10 Todennäköisyyslaskenta ja tilastot

10.1 Todennäköisyys ja kombinatoriikka

LUVUN 10.1 YDINTEHTÄVÄT

1001. **a)** Ensimmäisen nopan heitossa on kuusi alkeistapausta, joista tapahtumalle suotuisia on yksi. Kysytty todennäköisyys on siten $\frac{1}{6}$.

b) Ensimmäisen nopan heitossa tapahtuman “silmäluku on viisi” todennäköisyys on $\frac{1}{6}$. Toisen nopan heitossa tapahtuman “silmäluku on viisi” todennäköisyys on myös $\frac{1}{6}$. Tapahtuma “kummankin nopan silmäluku on viisi” tarkoittaa ensimmäisen nopan silmälukua viisi ja toisen nopan silmälukua viisi. Kertolaskusäännön perusteella kysytyn tapahtuman todennäköisyys on $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Toinen tapa:
Kummassakin heitossa on kuusi alkeistapausta, joten heitoissa on yhteensä $6 \cdot 6 = 36$ alkeistapausta. Suotuisia alkeistapauksia tapahtumalle “kummankin nopan silmäluku viisi” on ainoastaan yksi, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{1}{36}$.

c) Taulukoidaan kaikki kahden nopan tulosvaihtoehdot ja poimitaan näistä suotuisat alkeistapaukset.

6	x	x	x	x		x
5						
4	x	x	x	x		x
3	x	x	x	x		x
2	x	x	x	x		x
1	x	x	x	x		x
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Suotuisia alkeistapauksia on kaiken kaikkiaan 25, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{25}{36}$.

d) Tapahtuman "ainakin yhden nopan silmäluku on viisi" vastatapahtuma on "kummankaan nopan silmäluku ei ole viisi", jonka todennäköisyys laskettiin c-kohdassa. Kysytty todennäköisyys on komplementtisäännön mukaan $1-\frac{25}{36}=\frac{36}{36}-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$.

Toinen tapa:
Taulukoidaan kaikki kahden nopan tulosvaihtoehdot ja poimitaan näistä suotuisat alkeistapaukset.

6					x	
5	x	x	x	x	x	x
4					x	
3					x	
2					x	
1					x	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Suotuisia alkeistapauksia on kaiken kaikkiaan 11, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{11}{36}$.

e) Taulukoidaan kaikki kahden nopan tulosvaihtoehdot ja poimitaan näistä suotuisat alkeistapaukset.

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Suotuisia alkeistapauksia on kaiken kaikkiaan 10, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

1002. **a)** $\text{P(molemmat toimivat virheettömästi)}=0{,}75\cdot 0{,}92=0{,}69$.

b)

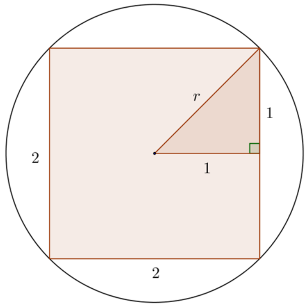
$$
\begin{aligned}
&\text{P(vähintään toinen toimii virheettömästi)}\\
&=1-\text{P(kumpikaan ei toimi virheettömästi)}\\
&=1-0{,}25\cdot 0{,}08)\\
&=0{,}98
\end{aligned}
$$

1003. Palloja on yhteensä 3 + 4 + 5 = 12, joista nostetaan kaksi palloa.

P(nostetut kaksi palloa ovat samanväriset)
= P(kumpikin pallo on punainen tai kumpikin pallo on sininen tai kumpikin pallo on musta)
= P(kaksi punaista) + P(kaksi sinistä) + P(kaksi mustaa)

$$
\begin{aligned}
&=\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}+\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\\
&=\frac{19}{66}\\
&=0{,}287...\\
&\approx 0{,}29
\end{aligned}
$$

1004. Piirretään tilannetta havainnollistava kuva.

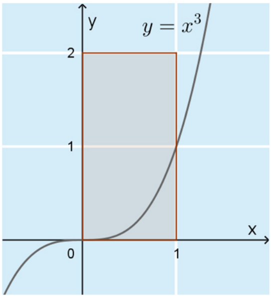


Neliön ympäri piirretyn ympyrän säde r, $r > 0$, saadaan Pythagoraan lauseella:
$r^2 = 1^2 + 1^2$, josta $r = \sqrt{2}$.

Koko kuvion pinta-ala on ympyrän pinta-ala $\pi r^2 = \pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi$.
Tapahtumaa vastaavan alueen pinta-ala on neliön pinta-ala $2 \cdot 2 = 4$.

Kysytty todennäköisyys on siis $\dfrac{4}{2\pi} = \dfrac{2}{\pi} = 0,636... \approx 0,64$.

1005. **a)** Piirretään tilannetta havainnollistava kuva.



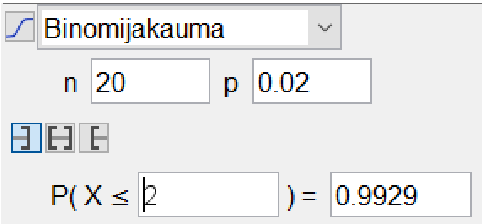
Lasketaan tapahtumaa ”piste käyrän $y = x^3$ alapuolella” vastaavan alueen pinta-ala:

$$\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x = \Big/_0^1 \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4}.$$

Koko kuvion eli suorakulmion pinta-ala on $1 \cdot 2 = 2$, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$.

b) Käyrän $y = x^3$ pinta-ala on nolla, joten P(piste on käyrällä $y = x^3$) = 0.

1006. Tulkitaan 20 kappaleen tutkiminen toistokokeeksi.
Toistokokeessa jokaisen yksittäisen toiston todennäköisyys pysyy samana eli nyt P(virheellinen yksilö) = 0,02.
Toistoja on siis 20 ja virheellisen tuotteen todennäköisyys on 0,02.
Todennäköisyyslaskurilla saadaan $\mathrm{P}(X \leq 2) = 0{,}992... \approx 0{,}99$.



Toinen tapa:
Tulkitaan 20 kappaleen tutkiminen toistokokeeksi.
Toistokokeessa jokaisen yksittäisen toiston todennäköisyys pysyy samana eli nyt P(virheellinen yksilö) = 0,02.
Toistoja on siis 20 ja virheellisen tuotteen todennäköisyys on 0,02.

Tapahtuma ”enintään kaksi virheellistä yksilöä” sisältää tapaukset 0 virheellistä yksilöä, 1 virheellinen yksilö ja 2 virheellistä yksilöä.

Olkoon satunnaismuuttuja X virheellisten yksilöiden lukumäärä.
Lasketaan jokaisen satunnaismuuttujan X arvon todennäköisyys binomitodennäköisyyden kaavalla.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \leq 2) &= \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) \\
&= \binom{20}{0} 0{,}02^{0} \cdot 0{,}98^{20} + \binom{20}{1} 0{,}02^{1} \cdot 0{,}98^{19} + \binom{20}{2} 0{,}02^{2} \cdot 0{,}98^{18} \\
&= 0{,}992... \\
&\approx 0{,}99
\end{aligned}
$$

1007. **a)** Puheenjohtaja voidaan valita kaikista yhdistyksen 23 jäsenestä.
Puheenjohtajan valinnan jälkeen sihteeri voidaan valita kaikista jäljellä olevista 22 jäsenestä.
Sihteerin valinnan jälkeen jäljellä on 21 jäsentä, joista kuka tahansa voidaan valita rahastonhoitajaksi.

Valinta voidaan tehdä tuloperiaatteen mukaan $23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\,626$ eri tavalla.

b) Kaupungissa asuvista puheenjohtaja voidaan valita 17 jäsenen joukosta.
Puheenjohtajan valinnan jälkeen sihteeri voidaan valita jäljellä olevista 16 kaupunkilaisjäsenestä.
Sihteerin valinnan jälkeen jäljellä on 15 kaupungissa asuvaa jäsentä, joista kuka tahansa voidaan valita rahastonhoitajaksi.

