2 Polynomi- ja itseisarvofunktio

2.1 Funktio yleisesti ja potenssifunktio

LUVUN 2.1 YDINTEHTÄVÄT

201. **a)** $f(-3) = -(-3)^2 - 2 \cdot (-3) = -9 + 6 = -3$

b) $f(a) = -a^2 - 2a$

c) $f(-a) = -(-a)^2 - 2 \cdot (-a) = -a^2 + 2a$

d) $f(2a) = -(2a)^2 - 2 \cdot 2a = -4a^2 - 4a$

202. **a)** $x^4 = 16$

$x^4 = 2^4$

$x = 2$ tai $x = -2$

b) $3 - x^4 = 17 \quad || -3$

$-x^4 = 14 \quad || : (-1)$

$x^4 = -14$

ei ratkaisua

c) $1 + 32x^5 = 0$

$32x^5 = -1$

$x^5 = -\frac{1}{32}$

$x = (-\frac{1}{2})^5$

$x = -\frac{1}{2}$

d) $7(3 - x)^8 = 7 \quad || : 7$

$(3 - x)^8 = 1$

$3 - x = 1$ tai $3 - x = -1$

$x = 2$ tai $x = 4$

203. **a)** $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

Kaikilla reaaliluvuilla x parillinen potenssi on ei-negatiivinen, eli $x^4 \geq 0$ ja $x^2 \geq 0$. Tällöin myös summa $x^4 + x^2 \geq 0$ ja edelleen $x^4 + x^2 + 1 \geq 1$.

Kaikille reaaliluvuille x siis pätee $x^4 + x^2 + 1 \geq 0$.

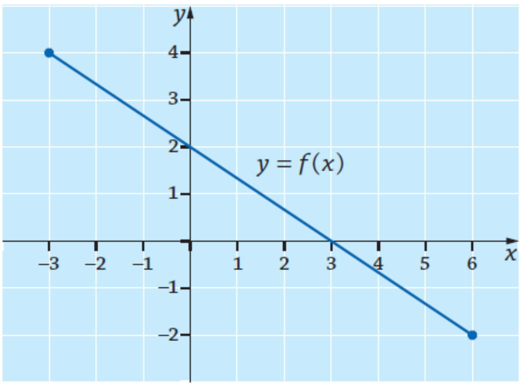
b) $g(x) = x^5 + x$

$g(-1) = (-1)^5 + (-1) = -1 - 1 = -2 < 0$

Kaikille reaaliluvuille x ei siis päde $g(x) \geq 0$, joten väite on epätosi.

204. **a)** Määrittelyjoukko on $[-3, 6]$.

b)



Funktion arvojoukko on $[-2, 4]$.

c) Funktion nollakohta on yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisu.

$$-\frac{2}{3}x + 2 = 0$$

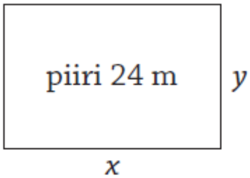
$$-\frac{2}{3}x = -2 \quad \| : (-\frac{2}{3})$$

$$x = -2 \cdot (-\frac{3}{2})$$

$$x = 3$$

205. A-III, B-I, C-II

206. **a)**



$$
\begin{aligned}
2x + 2y &= 24 \\
2y &= 24 - 2x \qquad \| : 2 \\
y &= 12 - x
\end{aligned}
$$

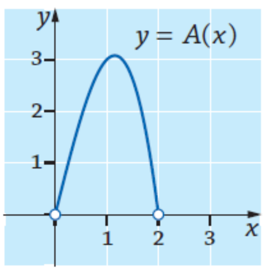
b) Sivujen pituudet ovat positiivisia eli $x > 0$ ja $y > 0$. Jälkimmäinen ehto merkitsee epäyhtälöä $12 - x > 0$, josta $x < 12$. Funktion määrittelyehto on $0 < x < 12$.

Suorakulmion pinta-ala on $xy = x(12 - x) = -x^2 + 12x$.

$A(x) = -x^2 + 12x$, $0 < x < 12$

207. Suorakulmion kannan pituus on x. Suorakulmion korkeus on sama kuin funktion f kuvaajalla kohdassa x olevan pisteen y-koordinaatin arvo, eli $f(x)$. Suorakulmion pinta-ala A on $x \cdot f(x) = x(4 - x^2) = -x^3 + 4x$.

$A(x) = -x^3 + 4x$, $0 < x < 2$



Suurin arvo on noin 3,1 ja se saavutetaan arvolla $x \approx 1{,}2$.

2.2 Polynomifunktio ja –yhtälö

LUVUN 2.2 YDINTEHTÄVÄT

208. **a)** $4(x^2 - 2x) - x(x - 3) = 4x^2 - 8x - x^2 + 3x = 3x^2 - 5x$
Asteluku on 2 ja ensimmäisen asteen termin kerroin on –5.

b) $x^2 - (x - 2)^2 = x^2 - (x^2 - 4x + 4) = 4x - 4$
Asteluku on 1 ja ensimmäisen asteen termin kerroin on 4.

c) $(2 - x^3)^2 - (x^3 + 1)(x^3 - 1) = 4 - 4x^3 + x^6 - (x^6 - 1) = -4x^3 + 5$
Asteluku on 3 ja ensimmäisen asteen termin kerroin on 0.

209. **a)** $(2x + 2)(x - 1) = 0$

$2x + 2 = 0$ tai $x - 1 = 0$

$2x = -2$ $\quad x = 1$

$x = -1$

b) $(2x + 2)(x - 1) = 1$

$$2x^2 - 2x + 2x - 2 = 1$$
$$2x^2 = 3$$
$$x^2 = \frac{3}{2}$$
$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \overset{\sqrt{2})}{=} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ joten}$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ tai } x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

210. **a)** $(x-2)(x-3)=6$

$x^2-3x-2x+6=6$

$x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$

$x=0$ tai $x-5=0$

$x=5$

b) $7(x-3)+1=x^2-1-(x^2-1)$

$7x-21+1=0$

$7x=20$

$x=\frac{20}{7}$

211. **a)** $x^2+10x+25=x^2+2\cdot 5\cdot x+5^2=(x+5)^2$

b) $16-x^4=(4-x^2)(4+x^2)=(2-x)(2+x)(4+x^2)$

c) $2x^3+4x^2-30x=2x(x^2+2x-15)$

Ratkaistaan polynomin $x^2+2x-15$ nollakohdat.

$x^2+2x-15=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 8}{2}$$

$x=3$ tai $x=-5$

$2x^3+4x^2-30x=2x(x^2+2x-15)=2x(x-3)(x+5)$

d) x^3+x^2-4x-4

$=x^2(x+1)-4(x+1)$

$=(x^2-4)(x+1)$

$=(x-2)(x+2)(x+1)$

212. **a)**

$$\frac{x}{6}-\frac{x-3}{2}-\frac{7}{9}=0 \quad \| \cdot 18$$

$$3x - 9(x - 3) - 2 \cdot 7 = 0$$
$$3x - 9x + 27 - 14 = 0$$
$$-6x = -13 \qquad \| : (-6)$$
$$x = \frac{13}{6}$$

b)

$$\frac{4x-1}{5}=\frac{x+1}{2}+\frac{3-x}{4} \quad \| \cdot 20$$

$$4(4x - 1) = 10(x + 1) + 5(3 - x)$$
$$16x - 4 = 10x + 10 + 15 - 5x$$
$$16x - 10x + 5x = 10 + 15 + 4$$
$$11x = 29$$
$$x = \frac{29}{11}$$

213. **a)** $\frac{x^3}{2}-2x^2+x=0 \quad \| \cdot 2$

$$x^3-4x^2+2x=0$$
$$x(x^2-4x+2)=0$$
$$x=0 \text{ tai } x^2-4x+2=0$$
$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot2}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}$$
$$x=2+\sqrt{2} \text{ tai } x=2-\sqrt{2}$$

b)

$$\frac{x^3}{2}-\frac{3x^2}{4}=2x-3 \quad \| \cdot 4$$

$$2x^3-3x^2=8x-12$$
$$2x^3-3x^2-8x+12=0$$
$$x^2(2x-3)-4(2x-3)=0$$
$$(x^2-4)(2x-3)=0$$
$$x^2-4=0 \qquad \text{tai} \qquad 2x-3=0$$
$$x^2=4 \qquad\qquad 2x=3$$
$$x=2 \text{ tai } x=-2 \qquad\qquad x=\frac{3}{2}$$

214. **a)** Ratkaisusta on unohdettu että parillisella potenssiyhtälöllä on kaksi ratkaisua eli myös $x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ on ratkaisu.

$$4x^2 = 5 \quad \| : 4$$
$$x^2 = \frac{5}{4}$$
$$x = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Virheetön ratkaisu:

$$4x^2 = 5$$
$$x^2 = \frac{5}{4}$$
$$x = \sqrt{\frac{5}{4}} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{\frac{5}{4}}$$
$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

b) Ratkaisussa on jaettu lausekkeella x^5 eikä ole huomioitu, että se voi olla nolla.

$$x^7 - 3x^5 = 0$$
$$x^7 = 3x^5 \quad \| : x^5$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3} \text{ tai } x = -\sqrt{3}$$

Virheetön ratkaisu:

$$x^7 - 3x^5 = 0$$
$$x^5(x^2 - 3) = 0$$
$$x^5 = 0 \text{ tai } x^2 - 3 = 0$$
$$x = 0 \qquad x = \sqrt{3} \text{ tai } x = -\sqrt{3}$$

215. **a)** $7x^7 + 6x^6 = 0$

$x^6(7x + 6) = 0$

$x^6 = 0$ tai $7x + 6 = 0$

$x = 0 \qquad x = -\dfrac{6}{7}$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0$

tehdään sijoitus $x^2 = t$

$t^2 - 3t - 4 = 0$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$t = 4$ tai $t = -1$

$x^2 = 4$ tai $x^2 = -1$

$x = 2$ tai $x = -2$ ei ratkaisua

216. Yhtälön ratkaisu on $x = -2$, joten luku -2 toteuttaa yhtälön.

$(-2 + 3)^2 = a \cdot (-2) + 3$

$1^2 = -2a + 3$

$2a = 2$

$a = 1$

Kun $a = 1$, yhtälö on $(x + 3)^2 = x + 3$.

