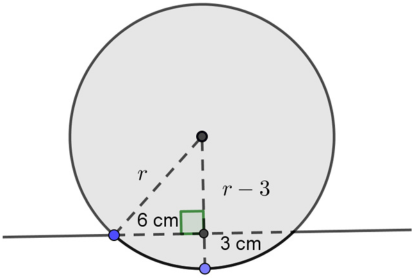


Ratkaistaan kuvaan merkitty x suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos 35° = \frac{x}{3,5}$$
$$x = 3,5 \cdot \cos 35° = 2,867...$$

Istuinlauta nousee korkeudelle
(3,5 m – 2,86… m) + 0,8 m = 1,43… m ≈ 1,4 m.

333. Piirretään poikkileikkauskuva.
Merkitään ympyrän sädettä r.

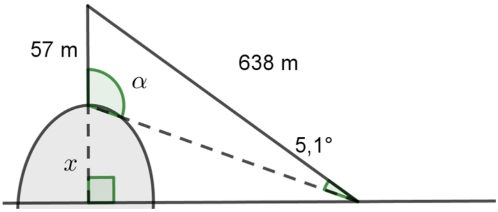


Ratkaistaan kuvan suorakulmaisesta kolmiosta ympyrän säde r.
$r^2 = (r - 3)^2 + 6^2$
$r = 7{,}5$

Kuulan halkaisija on $2 \cdot 7{,}5$ cm = 15 cm.
Kuulan säde on 7,5 cm = 0,075 m.
Kuulan tilavuus on $\frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}075 \text{ m})^3 = 0{,}001767...\text{m}^3$.
Kuulan massa on $0{,}001767... \text{ m}^3 \cdot 7{,}86 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 = 13{,}88...\text{kg} \approx 14 \text{ kg}$.

Kuulan halkaisija on 15 cm ja massa 14 kg.

334. Piirretään kuva. Merkitään mäen korkeus x ja katselupaikan ja maston juuren etäisyys y.



$$\frac{57}{\sin 5{,}1°} = \frac{638}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{638 \cdot \sin 5{,}1°}{57}$$

$$\alpha = 84{,}26...° \text{ tai } \alpha = 180° - 84{,}26...° = 95{,}73...°$$

Koska katselupaikka on maston alapuolella, kulma $\alpha = 95{,}73\ldots°$.

Kolmion kolmas kulma on $180° - 5{,}1° - 95{,}73\ldots° = 79{,}16\ldots°$.
Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan:

$$\cos 79{,}16...° = \frac{57 + x}{638}$$

$$x = 638 \cdot \cos 79{,}16...° - 57$$

$$x = 62{,}94...$$

Mäen korkeus on 63 m.

335. Kolmiot *ABC* ja *ADC* ovat yhdenmuotoiset, koska niissä on yhteinen kulma *A* ja suora kulma. Kolmiot *ABC* ja *CDB* ovat yhdenmuotoiset, koska niissä on yhteinen kulma *B* ja suora kulma. Tällöin myös kolmiot *ADC* ja *CDB* ovat yhdenmuotoiset.

Merkitään $DB = b$.
Tällöin kolmioiden *ABC* ja *CDB* yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

$$a^2 = b(a+b)$$

$$a^2 = ab + b^2$$

$$b^2 + ab - a^2 = 0$$

$$b = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5}a}{2}$$

Koska $a > 0$ ja $b > 0$,

$$b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a\,.$$

Merkitään kulma $A = \alpha$. Kolmiosta *ABC* saadaan

$$\sin\alpha = \frac{a}{a+b}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}a}$$

$$\sin\alpha = 0{,}618...$$

$$\alpha = 38{,}17...^\circ$$

Kulma *A* on 38° ja kulma *B* on 90° − 38,17…° = 51,82…° ≈ 52°.