Kaupunkilaisten kesken valinta voidaan tehdä tuloperiaatteen mukaan $17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$ eri tavalla.

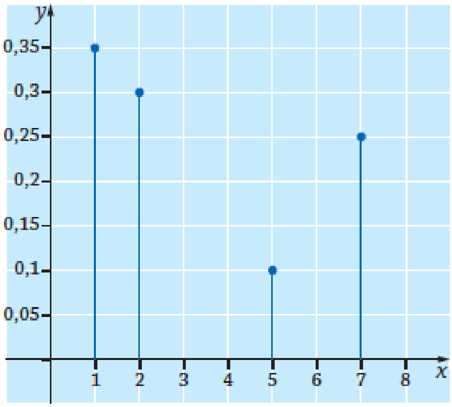
Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{4080}{10626} = \frac{680}{1771} = 0{,}383... \approx 0{,}38$.

10.2 Jakauma

LUVUN 10.2 YDINTEHTÄVÄT

1008. **a)** Jakauman todennäköisyyksien summa on 1.
$P(X = 2) = 1 – 0,35 – 0,1 – 0,25 = 0,3$

b)

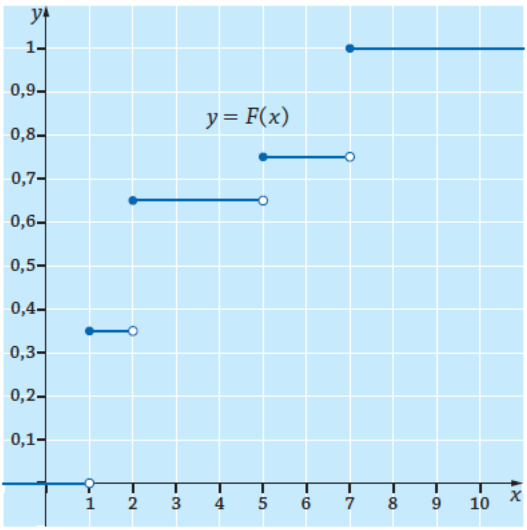


c) Satunnaismuuttujan X pienin arvo on 1, joten kertymäfunktion F arvo on nolla kaikilla $x < 1$. Kertymäfunktion arvo kasvaa hyppäyksittäin kohdissa $x = 1$, $x = 2$, $x = 5$ ja $x = 7$. Kertymäfunktion arvo on vakio näiden kohtien välillä.

$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 1) = 0{,}35$
$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}35 + 0{,}3 = 0{,}65$
$F(5) = P(X \leq 5) = 0{,}35 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}75$
$F(7) = P(X \leq 7) = 0{,}35 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}25 = 1$

Lisäksi kaikilla $x > 7$ on $F(x) = P(X \leq x) = 1$, koska satunnaismuuttujan X arvo on korkeintaan 7.

Kertymäfunktion lauseke on siis $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ 0{,}35, & \text{kun } 1 \leq x < 2 \\ 0{,}65, & \text{kun } 2 \leq x < 5 \\ 0{,}75, & \text{kun } 5 \leq x < 7 \\ 1, & \text{kun } x \geq 7 \end{cases}$.



d) $F(2) = P(X \leq 2) = 0{,}65$.
$F(3) = P(X \leq 3) = 0{,}65$.

1009. **a)** Taulukoidaan alkeistapaukset eli silmälukuparit, joita on yhteensä $4 \cdot 4 = 16$. Merkitään kunkin kohdalle silmälukujen summa.

4	5	6	7	8
3	4	5	6	7
2	3	4	5	6
1	2	3	4	5
	1	**2**	**3**	**4**

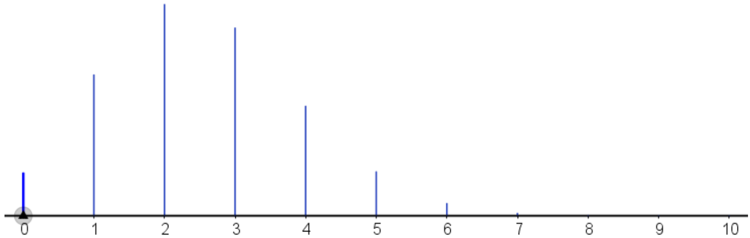
x	$P(X = x)$
2	$1/16 = 0{,}0625$
3	$2/16 = 0{,}125$
4	$3/16 = 0{,}1875$
5	$4/16 = 0{,}3125$
6	$3/16 = 0{,}1875$
7	$2/16 = 0{,}125$
8	$1/16 = 0{,}0625$

b)

$$E(X) = \frac{1}{16}\cdot 2 + \frac{2}{16}\cdot 3 + \frac{3}{16}\cdot 4 + \frac{4}{16}\cdot 5 + \frac{3}{16}\cdot 6 + \frac{2}{16}\cdot 7 + \frac{1}{16}\cdot 8 = 5$$

$$D(X) = \sqrt{\frac{1}{16}\cdot(2-5)^2 + \frac{2}{16}\cdot(3-5)^2 + \ldots + \frac{2}{16}\cdot(7-5)^2 + \frac{1}{16}\cdot(8-5)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{2}$$

1010. a) Havainnollistetaan satunnaismuuttujan X jakaumaa todennäköisyyslaskurilla.



Toinen tapa:
Lasketaan satunnaismuuttujan X arvojen todennäköisyyksiä binomitodennäköisyyden kaavalla ja piirretään havainnollistava kuva näiden perusteella.

$$P(X=0)=\binom{10}{0}(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^{10}=\frac{59049}{1048576}=0,056...\approx 0,05$$

$$P(X=1)=\binom{10}{1}(\frac{1}{4})^1(\frac{3}{4})^{9}=\frac{98415}{524288}=0,187...\approx 0,19$$

$$P(X=2)=\binom{10}{2}(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^{8}=\frac{295245}{1048576}=0,281...\approx 0,28$$

$$P(X=3)=\binom{10}{3}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^{7}=\frac{32805}{131072}=0,250...\approx 0,25$$

$$P(X=4)=\binom{10}{4}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^{6}=\frac{76545}{524288}=0,145...\approx 0,15$$

$$P(X=5)=\binom{10}{5}(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^{5}=\frac{15309}{262144}=0,058...\approx 0,06$$

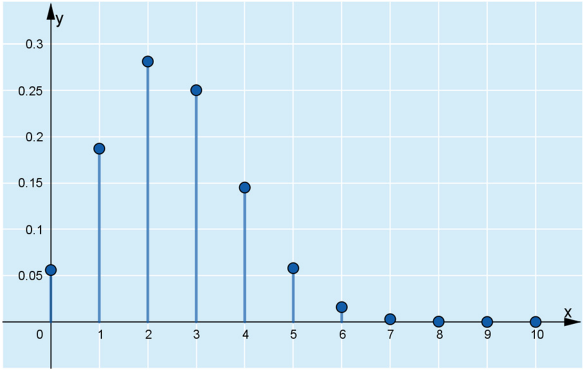
$$P(X=6)=\binom{10}{6}(\frac{1}{4})^6(\frac{3}{4})^{4}=\frac{8505}{524288}=0,016...\approx 0,02$$

$$P(X=7)=\binom{10}{7}(\frac{1}{4})^7(\frac{3}{4})^{3}=\frac{405}{131072}=0,0030...\approx 0,003$$

$$P(X=8)=\binom{10}{8}(\frac{1}{4})^8(\frac{3}{4})^{2}=\frac{405}{1048576}=3,86...\cdot 10^{-4}\approx 0,0004$$