$(x + 3)^2 = x + 3$

$(x + 3)^2 - (x + 3) = 0$

$(x + 3)((x + 3) - 1) = 0$

$(x + 3)(x + 2) = 0$

$x + 3 = 0$ tai $x + 2 = 0$

$x = -3 \qquad x = -2$

Toinen ratkaisu on $x = -3$.

2.3 Polynomiepäyhtälö

LUVUN 2.3 YDINTEHTÄVÄT

217. **a)** $\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}<-\frac{2}{15}x \quad \|\cdot 30$

$$18x-21<-4x$$
$$18x+4x<21$$
$$22x<21$$
$$x<\frac{21}{22}$$

b) $x(5-8x)>0$

$5x-8x^2>0$

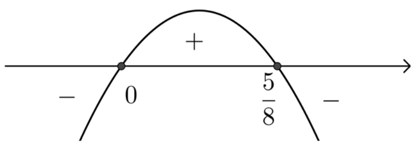
Funktion $5x-8x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$5x-8x^2=0$

$x(5-8x)=0$

$x=0$ tai $5-8x=0$

$x=\frac{5}{8}$



$5x-8x^2>0$, kun $0<x<\frac{5}{8}$.

218. **a)** $x^2 - 2 \leq x$

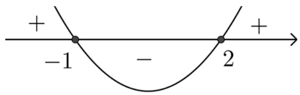
$x^2 - x - 2 \leq 0$

Funktion $x^2 - x - 2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$x = 2$ tai $x = -1$



$x^2 - x - 2 \leq 0$, kun $-1 \leq x \leq 2$.

b) $x\sqrt{7} - 3 \leq 4x$

$x\sqrt{7} - 4x \leq 3$

$(\sqrt{7} - 4)x \leq 3 \qquad \| : (\sqrt{7} - 4) < 0$

$$x \geq {}^{\sqrt{7}+4}\frac{3}{\sqrt{7} - 4}$$

$$x \geq \frac{3(\sqrt{7} + 4)}{7 - 16}$$

$$x \geq \frac{3(\sqrt{7} + 4)}{-9}$$

$$x \geq -\frac{4 + \sqrt{7}}{3}$$

Huomautus: Myös $x \geq \dfrac{3}{\sqrt{7} - 4}$ kelpaa vastaukseksi.

219. **a)** $(2x+2)(x-1) > 0$

$2x^2 - 2x + 2x - 2 > 0$

$2x^2 - 2 > 0 \parallel :2$

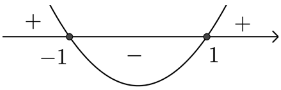
$x^2 - 1 > 0$

Funktion $x^2 - 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = 1$ tai $x = -1$



$x^2 - 1 > 0$, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

b) $(2x+2)(x-1) \le 1$

$2x^2 - 2 \le 1$

$2x^2 - 3 \le 0$

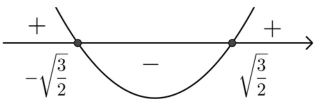
Funktion $2x^2 - 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$2x^2 - 3 = 0$

$2x^2 = 3$

$x^2 = \frac{3}{2}$

$x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ tai $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$



$2x^2 - 3 \le 0$, kun $-\sqrt{\frac{3}{2}} \le x \le \sqrt{\frac{3}{2}}$.

c) $x^2 < 0$

Epäyhtälö ei toteudu millään x:n arvolla, sillä $x^2 \ge 0$ aina.

220. **a)** $x + 2 > x$

$0 > -2$ tosi

Epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

b) $x - 2 \geq x$

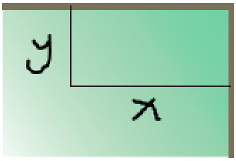
$0 \geq 2$ epätosi

Epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.

c) $-x^2 \neq 0$

Ehto toteutuu kaikilla muilla x:n arvoilla, paitsi arvolla 0, eli $x \neq 0$.

221. Merkitään aitauksen mittoja kirjaimilla x ja y.



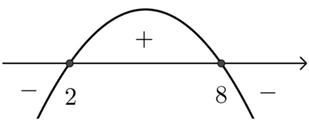
Verkkoa on 10 metriä, joten $x + y = 10$, josta $y = 10 - x$.
Aitauksen pinta-ala on $xy = x(10 - x)$.
Saadaan epäyhtälö:

$$x(10 - x) > 16$$
$$-x^2 + 10x - 16 > 0$$

Funktion $-x^2 + 10x - 16$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.
Ratkaistaan nollakohdat.

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 \pm 6}{-2}$$

$x = 8$ tai $x = 2$



$-x^2 + 10x - 16 > 0$, kun $2 < x < 8$.

Toisen sivun x tulee olla $2 < x < 8$ metriä pitkä ja toinen sivu on $10 - x$ metriä pitkä.

222. $P(x) \geq 0$
$(x-2)^2(1-x)(2x+3) \geq 0$

$(x-2)^2 \geq 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

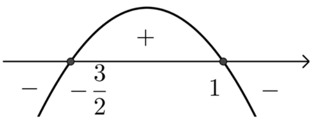
Merkkisäännön perusteella epäyhtälö $(x-2)^2(1-x)(2x+3) \geq 0$ toteutuu, kun $(1-x)(2x+3) \geq 0$.

Epäyhtälö toteutuu myös silloin, kun $(x-2)^2 = 0$ eli kun $x = 2$ lausekkeen $(1-x)(2x+3)$ arvosta riippumatta.

$(1-x)(2x+3) \geq 0$
$-2x^2 - x + 3 \geq 0$

Funktion $-2x^2 - x + 3$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$-2x^2 - x + 3 = 0$
$(1-x)(2x+3) = 0$
$x = 1 \text{ tai } x = -\frac{3}{2}$



$-2x^2 - x + 3 \geq 0$, kun $-\frac{3}{2} \leq x \leq 1$.

Epäyhtälö $P(x) \geq 0$ toteutuu, kun $-\frac{3}{2} \leq x \leq 1$ tai $x = 2$.

223. Toisen asteen polynomifunktiolla on kaksi nollakohtaa, kun diskriminantti on positiivinen.

$b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 > 0$

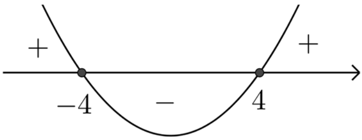
$b^2 - 16 > 0$

Funktion $b^2 - 16$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$b^2 - 16 = 0$

$b^2 = 16$

$b = 4$ tai $b = -4$



$b^2 - 16 > 0$, kun $b < -4$ tai $b > 4$.

224. $x + 4 > 3x - 1$

$x - 3x > -1 - 4$

$-2x > -5 \quad || :(-2)$

$x < \frac{5}{2}$

$x < 2{,}5$

Suurin epäyhtälön toteuttava kokonaisluku on 2.

225. **a)** $x^2 + x + 1 > 0$

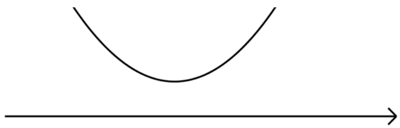
Funktion $x^2 + x + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

ei nollakohtia



$x^2 + x + 1 > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

b) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

$(2x - 3)^2 \leq 0$

$(2x - 3)^2$ on ei-negatiivinen kaikilla muuttujan x arvoilla.

Epäyhtälö toteutuu vain kun $2x - 3 = 0$, eli $x = \frac{3}{2}$.

c) $x^2 < x$

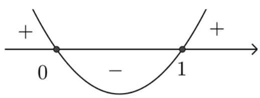
$x^2 - x < 0$

Funktion $x^2 - x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 0$ tai $x = 1$



$x^2 - x < 0$, kun $0 < x < 1$.

226. **a)** Ratkaisussa on jaettu x:llä kiinnittämättä huomiota x:n merkkiin ja siihen, onko x nolla.

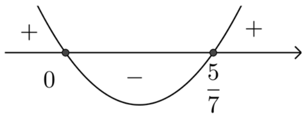
$$7x^2 < 5x \quad \| : x$$
$$7x < 5 \quad \| : 7$$
$$x < \frac{5}{7}$$

Virheetön ratkaisu:

$$7x^2 < 5x$$
$$7x^2 - 5x < 0$$

Funktion $7x^2 - 5x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$$7x^2 - 5x = 0$$
$$x(7x - 5) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } 7x - 5 = 0$$
$$x = \frac{5}{7}$$



$7x^2 - 5x < 0$, kun $0 < x < \frac{5}{7}$.

b) Viimeisessä vaiheessa on virhe: $x^2 > 16$ ei ratkea täysin samoin kuin vastaava yhtälö, vaan epäyhtälömerkkien suuntiin on kiinnitettävä huomiota.

$x^2 - 16 > 0$

$x^2 > 16$

$x > 4 \text{ tai } x > -4$

Virheetön ratkaisu:

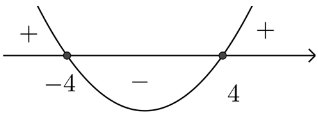
$x^2 - 16 > 0$

Funktion $x^2 - 16$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$

$x = 4 \text{ tai } x = -4$



$x^2 - 16 > 0$, kun $x < -4$ tai $x > 4$.