336. Muutetaan leveyspiirien asteluvut asteiksi.

$60°9' = 60° + \frac{9}{60}° = 60{,}15°$

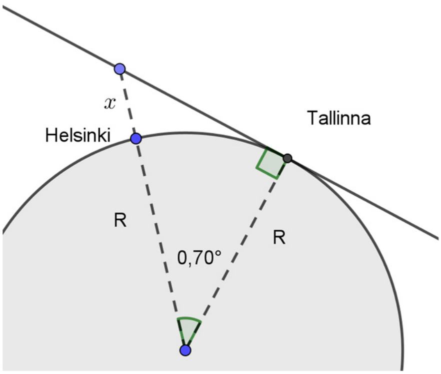
$59°27' = 59° + \frac{27}{60}° = 59{,}45°$

Leveyspiirien välinen kulma on $60{,}15° - 59{,}45° = 0{,}70°$.

Maapallon ympärysmitta on 40 000 km. Ratkaistaan maapallon säde R.

$$2\pi R = 40000$$
$$R = \frac{20000}{\pi}$$

Piirretään apukuva.
Merkitään kuumailmapallon korkeutta x.

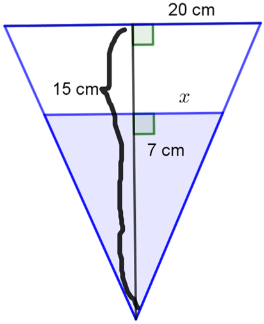


Ratkaistaan x suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos 0{,}70° = \frac{R}{R+x}$$
$$x = \frac{R - R \cdot \cos 0{,}70°}{\cos 0{,}70°}$$
$$x = 0{,}475\ldots$$

Kuumailmapallolla tulisi nousta 0,48 km eli 480 m korkeuteen.

337. Piirretään poikkileikkauskuva.



Kuvan suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset, koska niillä on yhteinen kulma ja molemmissa kolmioissa on suora kulma.

$$\frac{x}{7} = \frac{20}{15}$$

$$x = \frac{20}{15} \cdot 7 = \frac{28}{3}$$

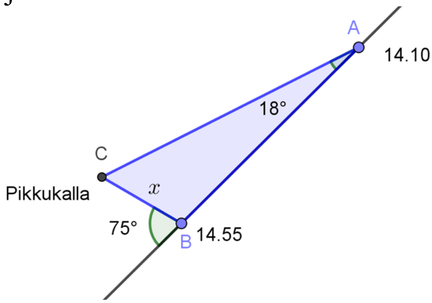
Vesimäärän tilavuus on $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\frac{28}{3})^2 \cdot 7 = 638,55...(\text{cm}^3)$.

Pinta-ala, jolle vesimäärä on satanut, on mittarin suuaukon pinta-ala.

$\pi \cdot 20^2 = 1256,63...(\text{cm}^2)$.

Sademäärä on tilavuus 638,55 cm^3 jaettuna pinta-alalla 1256,63… cm^2, eli 0,508… cm ≈ 5 mm.

338. Piirretään kuva. Merkitään purjeveneen etäisyyttä majakasta klo 14.55 kirjaimella x.



Määritetään veneen kellonaikojen 14.10 ja 14.55 välissä kulkema matka, eli kuvan etäisyys AB.
14.55 ja 14.10 väli on 45 min = 0,75 h.
7,2 · 1852 m/h · 0,75 h = 10000,8 m

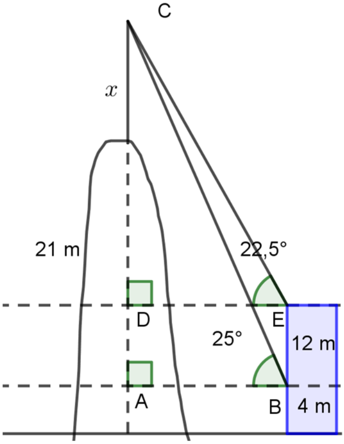
Kuvan kolmion BAC kulma B on 180° − 75° = 105° ja kulma C on 180° − 18° − 105° = 57°.

Määritetään etäisyys x sinilauseella.

$$\frac{x}{\sin 18°} = \frac{10000{,}8}{\sin 57°}$$
$$x = 3684{,}8...$$

Purjeveneen etäisyys majakasta kello 14.55 on 3,7 km.