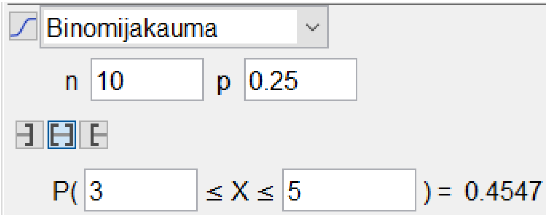
$$P(X=9)=\binom{10}{9}(\frac{1}{4})^9(\frac{3}{4})^{1}=\frac{15}{524288}=2,86...\cdot 10^{-5}\approx 0,00003$$

$$P(X=10)=\binom{10}{10}(\frac{1}{4})^{10}(\frac{3}{4})^{0}=\frac{1}{1048576}=9,53...\cdot 10^{-7}\approx 0,0000010$$



b) Todennäköisyyslaskurilla saadaan

$P(3 \le X \le 5) = 0,454... \approx 0,46.$



Toinen tapa:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(3 \le X \le 5) &= \mathrm{P}(X = 3) + \mathrm{P}(X = 4) + P(X = 5) \\
&= \frac{32805}{131072} + \frac{76545}{524288} + \frac{15309}{262144} \\
&= \frac{238383}{524288} = 0,454... \\
&\approx 0,45
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= np = 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4} \\
&= 2,5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(X) &= \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{1}{4})} = \frac{\sqrt{30}}{4} \\
&= 1,369... \\
&\approx 1,37
\end{aligned}
$$

1011. Tiheysfunktiolle f on voimassa
1) $f(x) \geq 0$
2) funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on 1.

Ratkaistaan ohjelman avulla vakion a arvo yhtälöstä $\int_{-2}^{2} a(x+3)\mathrm{d}x = 1$.

Yhtälön ratkaisu on $a = \frac{1}{12}$.

Epäyhtälön $\frac{1}{12}(x+3) \geq 0$ ratkaisu on $x \geq -2$, joten tällä vakiolla funktio f on kaikkialla ei-negatiivinen.

Siis f on tiheysfunktio, kun $a = \frac{1}{12}$.

Lasketaan pyydetty todennäköisyys. $\mathrm{P}(X \leq 1) = \int_{-2}^{1} \frac{1}{12}(x+3)\mathrm{d}x = \frac{5}{8}$.

Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F on funktion f integraalifunktio,
joten $F(x) = \int \frac{1}{12}(x+3)\mathrm{d}x = \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{4}x + C$.
Kohdassa $x = 2$ on kertymäfunktion F arvo 1, joten saadaan yhtälö vakion C määrittämiseksi:

$$F(2) = \frac{1}{24} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 2 + C = \frac{2}{3} + C$$

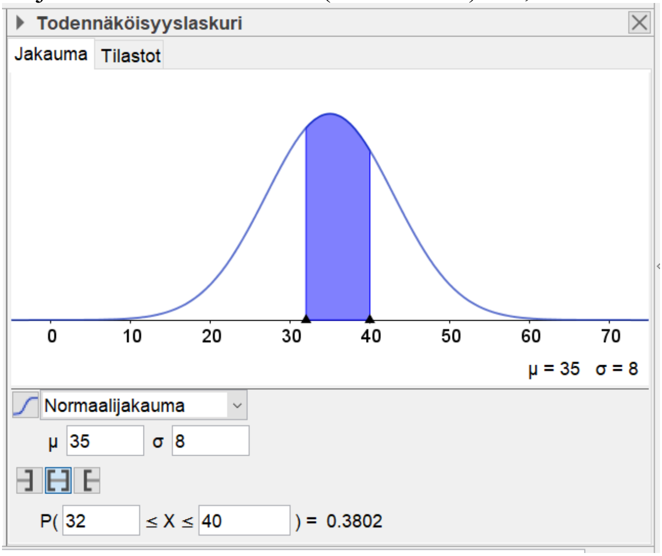
$$\frac{2}{3} + C = 1$$

$$C = \frac{1}{3}$$

Välillä $x < -2$ kertymäfunktion F arvo on 0 ja välillä $x > 2$ kertymäfunktion F arvo on 1.

Kysytty kertymäfunktio on siis $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < -2 \\ \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}, & \text{kun } -2 \leq x < 2. \\ 1, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$

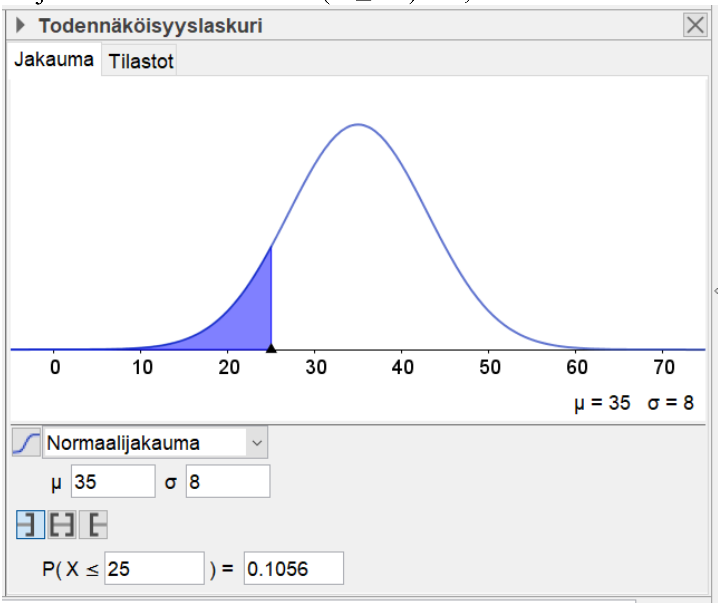
1012. **a)** Ohjelman avulla saadaan $\mathrm{P}(32 \leq X \leq 40) \approx 0{,}38$.



Toinen tapa:
Normitetaan arvot ja käytetään normitetun normaalijakauman todennäköisyyksien taulukoituja arvoja.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(32 \leq X \leq 40) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{32-35}{8} \leq Z \leq \frac{40-35}{8}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(-\frac{3}{8} \leq Z \leq \frac{5}{8}\right) \\
&= \mathrm{P}(-0{,}375 \leq Z \leq 0{,}625) \\
&\approx \Phi(0{,}63) - \Phi(-0{,}38) \\
&= \Phi(0{,}63) - (1 - \Phi(0{,}38)) \\
&= \Phi(0{,}63) - 1 + \Phi(0{,}38) \\
&= 0{,}7357 - 1 + 0{,}6480 \\
&= 0{,}3837 \\
&\approx 0{,}38
\end{aligned}
$$

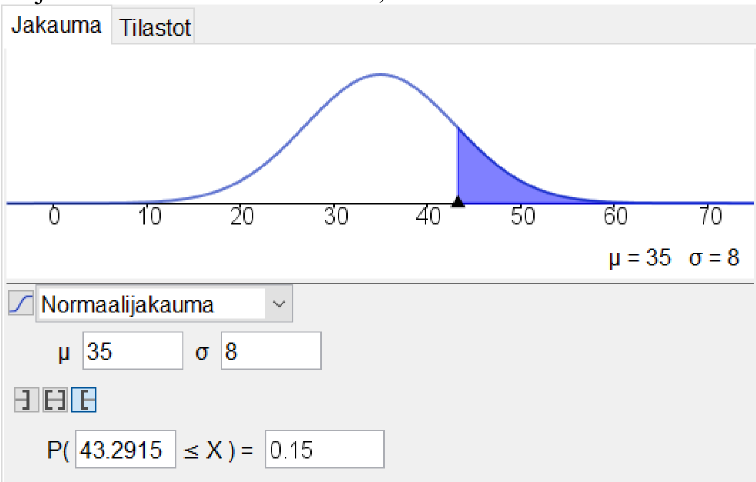
b) Ohjelman avulla saadaan $\mathrm{P}(X \leq 25) \approx 0{,}11$.