227. $a^2 + b^2 \geq 2ab$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$(a - b)^2 \geq 0$

Kaikilla reaaliluvuilla erotuksen neliö on ei-negatiivinen. Epäyhtälö on voimassa kaikilla reaaliluvuilla a ja b.

2.4 Funktion itseisarvo, itseisarvoyhtälö ja -epäyhtälö

LUVUN 2.4 YDINTEHTÄVÄT

228. **a)** $|2x + 5| = 7$

$2x + 5 = 7$ tai $2x + 5 = -7$

$2x = 2 \qquad 2x = -12$

$x = 1 \qquad x = -6$

b) $|x^2 - 1| = 3$

$x^2 - 1 = 3$ tai $x^2 - 1 = -3$

$x^2 = 4 \qquad x^2 = -2$

$x = 2$ tai $x = -2$ ei ratkaisua

c) $|x^2 - 3| = -1$

Ei ratkaisua, koska itseisarvo ei voi olla negatiivinen.

d) $|x^2 + 2x| = 0$

$x^2 + 2x = 0$

$x(x + 2) = 0$

$x = 0$ tai $x = -2$

229. **a)** $|3 - x| > 5$

$3 - x > 5$ tai $3 - x < -5$

$-x > 2 \quad \|:(-1) \qquad -x < -8 \quad \|:(-1)$

$x < -2 \qquad x > 8$

b) $|3x - 1| < 1$

$-1 < 3x - 1 < 1 \quad \| +1$

$0 < 3x < 2 \quad \| : 3$

$0 < x < \dfrac{2}{3}$

c) $|x^2 + 3x| \leq 4$

$-4 \leq x^2 + 3x \leq 4$

$-4 \leq x^2 + 3x$ ja $x^2 + 3x \leq 4$

Ratkaistaan epäyhtälöt erikseen.

1) $-4 \leq x^2 + 3x$

$x^2 + 3x + 4 \geq 0$

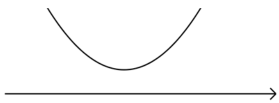
Funktion $x^2 + 3x + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 + 3x + 4 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

ei nollakohtia



$x^2 + 3x + 4 \geq 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

2) $x^2 + 3x \leq 4$

$x^2 + 3x - 4 \leq 0$

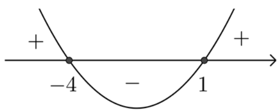
Funktion $x^2 + 3x - 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$x = -4$ tai $x = 1$



$x^2 + 3x - 4 \leq 0$, kun $-4 \leq x \leq 1$.

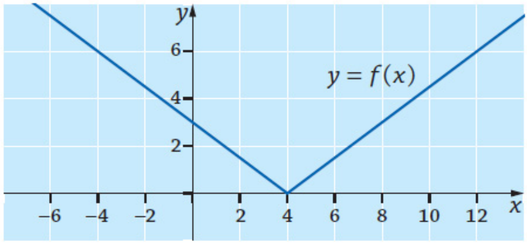
Kohtien 1 ja 2 perusteella epäyhtälö $|x^2 + 3x| \leq 4$ toteutuu, kun $-4 \leq x \leq 1$.

230. Lasketaan lausekkeen $|x^2 + 7x + 1|$ arvo, kun $x = -3$.
$|(-3)^2 + 7 \cdot (-3) + 1| = |9 - 21 + 1| = |-11| = 11$

Yhtälö on tosi, kun $a = 11$.

231. A-I, B-III, C-II, D-III, E-II

232. $f(x) = \left|\frac{3}{4}x - 3\right|$



$|f(x)| = 6$, kun $x = -4$ ja kun $x = 12$.

$|f(x)| < 3$, kun $0 < x < 8$.

233. **a)** $|f(x)| = 2$, kun $f(x) = 2$ tai $f(x) = -2$, eli kun $x = -2$, $x = 0$ tai $x = 2$.

b) $|f(x)| \leq 2$, kun $-2 \leq f(x) \leq 2$, eli kun $-2 \leq x \leq 2$.

c) $|f(x)| \geq 2$, kun $f(x) \geq 2$ tai $f(x) \leq -2$, eli kun $x \leq -2$, $x = 0$ tai $x \geq 2$.

d) $|f(x)| < 2$, kun $-2 < f(x) < 2$, eli kun $-2 < x < 0$ tai $0 < x < 2$.

234. **a)** $|2x - 1| = |x^2 - 1|$

$2x - 1 = x^2 - 1$ tai $2x - 1 = -(x^2 - 1)$

$2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

$x = 0$ tai $x = 2$

$x^2 + 2x - 2 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$x = -1 - \sqrt{3}$ tai $x = -1 + \sqrt{3}$

b) $|x - 2| \le |3 + x|$

Molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$|x - 2|^2 \le |3 + x|^2$

$x^2 - 4x + 4 \le 9 + 6x + x^2$

$-10x \le 5 \qquad || :(-10)$

$x \ge -\frac{1}{2}$

c) $|x - 1| > |2x - 1|$

Molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$|x - 1|^2 > |2x - 1|^2$

$x^2 - 2x + 1 > 4x^2 - 4x + 1$

$-3x^2 + 2x > 0$

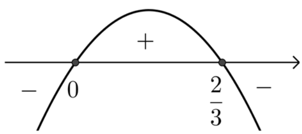
Funktion $-3x^2 + 2x$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$-3x^2 + 2x = 0$

$x(-3x + 2) = 0$

$x = 0$ tai $-3x + 2 = 0$

$x = \frac{2}{3}$



$-3x^2 + 2x > 0$, kun $0 < x < \frac{2}{3}$.

d) $|x| \leq |2x + 3|$

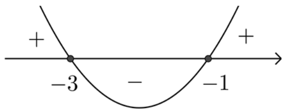
Molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$|x|^2 \leq |2x + 3|^2$$
$$x^2 \leq 4x^2 + 12x + 9$$
$$-3x^2 - 12x - 9 \leq 0 \qquad || : (-3)$$
$$x^2 + 4x + 3 \geq 0$$

Funktion $x^2 + 4x + 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$
$$x = -3 \text{ tai } x = -1$$



$x^2 + 4x + 3 \geq 0$, kun $x \leq -3$ tai $x \geq -1$.

235. **a)** $|x-(-3)| = |x-5|$

$$|x+3| = |x-5|$$

$x+3 = x-5$ tai $x+3 = -(x-5)$

$3 = -5$ $\quad$ $x+3 = -x+5$

epätosi $\quad$ $2x = 2$

$x = 1$

Luku x on 1.

b) $|x-(-1)| = 2|x-3|$

$$|x+1| = |2|\cdot|x-3|$$

$$|x+1| = |2(x-3)|$$

$x+1 = 2(x-3)$ tai $x+1 = -2(x-3)$

$x+1 = 2x-6$ $\quad$ $x+1 = -2x+6$

$-x = -7$ $\quad$ $3x = 5$

$x = 7$ $\quad$ $x = \dfrac{5}{3}$

Luku x on 7 tai $\dfrac{5}{3}$.

Luvun 2 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

236. A-II, B-III, C-IV, D-I, E-V, F-VI

237. x-akselilla $y = 0$ eli
$(x - 1)^2 - 1 = 0$, josta
$(x - 1)^2 = 1$
$x - 1 = 1$ tai $x - 1 = -1$
$x = 2$ $\quad$ $x = 0$

y-akselilla $x = 0$, joten
$y = (0 - 1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

x-akselin leikkauspisteet ovat (2, 0) ja (0, 0) ja y-akselin (0, 0).

238. $p(x) = cx + d$
$p(4) = 1$, joten $4c + d = 1$

$p(7) = 3$, joten $7c + d = 3$

Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 4c + d = 1 \\ 7c + d = 3 \quad \| \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 4c + d = 1 \\ -7c - d = -3 \end{cases} \\ \hline -3c \quad = -2 \\ c = \dfrac{2}{3} \end{array}$$

$4c + d = 1$, josta $d = 1 - 4c = 1 - 4 \cdot \dfrac{2}{3} = 1 - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{5}{3}$

Siten $p(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{3}$.

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} &= 0 \\ \frac{2}{3}x &= \frac{5}{3} \qquad \| : \frac{2}{3} \\ x &= \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

239. **a)** $P(x) = -3x^2 + 4x + 1$ ja $Q(x) = x^2 - 4x - 2$

$P(2x) + Q(-x)$
$= -3(2x)^2 + 4 \cdot (2x) + 1 + (-x)^2 - 4 \cdot (-x) - 2$
$= -3 \cdot 4x^2 + 8x + 1 + x^2 + 4x - 2$
$= -11x^2 + 12x - 1$

$$P(-x) = P(1)$$
$$-3(-x)^2 + 4 \cdot (-x) + 1 = -3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$
$$-3x^2 - 4x + 1 = 2$$
$$-3x^2 - 4x - 1 = 0$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{4 \pm 2}{-6}$$
$$x = -1 \text{ tai } x = -\frac{1}{3}$$

b) Yhtälö toteutuu, kun $x = -2 - \sqrt{6}$ ja kun $x = -2 + \sqrt{6}$. Syntyy yhtälöpari

$$\begin{cases} (-2-\sqrt{6})^2 + p(-2-\sqrt{6}) + q = 0 \\ (-2+\sqrt{6})^2 + p(-2+\sqrt{6}) + q = 0 \end{cases}$$

Muokataan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 4 + 4\sqrt{6} + 6 + p(-2-\sqrt{6}) + q = 0 \\ 4 - 4\sqrt{6} + 6 + p(-2+\sqrt{6}) + q = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(-2-\sqrt{6}) + q = -10 - 4\sqrt{6} \\ p(-2+\sqrt{6}) + q = -10 + 4\sqrt{6} \qquad \| \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(-2-\sqrt{6}) + q = -10 - 4\sqrt{6} \\ p(2-\sqrt{6}) - q = 10 - 4\sqrt{6} \end{cases}$$

$$-2\sqrt{6}p = -8\sqrt{6} \qquad \| : (-2\sqrt{6})$$
$$p = 4$$

$p(2-\sqrt{6}) - q = 10 - 4\sqrt{6}$, josta $q = p(2-\sqrt{6}) - 10 + 4\sqrt{6}$.
Kun $p = 4$, on $q = 4(2-\sqrt{6}) - 10 + 4\sqrt{6} = 8 - 4\sqrt{6} - 10 + 4\sqrt{6} = -2$.