339. Piirretään kuva.



Kuvan suorakulmaisessa kolmiossa *DEC* kateetti *DC* on pituudeltaan 21 m – 16 m + x = 5 m + x.
Kolmiossa *ABC* kateetti *AC* on pituudeltaan 21 m – 4 m + x = 17 m + x.
Kateetit *AB* ja *DE* ovat yhtä pitkät.

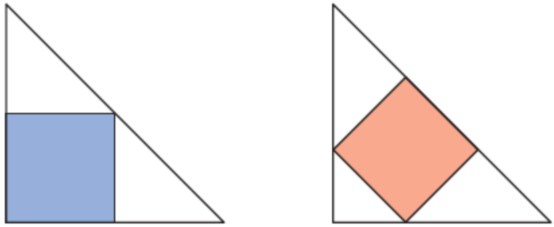
$$\tan 22{,}5° = \frac{DC}{DE}$$
$$\tan 22{,}5° = \frac{5+x}{DE}$$
$$DE = \frac{5+x}{\tan 22{,}5°}$$

$$\tan 25° = \frac{AC}{AB}$$
$$\tan 25° = \frac{17+x}{AB}$$
$$AB = \frac{17+x}{\tan 25°}$$

$$\frac{5+x}{\tan 22{,}5°} = \frac{17+x}{\tan 25°}$$
$$x = 90{,}41\ldots$$

Tornin korkeus on 90,4 metriä.

340. Piirretään kuva.



Molemmissa kolmioissa neliön ulkopuolelle jäävät pienet kolmiot ovat yhdenmuotoisia ison kolmion kanssa. Ensimmäisessä kuviossa pienet kolmiot ovat yhteneviä ja toisessa ison kolmion hypotenuusalla olevat pienet kolmiot ovat yhteneviä.

Ensimmäisen (sinisen) neliön sivun pituus on puolet kolmion kateetin pituudesta. Toisen (punaisen) neliön sivun pituus on kolmasosa kolmion hypotenuusan pituudesta.

Olkoon kolmion kateetin pituus a. Sinisen neliön sivun pituus on $\frac{1}{2}a$ ja pinta-ala $\frac{1}{4}a^2$.

Ratkaistaan kolmion hypotenuusan pituus b.

$b^2 = a^2 + a^2$

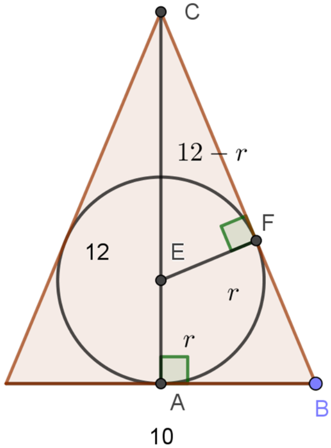
$b^2 = 2a^2$

$b = \sqrt{2}a$ (tai $b = -\sqrt{2}a$)

Punaisen neliön sivun pituus on $\frac{1}{3}\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{3}a$ ja pinta-ala $\frac{2}{9}a^2$.

Piirtämällä kaksi sivua kateeteille syntyy suurempi neliö.

341. Piirretään kuva. Merkitään ympyrän säde r.



Janan AB pituus on 5 ja janan AC pituus on 12.
Kolmiot ABC ja EFC ovat yhdenmuotoiset, koska niissä on yhteinen kulma C ja suora kulma (kk-lause).

Ratkaistaan kolmion ABC hypotenuusa BC.

$BC^2 = 5^2 + 12^2$

$BC^2 = 169$

$BC = 13$ (tai $BC = -13$)

Kolmioiden ABC ja EFC yhdenmuotoisuudesta saadaan

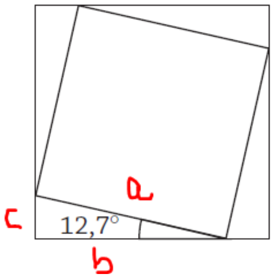
$$\frac{EF}{EC} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{r}{12-r} = \frac{5}{13}$$

$$r = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Ympyrän säde on $3\frac{1}{3}$.