Toinen tapa:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X \leq 25)\\
&= \mathrm{P}(Z \leq \frac{25-35}{8})\\
&= \mathrm{P}(Z \leq -\frac{10}{8})\\
&= \mathrm{P}(Z \leq -1{,}25)\\
&= \Phi(-1{,}25)\\
&= 1-\Phi(1{,}25)\\
&= 1-0{,}8944\\
&= 0{,}1056\\
&\approx 0{,}11
\end{aligned}$$

c) Ohjelman avulla saadaan $a \approx 43{,}3$.



Toinen tapa:

$$\mathrm{P}(X \geq a) = 1 - \mathrm{P}(X \leq a) = 0{,}15$$

$$\mathrm{P}(X \leq a) = 0{,}85$$

$$\mathrm{P}(Z \leq \frac{a-35}{8}) = 0{,}85$$

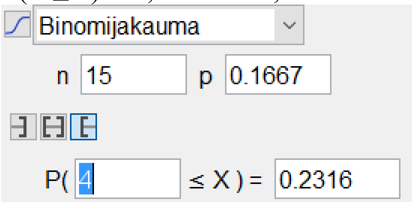
$$\Phi(\frac{a-35}{8}) = 0{,}85 \quad \| \Phi(1{,}03) \approx 0{,}8485 \text{ ja } \Phi(1{,}04) \approx 0{,}8508$$

$$\frac{a-35}{8} \approx 1{,}04$$

$$a \approx 43{,}32$$

1013. Kyseessä on toistokoe, jossa toistoja on 15 ja jokaisessa heitossa jokaisen silmäluvun, myös silmäluvun kuutonen, todennäköisyys on $\frac{1}{6}$.

Merkitään satunnaismuuttujalla X kuutosten lukumäärä, jolloin $X \sim \text{Bin}(15, \frac{1}{6})$. Todennäköisyyslaskurilla saadaan
$\text{P}(X \geq 4) = 0{,}231\ldots \approx 0{,}23$.



Toinen tapa:
Kyseessä on toistokoe, jossa toistoja on 15 ja jokaisessa heitossa jokaisen silmäluvun, myös silmäluvun kuutonen, todennäköisyys on $\frac{1}{6}$.

Tapahtumaan ”15 heitossa kuutonen tulee neljästi tai useammin” kuuluu kuutosten lukumäärät 4, 5, 6, …, 14 ja 15.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys tapahtuman komplementin avulla. Tapahtuman komplementti on ”15 heitossa kuutonen tulee enintään kolme kertaa”.

Merkitään satunnaismuuttujalla X kuutosten lukumäärä.

$$
\begin{aligned}
&\text{P(15 heitossa kuutonen tulee enintään kolme kertaa)}\\
&= \text{P}(X=0)+\text{P}(X=1)+\text{P}(X=2)+\text{P}(X=3)\\
&= \binom{15}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{15}+\binom{15}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{14}+\binom{15}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{13}+\binom{15}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{12}\\
&= 0{,}768\ldots\\
&\approx 0{,}77
\end{aligned}
$$

Kysytty todennäköisyys on
P(15 heitossa kuutonen tulee neljästi tai useammin) = $1 - 0{,}768\ldots \approx 0{,}23$.

10.3 Tilastot

LUVUN 10.3 YDINTEHTÄVÄT

1014. Tulokset suuruusjärjestyksessä ovat 1, 2, 3 ja 5. Heittoja on lopulta kaiken kaikkiaan viisi, joten suuruusjärjestyksessä keskimmäisin eli 3. tulos on mediaani.

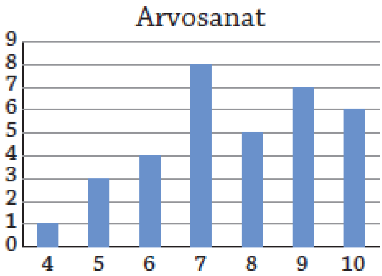
Jos viidennen heiton tulos on 1 tai 2, ovat heittojen tulokset suuruusjärjestyksessä joko 1, 1, 2, 3 ja 5 tai 1, 2, 2, 3 ja 5, ja tällöin kummassakin tapauksessa mediaani on 2.

Jos viidennen heiton tulos on vähintään 3, on keskimmäisin tulos 3 ja mediaani on tällöin 3.

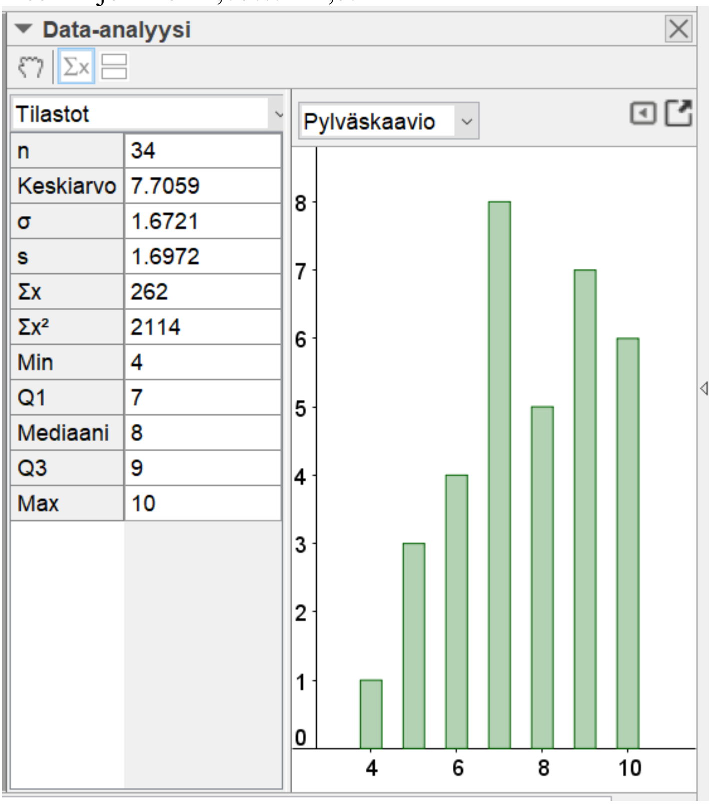
Pienin vaihtoehto viidennelle heitolle on 1. Tällöin tulosten keskiarvo on
$$\frac{1+5+3+2+1}{5}=\frac{12}{5}=2{,}4.$$

Suurin vaihtoehto viidennelle heitolle on 6. Tällöin tulosten keskiarvo on
$$\frac{1+5+3+2+6}{5}=\frac{17}{5}=34.$$

1015. a)



b) Koska aineisto on luokiteltu, siirretään luvut matematiikkaohjelmaan ja lasketaan moodia lukuun ottamatta pyydetyt arvot siellä.
Moodi on 7.
Mediaai on 8.
Keskiarvo on 7,7.
Keskihajonta on 1,67… ≈ 1,7.



n	34
Keskiarvo	7.7059
σ	1.6721
s	1.6972
Σx	262
Σx²	2114
Min	4
Q1	7
Mediaani	8
Q3	9
Max	10

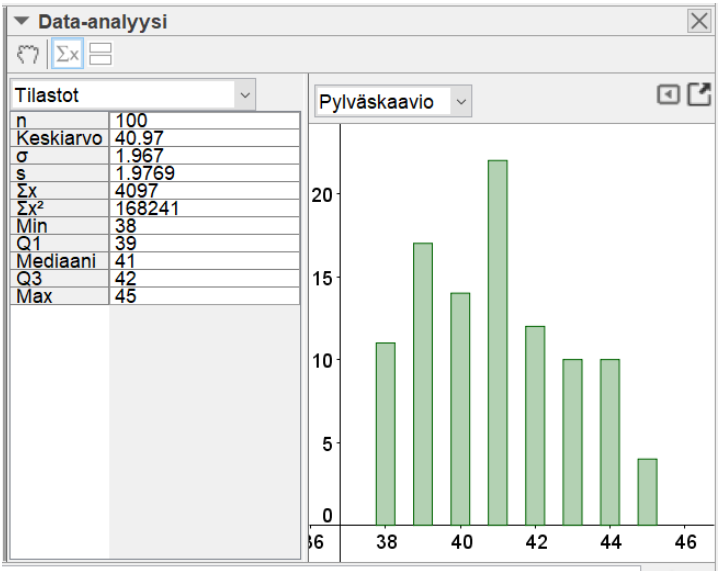
Toinen tapa:
Moodi on 7.
Mediaani on suuruusjärjestyksessä olevista arvosanoista 17. ja 18. arvosanan keskiarvo. Nyt 16 ensimmäistä arvosanaa ovat 4–7 ja 17. ja 18. jäsen ovat arvosanoja 8. Mediaani on siis 8.