TOINEN TAPA perustuen taulukkoaineiston kaavoihin:

Toisen asteen yhtälön $x^2 + px + q = 0$ juurten summalle ja tulolle pätee
$x_1x_2 = q$ ja $x_1 + x_2 = -p$.
$q = (-2-\sqrt{6})(-2+\sqrt{6}) = 4-6 = -2$
$p = -((-2-\sqrt{6})+(-2+\sqrt{6})) = -(-4) = 4$

240. **a)** $(x-2)^2 = (x+2)^2$
$x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4$
$-8x = 0$
$x = 0$

b) $(x^4-1)^2 = 9$

$x^4 - 1 = 3$ tai $x^4 - 1 = -3$

$x^4 = 4$ $\quad$ $x^4 = -2$

$x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt[4]{4} = -\sqrt{2}$ $\quad$ ei ratkaisua

$(\sqrt[4]{4} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2})$

c) $|x^2-5| = 3$

$x^2 - 5 = 3$ tai $x^2 - 5 = -3$

$x^2 = 8$ $\quad$ $x^2 = 2$

$x = \sqrt{8}$ tai $x = -\sqrt{8}$ $\quad$ $x = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}$

$x = 2\sqrt{2}$ $\quad$ $x = -2\sqrt{2}$

d) $|x-2| = |x^2+2|$

$x - 2 = x^2 + 2$ tai $x - 2 = -(x^2+2)$

$x^2 - x + 4 = 0$ $\quad$ $x^2 + x = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \dfrac{1\pm\sqrt{-15}}{2}$ $\quad$ $x(x+1) = 0$

ei ratkaisua $\quad$ $x = 0$ tai $x = -1$

241. **a)** $2x^2 - 7x - 4 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 9}{4}$$

$$x = 4 \text{ tai } x = -\frac{1}{2}$$

b) $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + 14x + b$

$2a = 14$, josta $a = 7$

$b = a^2 = 7^2 = 49$

242. Koska $t = -2$ on nollakohta, on $f(-2) = 0$.

$f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - a = 12 - 4 - a = 8 - a$

$8 - a = 0$

$a = 8$

Nollakohdat saadaan yhtälöstä $f(t) = 3t^2 + 2t - 8 = 0$, jonka ratkaisut ovat

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 10}{6}$$

$$t = -2 \quad \text{tai} \quad t = \frac{4}{3}$$

Toinen nollakohta on siten $t = \frac{4}{3}$.

243. **a)** $3x^2 < 5x$

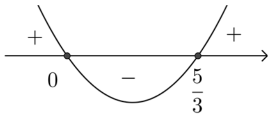
$3x^2 - 5x < 0$

Funktion $3x^2 - 5x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$3x^2 - 5x = 0$

$x(3x - 5) = 0$

$x = 0$ tai $x = \frac{5}{3}$



$3x^2 - 5x < 0$, kun $0 < x < \frac{5}{3}$

b) $x^4 - 16 > 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) > 0$

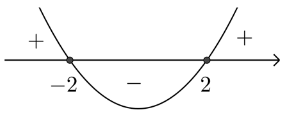
$x^2 + 4 > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Lausekkeen $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$ merkkiin vaikuttaa vain tekijän $x^2 - 4$ merkki.

Funktion $x^2 - 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2$ tai $x = -2$



$x^2 - 4 > 0$, kun $x < -2$ tai $x > 2$.

c) $|3x - 2| < 4$

$-4 < 3x - 2 < 4 \quad \| +2$

$-2 < 3x < 6 \quad \| : 3$

$-\frac{2}{3} < x < 2$

d) $|x^2 - 3| > 2$

$x^2 - 3 > 2$ tai $x^2 - 3 < -2$

$x^2 - 5 > 0 \qquad x^2 - 1 < 0$

Ratkaistaan epäyhtälöt erikseen.

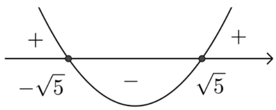
1) $x^2 - 5 > 0$

Funktion $x^2 - 5$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 - 5 = 0$

$x^2 = 5$

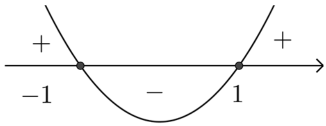
$x = \sqrt{5}$ tai $x = -\sqrt{5}$



$x^2 - 5 > 0$ kun $x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$ (1)

2) $x^2 - 1 < 0$
Funktion $x^2 - 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$x = 1$ tai $x = -1$



$x^2 - 1 < 0$, kun $-1 < x < 1$ (2)

Huomioiden vastaukset (1) ja (2) saadaan epäyhtälön $|x^2 - 3| > 2$ ratkaisuksi $x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$ tai $-1 < x < 1$.

244. $|x| = 1 + x$
Yhtälöllä on ratkaisu, kun $1 + x \geq 0$, eli kun $x \geq -1$.

$x = 1 + x$ tai $x = -1 - x$
$0 = 1$ $\quad 2x = -1$
epätosi $\quad x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$ toteuttaa määrittelyehdon eli on ratkaisu.

245. Aitamateriaalia on 150 m.

$8x + 5y = 150$

$$y = 30 - \frac{8}{5}x$$

Karsinoiden yhteispinta-ala on $4xy = 4x(30 - \frac{8}{5}x) = 120x - \frac{32}{5}x^2$.

Jotta muodostuisi aitaus, tulee olla

$x > 0$ ja

$y > 0$, eli $30 - \frac{8}{5}x > 0$, josta $x < 18{,}75$.

Funktio, joka ilmaisee neljän karsinan yhteispinta-alan, on

$A(x) = 120x - \frac{32}{5}x^2$, $0 < x < 18{,}75$

(eli $A\colon\ ]0; 18{,}75[\to \mathbb{R},\ A(x) = 120x - \frac{32}{5}x^2$)

$120x - \frac{32}{5}x^2 > 500$

$6{,}25 < x < 12{,}5$

Jotta yhteispinta-ala ylittäisi 500 m^2, tulee karsinan sivun x olla

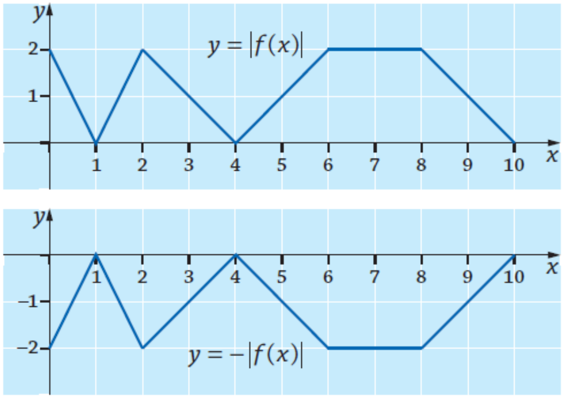
6,25 m $< x <$ 12,5 m ja toisen sivun $30 - \frac{8}{5}x$ m.

246. **a)** $f(9) \approx -1$

Funktio f saa arvon 2 muuttujan arvolla $x \approx 2$.

b) $f(0) = -2$, nollakohdat $x \approx 1$, $x \approx 4$ ja $x \approx 10$

c)



d) $|f(x)| = 1$, kun $x \approx 0{,}5$, $x \approx 1{,}5$, $x \approx 3$, $x \approx 5$ ja $x \approx 9$

247. **a)** $2(x-6)(x-9) = 2(x^2 - 9x - 6x + 54) = 2x^2 - 30x + 108$

b) Ratkaistaan polynomin nollakohdat.

$x^2 + x - 12 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2} = \frac{-1\pm 7}{2}$$

$$x = -4 \text{ tai } x = 3$$

$a = 1$, $x_1 = -4$ ja $x_2 = 3$, joten

$x^2 + x - 12 = 1 \cdot (x+4)(x-3) = (x+4)(x-3)$.

c) $a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-x_2x-x_1x+x_1x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$

Toisaalta polynomi voidaan kirjoittaa muotoon ax^2+bx+c.
Vakiotermien tulee olla samat, joten $ax_1x_2=c$, joista edelleen

$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Toinen tapa:
Ratkaistaan polynomin ax^2+bx+c nollakohdat. Oletuksen mukaan ne ovat olemassa (eli $b^2-4ac\geq 0$).

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Muodostetaan ja sievennetään nollakohtien x_1 ja x_2 tulo.

$$\begin{aligned}x_1x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{(2a)^2}\\&=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}\\&=\frac{4ac}{4a^2}\\&=\frac{c}{a}\end{aligned}$$

248. **a)** Ratkaistaan polynomin nollakohdat.