342. Olkoon pienemmän neliön sivun pituus a, kolmion pidempi kateetti b ja lyhempi kateetti c.



$$\sin 12,7° = \frac{c}{a}$$
$$c = a \cdot \sin 12,7°$$

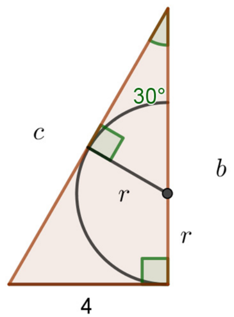
$$\cos 12,7° = \frac{b}{a}$$
$$b = a \cdot \cos 12,7°$$

Isomman neliön sivun pituus on $b + c = a(\cos 12,7° + \sin 12,7°)$.

Pienemmän neliön sivun pituus on suuremman pituudesta
$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{a(\cos 12,7° + \sin 12,7°)} = 0,8365... \approx 84\%.$$

Pienemmän neliön pinta-ala on suuremman alasta
$$\frac{a^2}{(b+c)^2} = \frac{a^2}{a^2(\cos 12,7° + \sin 12,7°)^2} = 0,6998... \approx 70\%.$$

343. Piirretään kuva. Merkitään puoliympyrän sädettä r.



Ratkaistaan kolmion muiden sivujen pituudet.

$$\sin 30° = \frac{4}{c}$$
$$c = \frac{4}{\sin 30°} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

$$c^2 = 4^2 + b^2$$
$$8^2 = 4^2 + b^2$$
$$b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad (\text{tai } b = -\sqrt{48})$$

Kuvan suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset, koska molemmissa on yhteinen 30° kulma ja suora kulma.
Yhdenmuotoisuudesta saadaan

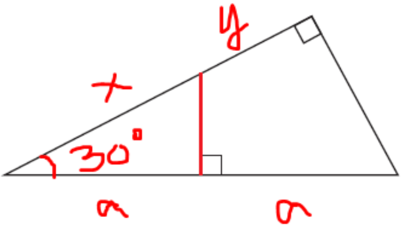
$$\frac{r}{b-r} = \frac{4}{c}$$
$$\frac{r}{4\sqrt{3}-r} = \frac{4}{8}$$
$$r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Kolmion pinta-ala on $\frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$.

Puoliympyrän pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{4\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{8\pi}{3}$.

Pinta-alojen suhde on $\frac{\frac{8\pi}{3}}{8\sqrt{3}} \overset{\sqrt{3})}{=} \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} = 0{,}6045... \approx 60\%$.

344. Täydennetään kuvaan merkinnät.



Kuvan kolmiot ovat yhdenmuotoiset, koska niissä on yhteinen kulma 30° ja suora kulma (kk-lause).

$$\cos 30° = \frac{a}{x}$$

$$x = \frac{a}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}a$$

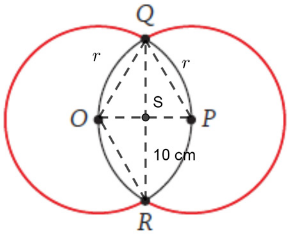
$$\cos 30° = \frac{x+y}{2a}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Osien x ja y pituuksien suhde on

$$x : y = \frac{2}{\sqrt{3}}a : \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 2:1\,.$$

345. Täydennetään kuvaan merkinnät.



Ympyröillä on sama säde, koska *OP* on niiden yhteinen säde.
OP, *OQ* ja *PQ* ovat ympyrän säteen *r* mittaisia.

Kolmio *OPQ* on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on *r*. Kolmion *OPQ* korkeusjana *SQ* on puolet pisteiden *Q* ja *R* välisestä etäisyydestä eli 5.

Suorakulmaisesta kolmiosta *OSQ* saadaan:

$$r^2 = (\frac{1}{2}r)^2 + 5^2$$
$$\frac{3}{4}r^2 = 25$$
$$r^2 = \frac{100}{3}$$
$$r = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ (tai } r = -\frac{10}{\sqrt{3}}\text{)}$$

Kolmion *OPQ* kaikki kulmat ovat 60°. Lyhyempää kaarta *RQ* vastaava keskuskulma on 120° ja pidempää kaarta vastaava 360° – 120° = 240°.
Pidemmän kaaren *RQ* pituus on

$$\frac{240°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{40}{3\sqrt{3}}\pi.$$

Lasketaan merkityn viivan pituus.

$$2 \cdot \frac{40}{3\sqrt{3}}\pi = \frac{80}{3\sqrt{3}}\pi = \frac{80\sqrt{3}}{9}\pi = 48,36...$$

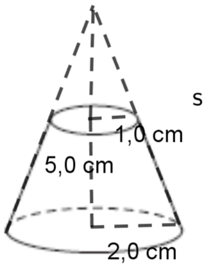
Pituus on noin 48 cm.