Keskiarvo on
$$\frac{1\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+8\cdot 7+5\cdot 8+7\cdot 9+6\cdot 10}{1+3+4+8+5+7+6}=\frac{262}{34}=7,70...\approx 7,7.$$

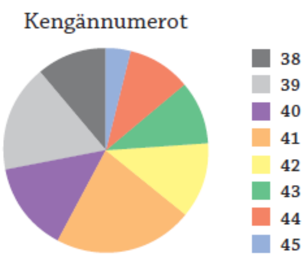
Keskihajonta on
$$\sqrt{\frac{1\cdot(4-\frac{262}{34})^2+3\cdot(5-\frac{262}{34})^2+4\cdot(6-\frac{262}{34})^2+...+6\cdot(10-\frac{262}{34})^2}{34}}$$
$$=1,67...$$
$$\approx 1,7.$$

1016. **a)** Koska aineisto on luokiteltu, siirretään luvut matematiikkaohjelmaan ja lasketaan tyyppiarvoa lukuunottamatta pyytetyt arvot siellä. Tyyppiarvo saadaan suoraan katsomalla ainoiston yleisin arvo.

Tyyppiarvo on 41, mediaani 41, keskiarvo 41 ja keskihajonta 1,96… ≈ 2,0.



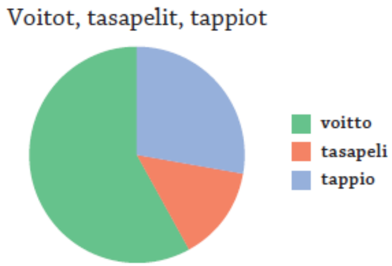
n	100
Keskiarvo	40.97
σ	1.967
s	1.9769
Σx	4097
Σx²	168241
Min	38
Q1	39
Mediaani	41
Q3	42
Max	45



b) Voittoja on 58,0 %, tasapelejä 14,0 % ja häviöitä 28,0 % pelatuista otteluista.

Tyyppiarvo eli moodi on voitto, koska voittoja on eniten. Tulokset voidaan ajatella laitettavan suuruusjärjestykseen voitto, tasapeli ja häviö, jolloin keskimmäiset sijoittuvat voittoluokkaan. Mediaani on siis voitto.

Keskiarvoa aineistosta ei voida laskea.



1017. a) Mediaani-ikä eli ikä, jonka on saavuttanut 50 % suomalaisista, on noin 37 vuotta.

b) Enintään 20-vuotiaiden osuus on noin 25 % suomalaisista.

c) Enintään 50-vuotiaita on 70 %, joten vähintään 50-vuotiaiden osuus on 30 % suomalaisista.

d) Enintään 40-vuotiaita on noin 53 % suomalaisista ja enintään 60-vuotiaita on noin 83 % suomalaisista. Suomalaisista 40-60-vuotiaiden osuus on tällöin 30 %.

e) Enintään 44-vuotiaita on noin 60 % suomalaisista, joten vähintään 44-vuotiaita on 40 % suomalaisista.

f) Enintään 30-vuotiaita on noin 40 % suomalaisista.

1018. Muutetaan kaikki ajat sekunneiksi laskennan helpottamiseksi.
Petrin aika sekunteina ensimmäisillä iltarasteilla on $54 \cdot 60 + 10 = 3250$.
Kaikkien osallistuneiden aikojen keskiarvo sekunteina on
$72 \cdot 60 + 43 = 4363$ ja keskihajonta $17 \cdot 60 + 26 = 1046$.

Petrin tulos poikkeaa keskiarvosta $\frac{3250-4363}{1046} = -1,06...$ keskihajonnan mittaa. Poikkeama on alaspäin, joten Petrin tulos on noin 1,1 keskihajontaa parempi kuin keskimääräinen tulos.

Jälkimmäisillä iltarasteilla Petrin aika sekunteina on $61 \cdot 60 + 11 = 3671$.
Kaikkien osallistuneiden keskiarvo sekunteina on $87 \cdot 60 + 55 = 5275$ ja keskihajonta $22 \cdot 60 + 13 = 1333$.

Petrin tulos poikkeaa keskiarvosta $\frac{3671-5275}{1333} = -1,20...$ keskihajonnan mittaa, eli tulos on noin 1,2 keskihajonnan mittaa parempi kuin keskimääräinen tulos.

Petri menestyi paremmin jälkimmäisellä kerralla.

Luvun 10 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

1019. Puolisoilla on sama veriryhmä, kun molemmat kuuluvat ryhmään A, tai molemmat kuuluvat ryhmään B, tai molemmat ryhmään AB, tai molemmat ryhmään O. Nämä tapahtumat ovat erilliset, joten yhteenlaskusäännön ja riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön avulla saadaan

P(puolisoilla sama veriryhmä)
= P(A ja A) + P(B ja B) + P(AB ja AB) + P(O ja O)
$= 0{,}44 \cdot 0{,}44 + 0{,}17 \cdot 0{,}17 + 0{,}08 \cdot 0{,}08 + 0{,}31 \cdot 0{,}31$
$= 0{,}325$
$\approx 0{,}33.$

1020. Se, että henkilö joutuu pysähtymään valoihin enintään kerran, tarkoittaa, että joko kaikki kolme valoa näyttävät vihreää tai yksi valoista näyttää punaista, muut kaksi vihreää.

Todennäköisyys, että kaikki kolme valoa näyttävät vihreää, on riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön mukaan
P(kaikki vihreää) $= 0{,}30 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}20 = 0{,}024.$

Todennäköisyys, että yksi valoista näyttää punaista ja muut vihreää, on yhteenlaskusäännön mukaan
P(yksi pun, muut vihreää)
= P(PVV tai VPV tai VVP)
$= 0{,}7 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}20 + 0{,}30 \cdot 0{,}60 \cdot 0{,}20 +0{,}30 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}80$
$= 0{,}188.$

Kysytty todennäköisyys on yhteenlaskusäännön mukaan
P(pysähtyy vain kerran)
= P(kaikki vihreää) + P(yksi pun, muut vihreää)
$= 0{,}024 + 0{,}188$
$= 0{,}212$
$\approx 0{,}21.$

1021. Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Alkeistapauksia ovat kaikki kahta noppaa heitettäessä saatavat silmälukuparit, joita on 36. Esitetään silmälukuparit ruudukossa ja merkitään jokaisen silmälukuparin kohdalle satunnaismuuttujan X arvo eli suurempi saaduista silmäluvuista. Tämän perusteella saadaan laskettua eri arvojen todennäköisyydet.