$6x^2 + 4x - 2 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{12} = \frac{-4 \pm 8}{12}$$

$$x = -1 \text{ tai } x = \frac{1}{3}$$

$$6x^2 + 4x - 2 = 6(x+1)(x-\frac{1}{3}) = 2(x+1)3(x-\frac{1}{3}) = 2(x-1)(3x-1)$$

b) Polynomilla $2x^2 - x + 3$ ei ole nollakohtia, koska sen diskriminantti $(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = -71$ on negatiivinen. Koska sillä ei ole nollakohtia, sillä ei ole ensimmäisen asteen tekijöitä.

249. **a)** Ensimmäisen asteen polynomifunktio, jonka nollakohta on $x = -3$ on $x + 3$. Ensimmäisen asteen polynomifunktio, jonka nollakohta $x = \frac{2}{5}$ on $x - \frac{2}{5}$. Näiden tulo $(x + 3)(x - \frac{2}{5}) = x^2 - \frac{13}{5}x - \frac{6}{5}$ on haluttu toisen asteen polynomifunktio.

b) Koska $x^2 \geq 0$, on $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Esimerkiksi $x^2 + 1$ on toisen asteen polynomifunktio, jolla ei ole nollakohtia.

250. Toisen asteen polynomin lauseke voidaan muodostaa nollakohtien avulla. Kaikki toisen asteen funktion, joilla on nollakohdat $x = 1$ ja $x = 4$ ovat $f(x) = a(x - 1)(x - 4)$. Kerroin a ratkaistaan käyttäen tietoa, että piste (3, 2) on funktion kuvaajalla eli että yhtälö $f(3) = 2$ on tosi.

$$a(3-1)(3-4) = 2$$
$$a \cdot 2 \cdot (-1) = 2$$
$$a = -1$$

Siten $f(x) = -(x - 1)(x - 4) = -(x^2 - 4x - x + 4) = -x^2 + 5x - 4$.

Kolmannen asteen polynomifunktion lauseke voidaan muodostaa vastaavasti nollakohtien avulla ja on $g(x) = b(x - 0)(x - 3)(x - 5)$. Piste (1, 2) on funktion kuvaajalla, joten $g(1) = 2$.

$$b(1-0)(1-3)(1-5) = 2$$
$$b \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-4) = 2$$
$$8b = 2$$
$$b = \frac{1}{4}$$

$$g(x) = \frac{1}{4}(x-0)(x-3)(x-5) = \frac{1}{4}x(x^2 - 8x + 15) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{15}{4}x$$

251. **a)** Koska $x = -2$ on kaksinkertainen nollakohta, on funktion lauseke $f(x) = a(x - (-2))(x - (-2)) = a(x + 2)^2$ jollekin a. Kerroin a ratkeaa yhtälöstä $f(0) = 10$.

$$a(0 + 2)^2 = 10$$
$$4a = 10$$
$$a = \frac{5}{2}$$

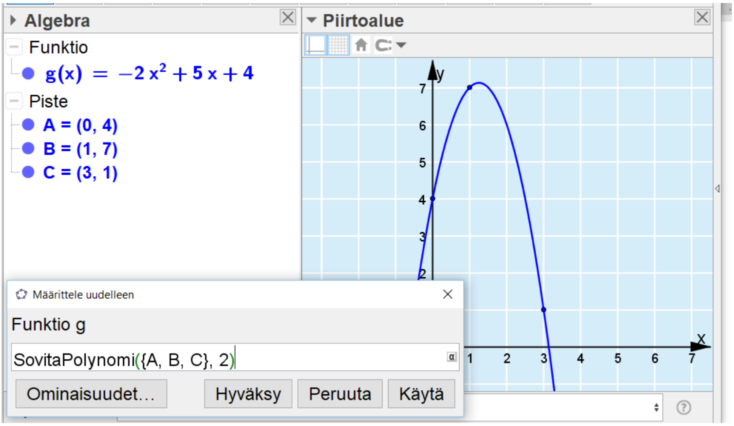
Funktion lauseke on
$$f(x) = \frac{5}{2}(x + 2)^2 = \frac{5}{2}(x^2 + 4x + 4) = \frac{5}{2}x^2 + 10x + 10.$$

b) $f(x) = a(x + 5)(x - 1)(x - 3)^2$ ja $f(2) = -14$, joten

$$a(2 + 5)(2 - 1)(2 - 3)^2 = -14$$
$$a \cdot 7 \cdot 1 \cdot (-1)^2 = -14$$
$$7a = -14$$
$$a = -2$$

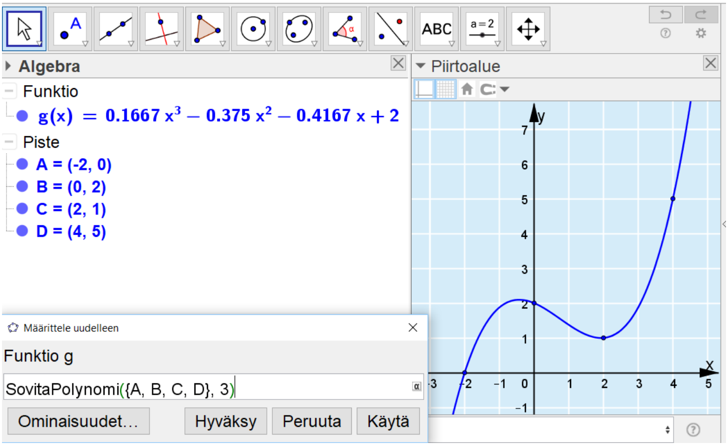
$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x + 5)(x - 1)(x - 3)^2 \\ &= -2(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 6x + 9) \\ &= -2(x^4 - 2x^3 - 20x^2 + 66x - 45) \\ &= -2x^4 + 4x^3 + 40x^2 - 132x + 90 \end{aligned}$$

252. **a)**



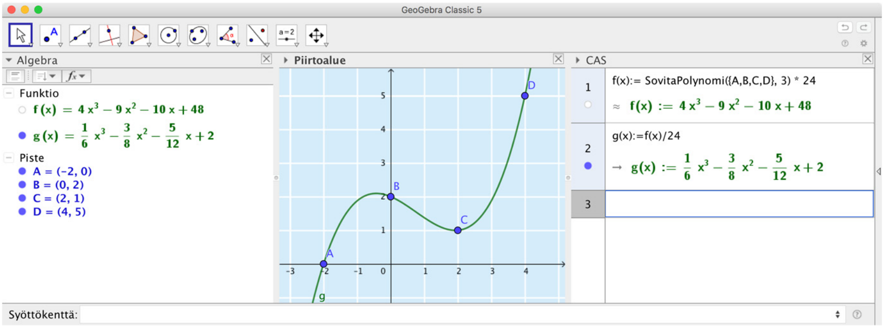
Polynomifunktion lauseke on $-2x^2 + 5x + 4$.

b)



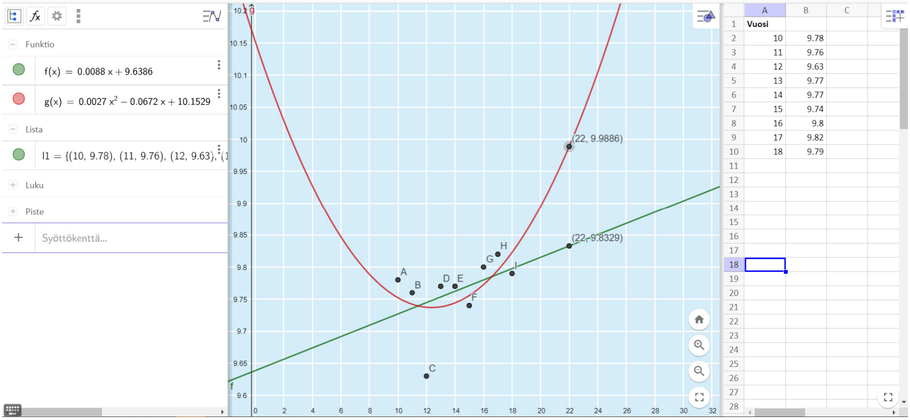
GeoGebra antaa kertoimet likiarvoina.
Polynomifunktion lauseke on $0{,}1667x^3 - 0{,}375x^2 - 0{,}4167x + 2$.

Kertoimien likiarvojen perusteella kokeillen huomataan, että kertoimet saadaan pakotettua murtoluviksi, kun lauseke kerrotaan luvulla 24 ja saatu polynomi jaetaan luvulla 24. Kerroin 24 voidaan löytää vaiheittain: tunnistetaan 0,1667 luvun $\frac{1}{6}$ likiarvoksi, joten kerrotaan kuudella. Tämän jälkeen tunnistetaan kerroin 0,25 luvuksi $\frac{1}{4}$.



Siten polynomin lauseke on $\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{12}x + 2$.

253. Geogebralla voidaan luoda tuloksista ensin pistelista (esim. l1) ja tämän jälkeen sovittaa listan pisteet ensimmäisen asteen polynomifunktioksi komennolla SovitaPolynomi(l1,1) tai toisen asteen polynomifunktioksi komennolla SovitaPolynomi(l1,2)



Ensimmäisen asteen polynomisen mallin mukaan paras tulos vuonna 2022 olisi 9,83 s ja toisen asteen mallin mukaan 9,99 s.

254. **a)** Ratkaistaan yhtälö $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$x = 3 \text{ tai } x = \frac{1}{3}$$

Ratkaisut ovat toistensa käänteislukuja, koska niiden tulo $3 \cdot \frac{1}{3}$ on 1.

b) Ratkaistaan yhtälö $x^2 - 2x + 3 - a = 0$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1(3 - a)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12 + 4a}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-8 + 4a}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4(a - 2)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{a - 2}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{a - 2} \end{aligned}$$

Jotta ratkaisuja olisi, tulee olla $a - 2 \geq 0$, eli $a \geq 2$.