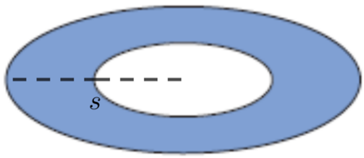
346. Jotta kuutio mahtuisi pallon sisälle, tulee kuution avaruuslävistäjän olla pallon halkaisijan mittainen.
Olkoon kuution särmä a. Kuution avaruuslävistäjän pituus on
$\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3}a.$
Tällöin

$$\sqrt{3}a = 2R$$
$$a=\frac{2}{\sqrt{3}}R.$$

Kuution särmän pituus on $\frac{2}{\sqrt{3}}R=\frac{2\sqrt{3}}{3}R.$

347. Täydennetään kuvaan merkinnät ja ympyräkartio kokonaiseksi.





Kartion poistettu kärkiosa on yhdenmuotoinen alkuperäisen kartion kanssa mittakaavassa 1:2.

Kartion sivujanan pituus voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta.

$$s^2 = 2{,}0^2 + 5{,}0^2$$
$$s^2 = 29$$
$$s=\sqrt{29} \text{ (tai } s=-\sqrt{29})$$

Poistetun kärjen sivujanan pituus on $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Pinta-ala saadaan, kun ulommasta ympyrästä vähennetään sisempi.

$$\pi\cdot s^2-\pi\cdot(\frac{s}{2})^2=\pi\cdot(\sqrt{29})^2-\pi\cdot(\frac{\sqrt{29}}{2})^2=\frac{3\cdot 29}{4}\pi=68{,}32...$$

Sinisen rengasalueen pinta-ala on 68 cm^2.

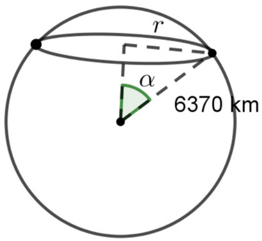
SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

348. Maapallo kiertää kerran akselinsa ympäri vuorokauden aikana. Olkoon lentokoneen kiertämän ympyrän säde r. Lentokone lentää 10 km korkeudella, joten leveyspiirin säde on r – 10. Lentokoneen nopeus on $\frac{2\pi r}{24}$ km/h.

Ratkaistaan r, kun lentokoneen nopeus on 900 km/h.

$$\frac{2\pi r}{24} = 900$$
$$r = 3437,74...$$

Leveyspiirin säde on 3427,74… km.



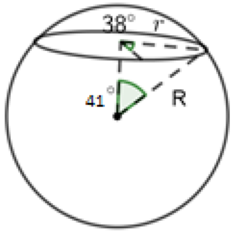
Ratkaistaan kulma α.

$$\sin\alpha = \frac{3427,74...}{6370}$$
$$\alpha = 32,55...°$$

Leveyspiirit lasketaan Päiväntasaajalta.
90° − 32,55…° = 57,44…°.

Leveyspiiri on 57,4° pohjoista tai eteläistä leveyttä.

349. Piirretään kuva. Merkitään maapallon sädettä R ja leveyspiirin sädettä r. Leveysaste on 49°, joten kulma Pohjoisnavalta mitattuna on $90° - 49° = 41°$.



Ratkaistaan maapallon säde.

$$2\pi R = 40000$$
$$R = \frac{20000}{\pi}$$

Ratkaistaan leveyspiirin säde suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 41° = \frac{r}{R}$$
$$r = R\sin 41° = \frac{20000}{\pi}\cdot\sin 41°$$

Lasketaan paikkakuntien välimatka leveyspiiriä pitkin.

$$\frac{38°}{360°}\cdot 2\pi r = \frac{38°}{360°}\cdot 2\pi\cdot\frac{20000}{\pi}\cdot\sin 41° = 2770{,}0...$$

Välimatka on 2770 km.