6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	5	5	6
4	4	4	4	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

x	$P(X = x)$
1	1/36
2	3/36 = 1/12
3	5/36
4	7/36
5	9/36 = 1/4
6	11/36

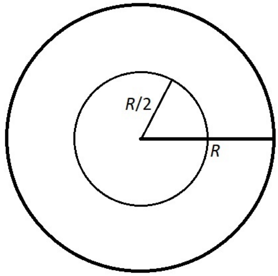
Satunnaismuuttujan X odotusarvo (eli kysytty keskiarvo) on

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X &= \frac{1}{36}\cdot 1+\frac{3}{36}\cdot 2+\frac{5}{36}\cdot 3+\frac{7}{36}\cdot 4+\frac{9}{36}\cdot 5+\frac{11}{36}\cdot 6\\ &= \frac{161}{36}\\ &= 4{,}4722...\\ &\approx 4{,}5\end{aligned}$$

ja keskihajonta

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(X) &= \sqrt{\frac{1}{36}\cdot\left(1-\tfrac{161}{36}\right)^2+\frac{3}{36}\cdot\left(2-\tfrac{161}{36}\right)^2+\ldots+\frac{9}{36}\cdot\left(5-\tfrac{161}{36}\right)^2+\frac{11}{36}\cdot\left(6-\tfrac{161}{36}\right)^2}\\ &= \frac{\sqrt{2555}}{36}\\ &= 1{,}4040...\\ &\approx 1{,}4.\end{aligned}$$

1022. Piirretään mallikuva. Olkoon tikkataulun säde R, jolloin koko taulun pinta-ala on πR^2. Tikka osuu lähemmäs keskipistettä kuin reunaa, jos se osuu ympyrään, jonka säde on $\frac{R}{2}$.



Suotuisan alueen pinta-ala on siis

$\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{\frac{\pi R^2}{4}}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$.

1023. Kahdeksan henkilön joukosta voidaan valita kolme $\binom{8}{3} = 56$ eri tavalla.

Kaksi miestä viidestä voidaan valita $\binom{5}{2} = 10$ eri tavalla ja yksi nainen kolmesta $\binom{3}{1} = 3$ eri tavalla. Lisäksi kolme miestä viidestä voidaan valita $\binom{5}{3} = 10$ eri tavalla.

P(ainakin kaksi miestä)
= P(kaksi miestä ja yksi nainen) + P(kolme miestä)

$$= \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}}$$

$$= \frac{5}{7}.$$

1024. **a)** Viiden kilpailijan joukosta voidaan valita kultamitalin, hopeamitalin ja pronssimitalin saaja $(5)_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ eri tavalla. Näistä vain yksi on oikea tapa, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{1}{60}$.

b) Kolme mitalin saajaa voidaan valita viiden kilpailijan joukosta $\binom{5}{3} = 10$ eri tavalla, joten P(kolme parasta saa mitalit) = $\frac{1}{10}$.

Toinen tapa:
a-kohdassa laskettiin, että kolme mitalia voidaan jakaa viidelle kilpailijalle 60 eri tavalla. Näistä sellaisia, joissa mitalikolmikko on oikea, mutta järjestys mahdollisesti väärä, on $3! = 6$. Niinpä kysytty todennäköisyys on $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$.

1025. Luvun 5-kantainen logaritmi on kokonaisluku, jos luku on muotoa 5^n, missä n on kokonaisluku. Koska $5^0 = 1$, $5^1 = 1$, $5^2 = 25$ ja $5^3 = 125 > 100$, luettelon luvuista kokonaislukuja ovat vain luvut $\log_5 1 = 0$, $\log_5 5 = 1$ ja $\log_5 25 = 2$, yhteensä kolme lukua.

Kaikkiaan lukuja on 100, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{3}{100} = 0{,}03$.

1026. Piste (a, b) on suoralla $y = 2x$, jos luvut a ja b toteuttavat yhtälön $b = 2a$. Nopanheitossa mahdolliset tulokset ovat silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Silmälukupareista yhtälön $b = 2a$ toteuttavat parit (1, 2), (2, 4) ja (3, 6).

Kaikkiaan silmälukupareja on $6 \cdot 6 = 36$, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

1027. **a)** Yhdellä arvalla voi voittaa yhden lahjakortin, jonka arvo on 30 euroa tai yhden lahjakortin, jonka arvo on 10 euroa. Arpa maksaa 3 euroa voitosta riippumatta, joten satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat $30 - 3 = 27$ (euroa), $10 - 3 = 7$ (euroa) ja $0 - 3 = -3$ (euroa).

Lasketaan eri arvojen todennäköisyydet.

$$\mathrm{P}(X = 27) = \frac{2}{200} = \frac{1}{100}$$

$$\mathrm{P}(X = 7) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$$

$$\mathrm{P}(X = -3) = \frac{200-2-10}{200} = \frac{47}{50}$$

Odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{100}\cdot 27 + \frac{1}{20}\cdot 7 + \frac{47}{50}\cdot(-3) = -\frac{11}{5} = -2{,}2 \text{ (euroa).}$$

b) Keskihajonta on

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}(X)\\ &= \sqrt{\frac{1}{100}\cdot(27-(-2{,}2))^2 + \frac{1}{20}\cdot(7-(-2{,}2))^2 + \frac{47}{50}\cdot(-3-(-2{,}2))^2}\\ &= 3{,}6551\ldots\\ &\approx 3{,}66 \text{ (euroa).}\end{aligned}$$

1028. Lasketaan tapahtumien "ainakin yksi ykkönen" ja "ei yhtään ykköstä" todennäköisyydet.

Yhdellä heitolla saadaan ykkönen todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$ ja muu kuin ykkönen todennäköisyydellä $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön mukaan
P(ei yhtään ykköstä) $=\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=0,16150...$

Tämän vastatapahtuman todennäköisyys on
P(ainakin yksi ykkönen) = 1 − P(ei yhtään ykköstä) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=0,83849...$

X:n voiton odotusarvo on
−2000 · P(ainakin yksi ykkönen) + 10000 · P(ei yhtään ykköstä)
= −2000 ·0,838… + 10000 · 0,161…
= −61,93…
≈ −62 (markkaa).

1029. Oppilaan räpäytyksiin käyttämä aika minuutissa on 15 · 0,1 = 1,5 sekuntia, joten todennäköisyys, että yksittäinen oppilas räpäyttää silmiään kuvanottohetkellä, on $\frac{1,5}{60}=\frac{1}{40}$.

Oppilaat räpäyttelevät silmiään toisistaan riippumatta, joten riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöllä saadaan

P(kukaan ei räpäytä silmiään) = $\left(\frac{39}{40}\right)^{25}=0,5310...\approx 0,53.$

1030. Merkitään M = "epäonnistuu matematiikan kokeessa" ja F = "epäonnistuu fysiikan kokeessa", jolloin P(M) = 0,25 ja P(F) = 0,17 sekä P(M ja F) = 0,10.

Koska P(*M* ja *F*) =P(*F* ja *M*) = *P*(*F*) · P(*M* | *F*) saadaan

P(M tai F) = P(M) + P(F) − P(M ja F) = 0,25 + 0,17 − 0,10 = 0,32.

1031. **a)** Toistokokeessa, jossa toistoja on neljä ja onnistumisen todennäköisyys jokaisella kerralla 0,9, saadaan yksi epäonnistuminen todennäköisyydellä

$\binom{4}{1}\cdot 0,1\cdot 0,9^3 = 0,2916 \approx 0,29.$

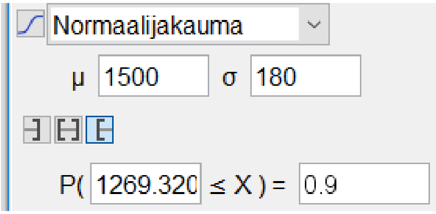
b) Onnistumisten lukumäärä noudattaa binomijakaumaa parametrein n = 4 ja p = 0,9, joten odotusarvo on np = 3,6.

c) Merkitään pelattujen pelien lukumäärää n, jolloin onnistuneiden pelien lukumäärän odotusarvo on n · 0,9. Etsitään siis luku n, jolle n · 0,9 ≥ 10. Tämän epäyhtälön ratkaisu on $n \geq \frac{10}{0,9} = 11,11...$

Annin on siis pelattava vähintään 12 kertaa.