Lasketaan ratkaisujen tulo.

$$(1 + \sqrt{a - 2})(1 - \sqrt{a - 2}) = 1^2 - \sqrt{a - 2}^2 = 1 - (a - 2) = 3 - a.$$

Jotta ratkaisut olisivat toistensa käänteislukuja, tulee olla $3 - a = 1$, eli $a = 2$.

255. $x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = -1 - \sqrt{2} \text{ tai } x = -1 + \sqrt{2}$$

$$(5^x)^y + 5^x \cdot 5^y = 5^{x \cdot y} + 5^{x+y}$$

Eksponentit ovat lukujen x ja y tulo sekä summa. Se, kumpaa yhtälön ratkaisuista merkitään luvulla x ja kumpaa luvulla y, ei ole lopputuloksen kannalta merkitystä. Valitaan $x = -1 - \sqrt{2}$ ja $y = -1 + \sqrt{2}$.

$$5^{x \cdot y} + 5^{x+y} = 5^{(-1-\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})} + 5^{(-1-\sqrt{2})+(-1+\sqrt{2})} = 5^{1-2} + 5^{-2}$$

$$= 5^{-1} + 5^{-2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{5}{25} + \frac{1}{25} = \frac{6}{25}$$

256. **a)** $|f(x)| = 2$, kun $x \approx -3$, $x \approx -1$, $x \approx 1$ ja $x \approx 3$.

b) $|f(x)| \geq 2$, kun $-3 \leq x \leq -1$ tai $1 \leq x \leq 3$.

c) $|f(x) - 2| < 2$, kun $-2 < f(x) - 2 < 2$ eli $0 < f(x) < 4$.
Tämä toteutuu, kun $0 < x < 5$.

257. Yhtälöllä $2x^2 + ax + 1 = 0$ on kaksoisjuuri, kun sillä on yksi nollakohta.
Yhtälöllä on yksi nollakohta, kun diskriminantti on 0.

$$a^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$
$$a^2 = 8$$
$$a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ tai } a = -2\sqrt{2}$$

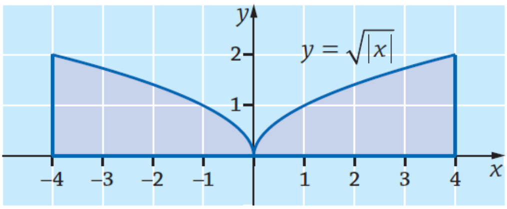
Kun $a = 2\sqrt{2}$:

$$2x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$$
$$x = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Kun $a = -2\sqrt{2}$

$$2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$$
$$x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

258.



259. $x^2 + 2a^2x - a^4 = 0$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-2a^2 \pm \sqrt{(2a^2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-a^4)}}{2} \\
&= \frac{-2a^2 \pm \sqrt{4a^4 + 4a^4}}{2} \\
&= \frac{-2a^2 \pm \sqrt{8a^4}}{2} \\
&= \frac{-2a^2 \pm 2\sqrt{2}a^2}{2} \\
&= -a^2 \pm \sqrt{2}a^2
\end{aligned}
$$

$$x = -a^2 + \sqrt{2}a^2 \text{ tai } x = -a^2 - \sqrt{2}a^2$$

Ratkaisujen summan itseisarvo on

$\left|-a^2 + \sqrt{2}a^2 + (-a^2 - \sqrt{2}a^2)\right| = \left|-2a^2\right| = |-2|\left|a^2\right| = 2a^2$.

260.

$$
\begin{aligned}
(2x-5)(x^2+3x-2) &= (2x-5)(x-2) \\
(2x-5)(x^2+3x-2) - (2x-5)(x-2) &= 0 \\
(2x-5)((x^2+3x-2) - (x-2)) &= 0 \\
(2x-5)(x^2+3x-2-x+2) &= 0 \\
(2x-5)(x^2+2x) &= 0
\end{aligned}
$$

$2x - 5 = 0$ tai $x^2 + 2x = 0$

$2x = 5$ $\quad$ $x(x+2) = 0$

$x = \frac{5}{2}$ $\quad$ $x = 0$ tai $x = -2$

261. **a)** $4x^3 + 3x^2 - 10x \geq 0$

$x(4x^2 + 3x - 10) \geq 0$

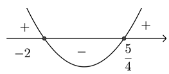
Laaditaan merkkikaavio. Lasketaan sitä varten nollakohdat.

$(4x^2 + 3x - 10) = 0$

$x = 0 \quad \text{tai} \quad 4x^2 + 3x - 10 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 4 \cdot (-10)}}{8} = \frac{-3 \pm 13}{8}$$

$$x = -2 \text{ tai } x = \frac{5}{4}$$



		-2	0	$\frac{5}{4}$
x	–	–	+	+
$4x^2 + 3x - 10$	+	–	–	+
$x(4x^2 + 3x - 10)$	–	+	–	+

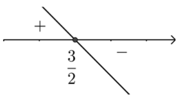
$4x^3 + 3x^2 - 10x \geq 0$, kun $-2 \leq x \leq 0$ tai $x \geq \frac{5}{4}$.

b) $(3 - 2x)(x - 1)^2 \leq 0$

Selvitetään tulon tekijöiden merkit ja laaditaan merkkikaavio.

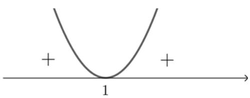
$3 - 2x = 0$

$x = \frac{3}{2}$



$(x - 1)^2 = 0$

$x = 1$



		1	$\frac{3}{2}$
$3 - 2x$	+	+	–
$(x - 1)^2$	+	+	+
$(3 - 2x)(x - 1)^2$	+	+	–

$(3 - 2x)(x - 1)^2 \leq 0$, kun $x = 1$ tai $x \geq \frac{3}{2}$.

c) $x^4 + 4x^2 - 5 > 0$

Ratkaistaan nollakohdat sijoittamalla $x^2 = t$.

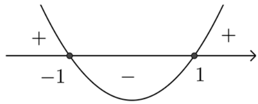
$t^2 + 4t - 5 = 0$

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$$t = -5 \quad \text{tai} \quad t = 1$$

$$x^2 = -5 \quad \text{tai} \quad x^2 = 1$$

ei ratk. $\qquad x = 1$ tai $x = -1$



$x^4 + 4x^2 - 5 > 0$, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

d)

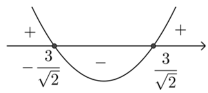
$$6x^3 + 2x^2 < 27x + 9$$
$$6x^3 + 2x^2 - 27x - 9 < 0$$
$$2x^2(3x + 1) - 9(3x + 1) < 0$$
$$(2x^2 - 9)(3x + 1) < 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

$2x^2 - 9 = 0$

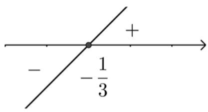
$$x^2 = \frac{9}{2}$$

$$x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ tai } x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$



$3x + 1 = 0$

$$x = -\frac{1}{3}$$



		$-\frac{3}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{3}{\sqrt{2}}$	
$2x^2 - 9$	+		–				+
$3x + 1$	–		–		+		+
$x(4x^2 + 3x - 10)$	–		+		–		+

$(2x^2 - 9)(3x + 1) < 0$, kun $x < -\frac{3}{\sqrt{2}}$ tai $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{\sqrt{2}}$.

262. **a)** $|x-2| = |2x-2|$

$x-2 = 2x-2$ tai $x-2 = -2x+2$

$-x = 0$ $\quad 3x = 4$

$x = 0$ $\quad x = \frac{4}{3}$

Luvut ovat $x = 2x = 0$ sekä $x = \frac{4}{3}$ ja $2x = \frac{8}{3}$.

b) $|x-2| = 3|x-(-2)|$

$|x-2| = 3|x+2|$ Huom. $3|x+2| = |3| \cdot |x+2| = |3(x+2)|$

$x-2 = 3(x+2)$ tai $x-2 = -3(x+2)$

$x-2 = 3x+6$ $\quad x-2 = -3x-6$

$-2x = 8$ $\quad 4x = -4$

$x = -4$ $\quad x = -1$

Luvut ovat –4 ja –1.

263. **a)** $|x^2+x| = x$

Yhtälöllä on ratkaisu, kun $x \geq 0$.

$x^2+x = x$ tai $x^2+x = -x$

$x^2 = 0$ $\quad x^2+2x = 0$

$x = 0$ $\quad x(x+2) = 0$

$x = 0$ tai $x = -2$

Määrittelyehdon toteuttaa ratkaisu $x = 0$.

b) $|x^2+6| = x$

Yhtälöllä on ratkaisu, kun $x \geq 0$.

$x^2+6 = x$ tai $x^2+6 = -x$

$x^2-x+6 = 0$ $\quad x^2+x+6 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot1\cdot6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2}$ $\quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot1\cdot6}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2}$

ei ratkaisua $\quad$ ei ratkaisua

Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

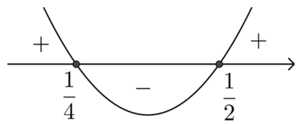
c) $|3x - 1| \geq |x|$

Epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$|3x - 1|^2 \geq |x|^2$$
$$9x^2 - 6x + 1 \geq x^2$$
$$8x^2 - 6x + 1 \geq 0$$

Ratkaistaan nollakohdat ja hahmotellaan kuvaaaja.

$$8x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} = \frac{6 \pm 2}{16}$$
$$x = \frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{1}{4}$$



$8x^2 - 6x + 1 \geq 0$, kun $x \leq \frac{1}{4}$ tai $x \geq \frac{1}{2}$.

d) $|2x + 3| = x - 2$

Yhtälöllä on ratkaisu, kun $x - 2 \geq 0$, eli $x \geq 2$.