Paikkakuntien välimatka suoraviivaisesti voidaan laskea tasakylkisestä kolmiosta, jonka huippukulma on 38º ja kyljet r.
Etäisyys a on tällöin

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r\cdot r\cdot\cos 38°$$
$$a = 2719{,}5...$$

Maapallon keskipisteestä mitatun sektorin keskuskulma on sen tasakylkisen kolmion huippukulma, jonka kyljet ovat R ja kanta a.

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R\cdot R\cdot\cos\alpha$$
$$\alpha = 24{,}66...°$$

Paikkakuntien välinen lyhin etäisyys maanpintaa pitkin on 24,66…°:een ympyräsektorin kaaren pituus.

$$\frac{24{,}66...°}{360°}\cdot 40000\text{ km} = 2740{,}65...\text{ km} \approx 2740\text{ km}$$

350. **a)** Olkoon suorakulmaisen kolmion kateetit a ja b. Suorakulmaisen kolmion pinta-ala on $\frac{ab}{2}$. Koska $\frac{ab}{2} > 1$, niin $ab > 2$.

Jos kolmion molemmat kateetit ovat lyhempiä kuin 1, on tulo $ab < 1$, joten ainakin toisen kateeteista a ja b tulee olla pidempi kuin 1, jotta olisi $ab > 2$.

b) Olkoon kolmion kaksi sivua a ja b ja näiden välinen kulma γ. Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Tiedetään, että $\frac{1}{2}ab\sin\gamma > 1$, eli $ab\sin\gamma > 2$. Kaikilla kulman γ arvoilla $-1 \leq \sin\gamma \leq 1$. Jos a ja b ovat molemmat lyhempiä kuin 1, on tulo $ab < 1$. Jotta olisi $ab\sin\gamma > 2$, tulee ainakin toisen sivuista a ja b olla pidempi kuin 1.

351. **a)** Kaukalo ja kallistuksen jälkeen kaukalossa oleva vesimäärä ovat muodoltaan saman pohjaiset ja yhtä korkeat lieriö ja kartio. Kartion tilavuus on $\frac{1}{3}$ lieriön tilavuudesta. Vedestä valuu pois

$\frac{2}{3} = 0,666... \approx 67\%.$

b) Kallistuksen jälkeen vesimäärän tilavuus on $\frac{1}{3}$ koko astian tilavuudesta. Kun astia suoristetaan, sen pituus pysyy samana (b), joten päädyn pinta-alan tulee olla $\frac{1}{3}$ astian päädystä.

Päätykolmiot ovat yhdenmuotoiset. Koska pinta-alojen suhde on 1:3, on mittakaava $1:\sqrt{3}$.

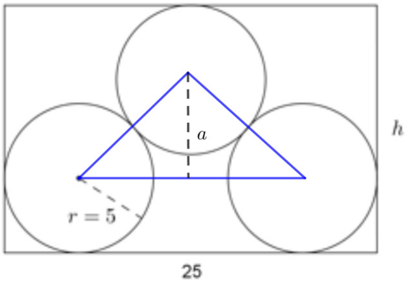
Vesi on korkeudella $\frac{1}{\sqrt{3}}$ astian korkeudesta. Astian korkeus d saadaan tasasivuisen kolmion korkeutena.

$$a^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + d^2$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ (tai } d = -\frac{\sqrt{3}}{2}a)$$

Veden korkeus on $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{2}a.$

352. Täydennetään kuvaan merkintöjä.



Ympyröiden keskipisteet yhdistävän kolmion kannan pituus on
25 – 2 · 5 = 15.

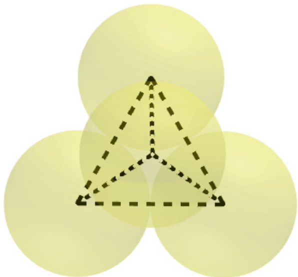
Tasakylkisen kolmion korkeus a voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta.

$$a^2 + 7\frac{1}{2}^{2} = 10^2$$
$$a^2 = \frac{175}{4}$$
$$a = \frac{5\sqrt{7}}{2} \text{ (tai } a = -\frac{5\sqrt{7}}{2}\text{)}$$

Suorakulmion korkeus h on $a + 2r = \frac{5\sqrt{7}}{2} + 10$.