1032. Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa yhden lampun kestoikää. Tällöin $X \sim \mathrm{N}(1500,\ 180)$.

Etsitään ensin kestoikä a, jonka ylittää 90 % lampuista eli jolle $\mathrm{P}(X \geq a) = 0{,}9$. Ohjelmalla saadaan $a = 1269{,}3\ldots$ (tuntia).



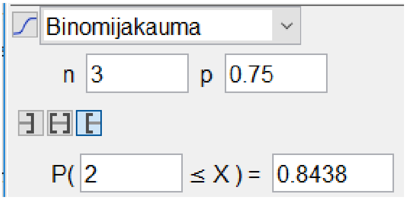
Koska lamput palavat 60 tuntia viikossa, 1269,3… tuntia tarkoittaa

$$\frac{1269{,}3\ldots}{60} = 21{,}155\ldots \approx 21 \text{ viikkoa.}$$

Lamput on siis vaihdettava 21 viikon välein.

1033. Tapahtuma "joukkue B on voittanut ottelun vapaaheittojen jälkeen" on sama kuin "kolmesta vapaaheitosta kaksi tai kolme onnistuu". Koska jokaisen vapaaheiton onnistumisen todennäköisyys on sama, tilannetta voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä on kolme ja onnistumisen todennäköisyys kullakin kerralla 0,75. Tällöin onnistumisten lukumäärä noudattaa binomijakaumaa parametrein 3 ja 0,75.

Todennäköisyyslaskurilla saadaan
P(kaksi tai kolme onnistuu) = 0,843… ≈ 0,84



Toinen tapa:
Tapahtuma "joukkue B on voittanut ottelun vapaaheittojen jälkeen" on sama kuin "kolmesta vapaaheitosta kaksi tai kolme onnistuu". Koska jokaisen vapaaheiton onnistumisen todennäköisyys on sama, tilannetta voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä on kolme ja onnistumisen todennäköisyys kullakin kerralla 0,75.

P(kaksi tai kolme onnistuu)
= P(kaksi onnistuu) + P(kolme onnistuu)

$$= \binom{3}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25 + 0,75^3$$
$$= 0,84375$$
$$\approx 0,84.$$

1034. Nimetään pysäköintipaikat ja merkitään A ja B.

Nyt $\mathrm{P}(A \text{ varattu}) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B \text{ varattu}) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ ja

$\mathrm{P}(A \text{ varattu ja } B \text{ varattu}) = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$.

Molemmat paikat ovat vapaina, kun kumpikaan ei ole varattuna. Kysytty todennäköisyys on

$\mathrm{P}(A \text{ vapaa ja } B \text{ vapaa})$

$= 1 - \mathrm{P}(A \text{ varattu tai } B \text{ varattu})$

$= 1 - ((\mathrm{P}(A \text{ varattu}) + \mathrm{P}(B \text{ varattu}) - \mathrm{P}(A \text{ varattu ja } B \text{ varattu}))$

$= 1 - (\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{8}{15})$

$= \frac{1}{5}$

$= 0{,}2.$

Toinen tapa:

Nimetään pysäköintipaikat ja merkitään niittä kirjaimilla A ja B.
Molemmat paikat ovat yhtä aikaa varattuja 32 minuuttia tunnista.
Tämän lisäksi paikka A on yksin varattu 8 minuuttia tunnista ja paikka B on yksin varattuna 8 minuuttia tunnista.

Yhteensä toinen tai molemmat paikat on varattuna 32 + 8 + 8 = 48 minuuttia tunnista.

Molemmat paikat ovat siis yhtä aikaa vapaana 60 – 48 = 12 minuuttia tunnista.

P(molemmat paikat vapaana) = $\frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$

1035. Todennäköisyys, että nolla välittyy oikein, on $1 - 0{,}005 = 0{,}995$ ja todennäköisyys, että ykkönen välittyy oikein, on $1 - 0{,}010 = 0{,}990$.

Sanassa 0010111 on 3 nollaa ja 4 ykköstä, jotka välittyvät oikein tai vääristyvät toisistaan riippumatta. Todennäköisyys, että sana välittyy täysin oikein, on $0{,}995^3 \cdot 0{,}990^4 = 0{,}946258\ldots$

Todennäköisyys, että yksi kolmesta nollasta on vääristynyt, ja muut merkit oikein, on $\binom{3}{1} \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995^2 \cdot 0{,}990^4 = 0{,}014265\ldots$

Todennäköisyys, että yksi neljästä ykkösestä on vääristynyt, ja muut merkit oikein, on $\binom{4}{1} \cdot 0{,}010 \cdot 0{,}995^3 \cdot 0{,}990^3 = 0{,}038232\ldots$

Nämä tapahtumat ovat erillisiä, joten
P(enintään 1 merkki väärin)
= P(ei yhtään väärin) + P(1 nolla väärin) + P(1 ykkönen väärin)
$= 0{,}946\ldots + 0{,}014\ldots + 0{,}038\ldots$
$= 0{,}99875\ldots$
$\approx 0{,}999.$

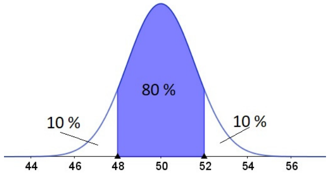
1036. **a)** Koska arvosanan 9 ylittäviä arvosanoja on selvästi enemmän kuin sen alittavia arvosanoja, keskiarvo on yli 9. Toisaalta koska arvosanaa 9 on hiukan enemmän kuin arvosanaa 10, keskiarvo on alle 9,5. Alempia arvosanoja 7 ja 8 on yhteensä niin merkittävä määrä, että keskiarvo pyöristyy neljäsosan tarkkuudella arvosanaan 9+.

Toinen tapa:
Kuviossa pystyakselin asteikkoviivat näyttäisivät olevan noin 5 prosenttiyksikön välein, jolloin arvosanojen 10, 9, 8 ja 7 osuudet olisivat noin 45 %, 46 %, 7 % ja 2 %, mistä tulee yhteensä noin 100 %. Muiden arvosanojen osuudet ovat niin vähäiset, että ne voidaan jättää huomiotta. Arvosanojen painotettu keskiarvo on
$0{,}45 \cdot 10 + 0{,}46 \cdot 9 + 0{,}07 \cdot 8 + 0{,}02 \cdot 7 = 9{,}34$
eli noin 9+.

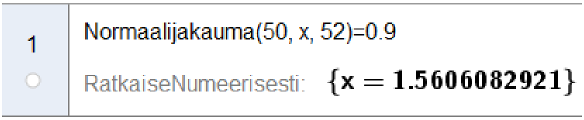
b) Jos esimerkiksi 99 % kuljettajista arvioi arvosanakseen 10 ja loput 1 % arvosanakseen 9, keskiarvo on $0{,}99 \cdot 10 + 0{,}01 \cdot 9 = 9{,}99$. Tällöin 99 % kuljettajista on antanut itselleen keskiarvoa 9,99 paremman arvosanan 10.

1037. **a)** Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa mittaustuloksia. Tällöin $X \sim \mathrm{N}(50, \sigma)$ tuntemattomalla keskihajonnalla σ.

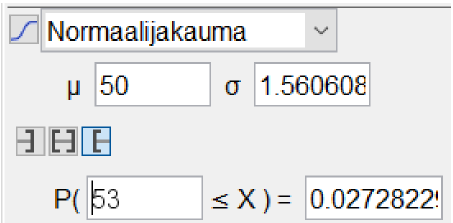
Koska $\mathrm{P}(48 \leq X \leq 52) = 0{,}80$, symmetrian vuoksi $\mathrm{P}(X \leq 52) = 0{,}90$.