$2x + 3 = x - 2$ tai $2x + 3 = -x + 2$

$x = -5$ $\quad$ $3x = -1$

$x = -\frac{1}{3}$

Kumpikaan ratkaisuista ei toteuta ehtoa $x \geq 2$, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

e) $|x - 3| = x - 3$

Yhtälöllä on ratkaisu, kun $x - 3 \geq 0$, eli $x \geq 3$. Tällöin luku ja sen itseisarvo ovat yhtä suuret.

f) $|x^2 - 4x - 4| < 4$

$-4 < x^2 - 4x - 4 < 4 \quad || +4$

$0 < x^2 - 4x < 8$

Ratkaistaan epäyhtälöt erikseen.

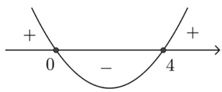
$0 < x^2 - 4x$

$x^2 - 4x > 0$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

$x = 0$ tai $x = 4$



$x^2 - 4x > 0$, kun $x < 0$ tai $x > 4$

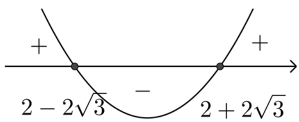
$x^2 - 4x < 8$

$x^2 - 4x - 8 < 0$

$x^2 - 4x - 8 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

$x = 2 + 2\sqrt{3}$ tai $x = 2 - 2\sqrt{3}$



$x^2 - 4x - 8 < 0$, kun

$2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

$x^2 - 4x - 4| < 4$, kun $2 - 2\sqrt{3} < x < 0$ tai $4 < x < 2 + 2\sqrt{3}$

264. **a)** $\frac{2+3}{2\oplus 3}=\frac{2+3}{(2+3)^2}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$

b) $a\oplus b=(a+b)^2$ ja $b\oplus a=(b+a)^2=(a+b)^2$, joten $a\oplus b=b\oplus a$

c) i) Lasketaan $a\oplus(b+c)$ ja $a\oplus b+a\oplus c$.

$a\oplus(b+c)$
$=(a+(b+c))^2$
$=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$
$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$a\oplus b+a\oplus c$
$=(a+b)^2+(a+c)^2$
$=a^2+2ab+b^2+a^2+2ac+c^2$
$=2a^2+b^2+c^2+2ab+2ac$

$a\oplus(b+c)\neq a\oplus b+a\oplus c$

ii) b-kohdan mukaan $(b+c)\oplus a=a\oplus(b+c)$ ja $b\oplus a=a\oplus b$ ja $c\oplus a=a\oplus c$.
Koska $a\oplus(b+c)\neq a\oplus b+a\oplus c$, niin myöskään
$(b+c)\oplus a\neq b\oplus a+c\oplus a$

Osittelulaki ei päde.

d) 1) Jos $a\oplus b=0$, niin
$(a+b)^2=0$
$a+b=0$
$b=-a$

Luvut a ja b ovat toistensa vastaluvut.

2) Jos a ja b ovat toistensa vastaluvut, on $b=-a$.
Tällöin $a\oplus b=(a+b)^2=(a-a)^2=0^2=0$.
Väite on tosi.

265. **a)** Toisen asteen yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun diskriminantti on 0.

$9 - 4 \cdot a \cdot 2 = 0$

$9 - 8a = 0$

$a = \frac{9}{8}$

b) Funktiolla on yksi nollakohta, kun yhtälöllä $-x^3 + x^2 + ax = 0$ on yksi ratkaisu.

$-x^3 + x^2 + ax = 0$

$x(-x^2 + x + a) = 0$

$x = 0$ tai $-x^2 + x + a = 0$

Yhtälöllä $-x^3 + x^2 + ax = 0$ on vain yksi ratkaisu, jos yhtälön $-x^2 + x + a = 0$ ainut ratkaisu on $x = 0$ tai jos sillä ei ole ratkaisua.

Jos yhtälön $-x^2 + x + a = 0$ ratkaisu on $x = 0$, niin $a = 0$.
Tällöin alkuperäinen yhtälö $-x^3 + x^2 + ax = 0$ on $-x^3 + x^2 = 0$.
Ratkaistaan se.

$-x^3 + x^2 = 0$

$x^2(-x + 1) = 0$

$x = 0$ tai $x = 1$

Siten yhtälöllä on kaksi ratkaisua ja $a = 0$ ei ole mahdollinen a:n arvo.

Yhtälöllä $-x^2 + x + a = 0$ ei ole ratkaisuja, kun diskriminantti on negatiivinen.

$1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot a < 0$

$4a < -1$

$a < -\frac{1}{4}$

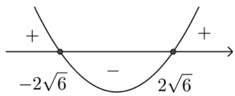
Funktiolla $f(x) = -x^3 + x^2 + ax = 0$ on yksi nollakohta, kun $a < -\frac{1}{4}$.

c) $3x^3 + ax^2 + 2x = 0$
$x(3x^2 + ax + 2) = 0$

$x = 0$ on yhtälön yksi ratkaisu. Yhtälöllä on kolme ratkaisua, jos yhtälöllä $3x^2 + ax + 2 = 0$ on kaksi eri suurta ratkaisua, joista kumpikaan ei ole 0.

Yhtälöllä $3x^2 + ax + 2 = 0$ on kaksi ratkaisua, kun diskriminantti on positiivinen.
$a^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 > 0$
$a^2 - 24 > 0$

$a^2 - 24 = 0$
$a^2 = 24$
$a = 2\sqrt{6}$ tai $a = -2\sqrt{6}$



$a^2 - 24 > 0$, kun $x < -2\sqrt{6}$ tai $x > 2\sqrt{6}$.

Yhtälön $3x^2 + ax + 2 = 0$ ratkaisu ei ole 0 millään a:n arvolla, koska $x = 0$ ei toteuta yhtälöä.

Yhtälöllä on kolme ratkaisua, kun $a < -2\sqrt{6}$ tai $a > 2\sqrt{6}$.

266. Kolme peräkkäistä kokonaislukua ovat n, $n + 1$ ja $n + 2$. Muodostetaan väittämän mukainen epäyhtälö ja näytetään että se on aina tosi.

$n(n + 2) < (n + 1)^2$
$n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$
$0 < 1$

Epäyhtälö on tosi kaikilla kokonaisluvun n arvoilla, joten väite on tosi.

267. **a)** $|x+2| = \begin{cases} x+2, \text{ kun } x+2 \geq 0 \\ -x-2, \text{ kun } x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2, \text{ kun } x \geq -2 \\ -x-2, \text{ kun } x < -2 \end{cases}$

b) $2x + |x+1| = \begin{cases} 2x+(x+1), \text{ kun } x+1 \geq 0 \\ 2x-(x+1), \text{ kun } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+1, \text{ kun } x \geq -1 \\ x-1, \text{ kun } x < -1 \end{cases}$

$2x + |x + 1| = 2$

Kun $x \geq -1$, yhtälö on

$3x + 1 = 2$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

Ratkaisu $x = \frac{1}{3}$ toteuttaa määrittelyehdon $x \geq -1$.

Kun $x < -1$, yhtälö on

$x - 1 = 2$

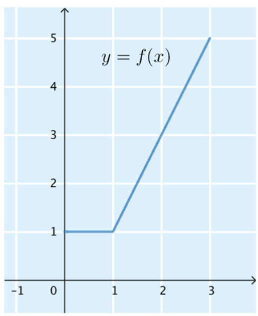
$x = 3$

Ratkaisu ei toteuta määrittelyehtoa $x < -1$.

Yhtälön ratkaisu on $x = \frac{1}{3}$.

268. $|x-1| + x = \begin{cases} x-1+x, \text{ kun } x-1 \geq 0 \\ -(x-1)+x, \text{ kun } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1, \text{ kun } x \geq 1 \\ 1, \text{ kun } x < 1 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 2x-1, \text{ kun } 1 \leq x \leq 3 \\ 1, \text{ kun } 0 \leq x < 1 \end{cases}$



Välillä [0, 1[funktion arvo on 1. Välillä [1, 3] funktion kuvaaja on nouseva suora. Tällä välillä pienin arvo on $f(1) = 1$ ja suurin $f(3) = 6 - 1 = 5$.

Funktion arvojoukko on [1, 5].

269. **a)** $|x + 1| = a$

Kun $a < 0$, yhtälöllä ei ole ratkaisuja, sillä itseisarvo on aina vähintään nolla.

Kun $a = 0$, syntyy yhtälö $|x + 1| = 0$.
Tämän ratkaisu on $x = -1$.

Kun $a > 0$, on syntyy yhtälö $|x + 1| = a$, jonka ratkaisut ovat

$$\begin{aligned} x + 1 &= a \qquad \text{tai} \qquad & x + 1 &= -a \\ x &= a - 1 & x &= -a - 1 \end{aligned}$$

Siis yhtälöllä ei ole ratkaisua, jos a < 0. Jos $a = 0$, on yhtälön ratkaisuna $x = 0$. Jos $a > 0$, ratkaisut ovat $x = a - 1$ ja $x = -a - 1$.

b)

$$\begin{aligned} ax &> x + 1 \\ ax - x &> 1 \\ (a - 1)x &> 1 \end{aligned}$$

Kun $a - 1 = 0$, eli $a = 1$, yhtälöllä ei ole ratkaisua ($0 > 1$ on epätosi).