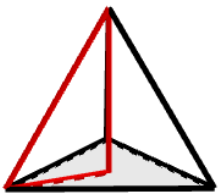
353. Yhdistämällä pallojen keskipisteet muodostuu tetraedri, jonka sivun pituus on $2r$, kun pallon säde on r ja korkeus h. Rakennelman korkeus on $h + 2r$. Tetraedrin tahkon korkeus on tasasivuisen kolmion korkeus

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2r = \sqrt{3}r.$$



Korkeusjana leikkaa pohjakolmion mediaanien leikkauspisteessä. Mediaanin leikkauspiste jakaa mediaanit suhteessa 2:1 kärjestä lukien, joten mediaanien leikkauspisteen etäisyys pohjakolmion kärjistä on

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}r = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$



Ratkaistaan tetraedrin korkeus h.

$$h^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 = (2r)^2$$

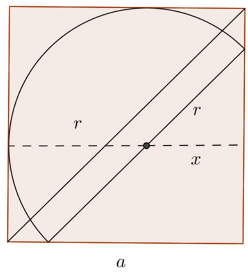
$$h^2 = 4r^2 - \frac{4}{3}r^2$$

$$h^2 = \frac{8}{3}r^2$$

$$h = \sqrt{\frac{8}{3}}r \text{ (tai } h = -\sqrt{\frac{8}{3}}r)$$

Rakennelman korkeus on $\sqrt{\frac{8}{3}}r + 2r = (\sqrt{\frac{8}{3}} + 2)r = (\frac{2\sqrt{6}}{3} + 2)r$.

354. Piirretään kuva.



Suurin mahdollinen puoliympyrä muodostuu, kun puoliympyrän kehä sivuaa neliön sivuja. Kolmio, jonka kateettia on merkitty kirjaimella *x,* on tasakylkinen, koska se on yhdenmuotoinen neliön puolikkaan kanssa.

$$x^2 + x^2 = r^2$$
$$2x^2 = r^2$$
$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad (x > 0)$$

Nyt

$$r + x = a$$
$$r + \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+1)r}{\sqrt{2}} = a,$$

josta $r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}a$.

Neliön pinta-ala on a^2.
Puoliympyrän pinta-ala on

$$\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}a\right)^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{2}{(\sqrt{2}+1)^2}a^2 = \frac{\pi}{(\sqrt{2}+1)^2}a^2$$

Ulkopuolelle jää neliön pinta-alasta $a^2 - \dfrac{\pi}{(\sqrt{2}+1)^2}a^2$.

$$\frac{a^2 - \dfrac{\pi}{(\sqrt{2}+1)^2}a^2}{a^2} = 0{,}4609\ldots \approx 46\ \%.$$

355. Yhdistämällä reunimmaisten pallojen keskipisteet muodostuu neliöpohjainen pyramidi, jonka jokaisen särmän pituus on $6r$. Pallopyramidin korkeus on tämän neliöpohjaisen pyramidin korkeus h lisättynä kahden pallon säteellä $2r$.

Pyramidin korkeusjana leikkaa neliön muotoisen pohjatahkon pohjan lävistäjien leikkauspisteessä, jonka etäisyys kärjestä on $\frac{\sqrt{2}\cdot 6r}{2} = 3\sqrt{2}r$.

Pyramidin korkeus h saadaan suorakulmaisesta kolmiosta.

$$h^2 + (3\sqrt{2}r)^2 = (6r)^2$$
$$h^2 = 18r^2$$
$$h = 3\sqrt{2}r \text{ (tai } h = -3\sqrt{2}r)$$

Pallopyramidin korkeus on $3\sqrt{2}r + 2r$.

Korkeuden suhde pallon halkaisijaan on
$(3\sqrt{2}+2)r : (2r) = (3\sqrt{2}+2) : 2.$