Kun $a - 1 < 0$ eli $a < 1$,

$$\begin{aligned} (a - 1)x &> 1 \qquad ||:(a - 1) < 0 \\ x &< \frac{1}{a-1}. \end{aligned}$$

Kun $a - 1 > 0$ eli $a > 1$,

$$\begin{aligned} (a - 1)x &> 1 \quad ||:(a - 1) > 0 \\ x &> \frac{1}{a-1} \end{aligned}$$

Kun $a < 1$, ratkaisu on $x < \frac{1}{a-1}$. Kun $a = 1$, epäyhtälöllä ei ole ratkaisua. Kun $a > 1$, ratkaisu on $x > \frac{1}{a-1}$.

270. Ympyrän ympärysmitta on x (m). Ratkaistaan ympyrän säde r.

$2\pi r = x$

$r = \dfrac{x}{2\pi}$

Ympyrän pinta-ala on $\pi r^2 = \pi(\dfrac{x}{2\pi})^2 = \dfrac{\pi x^2}{4\pi^2} = \dfrac{x^2}{4\pi}$.

Neliön piiri on $1 - x$ (m). Ratkaistaan neliön sivun pituus a.

$4a = 1 - x$

$a = \dfrac{1-x}{4}$

Neliön pinta-ala on $a^2 = \left(\dfrac{1-x}{4}\right)^2 = \dfrac{x^2-2x+1}{16}$.

Tulee olla $0 < x < 1$.

Yhteispinta-alan funktio on

$$\begin{aligned}
A(x) &= {}^{4)}\frac{x^2}{4\pi} + {}^{\pi)}\frac{x^2-2x+1}{16} \\
&= \frac{(4+\pi)x^2 - 2\pi x + \pi}{16\pi} \\
&= \frac{(\pi+4)x^2}{16\pi} - \frac{2\pi x}{16\pi} + \frac{\pi}{16\pi} \\
&= \frac{\pi+4}{16\pi}x^2 - \frac{x}{8} + \frac{1}{16},\ 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

Toisin kirjoitettuna $A :]0, 1[\to \mathbb{R},\ A(x) = \dfrac{\pi+4}{16\pi}x^2 - \dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{16}$.

271. Määritetään ratkaisua $x = 1$ vastaavat a:n arvot.

$$|2 \cdot 1 + a| = 1$$
$$|2 + a| = 1$$
$$2 + a = 1 \quad \text{tai} \quad 2 + a = -1$$
$$a = -1 \qquad\qquad a = -3$$

Ratkaistaan yhtälö molemmilla a:n arvoilla ja verrataan ratkaisuja.

Kun $a = -1$, on yhtälö $|2x - 1| = 1$. Ratkaistaan yhtälö.

$$|2x - 1| = 1$$
$$2x - 1 = 1 \quad \text{tai} \quad 2x - 1 = -1$$
$$2x = 2 \qquad\qquad 2x = 0$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = 0$$

Ratkaisu ei ole haluttu ($x = 1$ tai $x = 2$).

Kun $a = -3$, on yhtälö $|2x - 3| = 1$. Ratkaistaan yhtälö.

$$|2x - 3| = 1$$
$$2x - 3 = 1 \quad \text{tai} \quad 2x - 3 = -1$$
$$2x = 4 \qquad\qquad 2x = 2$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = 1$$

Ratkaisu on haluttu.

Kun valitaan $a = -3$, on yhtälön ratkaisu $x = 1$ tai $x = 2$.

272. Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} y = |x+2| \\ x - 3y + 10 = 0. \end{cases}$

Alemmasta yhtälöstä saadaan $y = \dfrac{x+10}{3}$.

Sijoitetaan tämä ylempään, jolloin saadaan yhtälö $|x+2| = \dfrac{x+10}{3}$.

Yhtälöllä on ratkaisu, kun $x + 10 \geq 0$ eli kun $x \geq -10$.

$$|x+2| = \frac{x+10}{3}$$

$$x + 2 = \frac{x+10}{3} \quad \text{tai} \quad x + 2 = -\frac{x+10}{3}$$

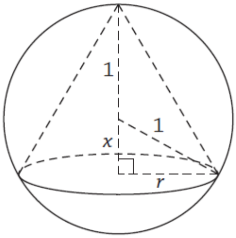
$$3x + 6 = x + 10 \qquad\qquad 3x + 6 = -x - 10$$

$$2x = 4 \qquad\qquad 4x = -16$$

$$x = 2 \qquad\qquad x = -4$$

Kun $x = 2$, $y = |2 + 2| = 4$ ja kun $x = -4$, $y = |-4 + 2| = 2$.
Käyrät leikkaavat toisensa pisteissä (2, 4) ja (–4, 2).

273. Piirretään kuva.



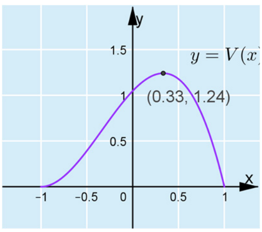
Määritetään kartion pohjan säde r muuttujan x avulla suorakulmaisesta kolmiosta.

$$x^2 + r^2 = 1^2$$
$$r^2 = 1 - x^2$$

Jos kartion korkeus on pienempi kuin 1, säde voidaan laskea samoin.

Kartion tilavuus on $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$, missä h on kartion korkeus, on $h = 1 + x$, missä $-1 < x < 1$.

Tilavuuden funktio on $V(x) = \frac{1}{3}\pi(1 - x^2)(1 + x), -1 < x < 1.$

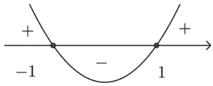


Funktion arvojoukko on]0; 1,24[.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

274. $f(x) = x - |x^2 - 1|$

$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$x = 1$ tai $x = -1$



$$f(x) = x - |x^2 - 1| = \begin{cases} x - (x^2 - 1), \text{ kun } x \le -1 \\ x + (x^2 - 1), \text{ kun } -1 < x \le 1 \\ x - (x^2 - 1), \text{ kun } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + x + 1, \text{ kun } x \le -1 \\ x^2 + x - 1, \text{ kun } -1 < x \le 1 \\ -x^2 + x + 1, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$$

Yhdistämällä ehtoja lauseke yksinkertaistuu muotoon

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, \text{ kun } x < -1 \text{ tai } x > 1 \\ x^2 + x - 1, \quad \text{kun } -1 \le x \le 1. \end{cases}$$

275. Olkoon ensimmäisen asteen polynomifunktio $P(x) = ax + b$, $a \neq 0$.
$P(x + 1) = a(x + 1) + b = ax + a + b$
$P(x) + 2 = ax + b + 2$

Ratkaistaan yhtälöstä $P(x + 1) = P(x) + 2$ ehdot a:lle ja b:lle.
$ax + a + b = ax + b + 2 \quad || -ax - b$
$a = 2$

$P(x) = 2x + b$, missä b voi olla mikä tahansa reaaliluku.

Olkoon toisen asteen polynomifunktio $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
$P(x + 1) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c = ax^2 + (2a + b)x + (a + b + c)$
$P(x) + 2 = ax^2 + bx + c + 2$

Tulisi olla $2a + b = b$, eli $a = 0$, jolloin kyseessä ei ole toisen asteen polynomifunktio. Vastaava ei siten päde toisen asteen polynomifunktioille.

276. $a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1) = (a - 1)a(a + 1)$

Kun a on kokonaisluku, ovat $a - 1$, a ja $a + 1$ peräkkäiset kokonaisluvut. Kolmesta peräkkäisestä kokonaisluvusta yksi on varmasti kolmella jaollinen. Väite on todistettu.

277. $-x^3 - ax^2 - a^2x > 0$

$x(-x^2 - ax - a^2) > 0 \quad (1)$

(i) Jos $a = 0$, saa epäyhtälö (1) muodon $-x^3 > 0$, mikä on tosi kun $x < 0$.

(ii) Jos $a \neq 0$, on yhtälön $-x^2 - ax - a^2 = 0$ diskriminantti negatiivinen:
$D = (-a)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-a^2) = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0$, kun $a \neq 0$.

Tällöin $-x^2 - ax - a^2 < 0$ (kuvaaja alaspäin aukeava paraabeli). Tulon $x \cdot (-x^2 - ax - a^2)$ molemmat tekijät ovat negatiivisia kun $x < 0$, joten tulo on positiivinen, joten epäyhtälö (1) on tosi, kun $x < 0$.

Kohtien (i) ja (ii) perusteella epäyhtälö (1) on tosi kaikilla a:n arvoilla.

278. **a)** $|x + 1| > a$

Kun $a < 0$, epäyhtälö toteutuu kaikilla x:n arvoilla.
Kun $a = 0$, $|x + 1| > 0$, kun $x \neq -1$.
Kun $a > 0$,
$|x + 1| > a$, kun
$x + 1 < -a$ tai $x + 1 > a$
$x < -a - 1$ $x > a - 1$

Kootusti:
Kun $a < 0$, epäyhtälö toteutuu kaikilla x:n arvoilla. Kun $a = 0$, epäyhtälö toteutuu, kun $x \neq -1$. Kun $a > 0$, epäyhtälö toteutuu, kun $x < -a - 1$ tai $x > a - 1$.

b) $|x + 1| \leq a$

Kun $a < 0$, epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.
Kun $a = 0$, epäyhtälö toteutuu, kun $x + 1 = 0$, eli kun $x = -1$.
Kun $a > 0$,
$|x + 1| \leq a$
$-a \leq x + 1 \leq a$
$-a - 1 \leq x \leq a - 1$

Kootusti:
Kun $a < 0$, epäyhtälöllä ei ole ratkaisuja. Kun $a = 0$, epäyhtälö toteutuu, kun $x = -1$. Kun $a > 0$, epäyhtälö toteutuu, kun $-a - 1 \leq x \leq a - 1$.