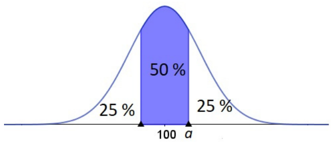
Tämän perusteella ohjelman avulla saadaan keskihajonnaksi $\sigma = 1{,}560\ldots$



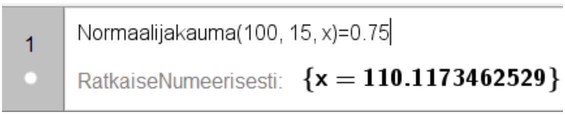
Nyt ohjelman avulla saadaan $\mathrm{P}(X > 53) = 0{,}0272\ldots \approx 0{,}03$.



b) Olkoon $X \sim \mathrm{N}(100, 15)$. Etsitään a, jolle $\mathrm{P}(X \leq a) = 0{,}50 + 0{,}25 = 0{,}75$.



Ohjelman avulla saadaan $a = 110{,}117\ldots$



Tarkistetaan, ovatko rajat 90 ja 110 vai 89 ja 111.
$\mathrm{P}(90 \leq X \leq 110) = 0{,}49\ldots < 0{,}5$
$\mathrm{P}(89 \leq X \leq 111) = 0{,}53\ldots > 0{,}5$

Kysytty kokonaislukuväli on siis [89, 111].

1038. Tapahtuma "$X = 0$" on sama kuin "molemmat nostetut pallot ovat valkoisia". Jos ensimmäinen nostettu pallo on valkoinen, jäljellä on neljä palloa, joista yksi on valkoinen.

Yleisen kertolaskusäännön mukaan $\mathrm{P}(X = 0) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$

Yksi musta pallo voidaan saada nostamalla ensin valkoinen ja sitten musta, tai ensin musta ja sitten valkoinen. Nämä tapahtumat ovat erilliset, joten

$$\mathrm{P}(X = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Todennäköisyys, että molemmat nostetut pallot ovat mustia, on

$$\mathrm{P}(X = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{10} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} = 1{,}2.$$

1039. **a)** Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla. Vektoreiden $a\overline{i}+b\overline{j}$ ja $2\overline{i}-\overline{j}$ pistetulo on $2a-b$.

$$2a-b=0$$
$$2a=b$$

Nopanheitossa mahdolliset silmäluvut ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Alkeistapauksia eli silmälukupareja (a, b) on $6 \cdot 6 = 36$. Silmälukupareista (a, b) ehdon $2a = b$ toteuttavat parit (1, 2), (2, 4) ja (3, 6). Suotuisia alkeistapauksia on siis kolme, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

b) Vektorit ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun toinen saadaan kertomalla toinen jollain luvulla $t \neq 0$.

$$a\overline{i}+b\overline{j}=t(3\overline{i}+2\overline{j})$$
$$a\overline{i}+b\overline{j}=3t\overline{i}+2t\overline{j}$$

Koska kantavektorit $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ ovat erisuuntaiset, yhtälö toteutuu vain, kun $a = 3t$ ja $b = 2t$. Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan $t=\frac{b}{2}$, joka voidaan sijoittaa ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan
$a=3\cdot\frac{b}{2}=\frac{3}{2}b.$
Tämän yhtälön toteuttavat silmälukupareista (a, b) vain parit (3, 2) ja (6, 4). Niinpä kysytty todennäköisyys on $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

1040. Ennen uudistusta 7 numeron lottorivejä oli $\binom{39}{7}$ erilaista.

Sellaisia 7 numeron rivejä, joissa oli 6 seitsemästä varsinaisesta numerosta ja 1 kahdesta lisänumerosta, oli tuloperiaatteen mukaan $\binom{7}{6}\binom{2}{1}=14$ erilaista.

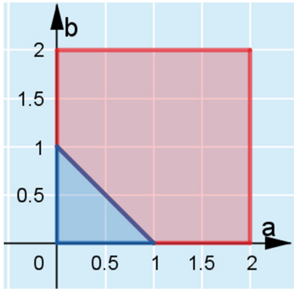
Niinpä todennäköisyys, että pelaajan täyttämässä 7 numeron rivissä oli oikein 6 varsinaista ja yksi lisänumero, oli ennen uudistusta

$$\frac{\binom{7}{6}\binom{2}{1}}{\binom{39}{7}}=\frac{14}{15380937}=0{,}000000910...\approx 9{,}1\cdot 10^{-7}.$$

Uudistuksen jälkeen 7 numeron lottorivejä on $\binom{40}{7}$ erilaista. Sellaisia 7 numeron rivejä, joissa on 6 seitsemästä varsinaisesta numerosta ja lisänumero, on tuloperiaatteen mukaan $\binom{7}{6}\binom{1}{1}=7$ erilaista. Näin ollen todennäköisyys, että pelaajan täyttämässä 7 numeron rivissä on oikein 6 varsinaista ja yksi lisänumero, on uudistuksen jälkeen

$$\frac{\binom{7}{6}\binom{1}{1}}{\binom{40}{7}}=\frac{7}{18643560}=0{,}000000375...\approx 3{,}8\cdot 10^{-7}.$$

1041. Alkeistapauksia ovat lukuparit (a, b), joissa $0 \leq a \leq 2$ ja $0 \leq b \leq 2$. Kaikki alkeistapaukset muodostavat neliön, jonka sivun pituus on kaksi ja pinta-ala $2^2 = 4$.



Suotuisa alue on se osa neliötä, jossa $\lg(a + b) > 0$ eli $a + b > 1$ eli $b > -a + 1$.

Suotuisan alueen, joka kuvaan on merkitty punaisella, pinta-ala saadaan vähentämällä koko neliön pinta-alasta sen alueen pinta-ala, jossa $b \leq -a + 1$. Tämä alue on kolmio, jonka pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Kysytty todennäköisyys on siten $\frac{4 - \frac{1}{2}}{4} = \frac{7}{8}$.

1042. **a)** Lukujono on aritmeettinen, jos sen kahden peräkkäisen jäsenen erotus on vakio. Nopanheitossa mahdolliset silmäluvut ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Lukujonoista (a, b, c) aidosti kasvavia ja aritmeettisia ovat jonot (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5) ja (4, 5, 6), joissa peräkkäisten jäsenten erotus on yksi, sekä jonot (1, 3, 5) ja (2, 4, 6), joissa peräkkäisten jäsenten erotus on kaksi, yhteensä kuusi jonoa.

Lukujonoja (a, b, c) on tuloperiaatteen mukaan $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ erilaista, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

b) Lukujono on geometrinen, jos sen kahden peräkkäisen jäsenen suhde on vakio. Lukujonoista (a, b, c) geometrisia ovat vakiojonot (1, 1, 1), (2, 2, 2), …, (5, 5, 5) ja (6, 6, 6), joissa peräkkäisten jäsenten suhde on yksi; jono (1, 2, 4), jossa peräkkäisten jäsenten suhde on kaksi; sekä jono (4, 2, 1), jossa peräkkäisten jäsenten suhde on puoli; yhteensä kahdeksan jonoa.

Kysytty todennäköisyys on siksi $\frac{8}{216} = \frac{1}{27}$.

1043. Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa haastattelun kestoa minuutteina. Tällöin $X \sim \mathrm{N}(15, \sigma)$ tuntemattomalla keskihajonnalla σ.

Ehdon $\mathrm{P}(X \leq 18) = 0{,}95$ perusteella löydetään ohjelman avulla keskihajonnaksi $\sigma = 1{,}8238\ldots$

1	Normaalijakauma(15, x, 18)=0.95
	RatkaiseNumeerisesti: $\{x = 1.8238704957\}$

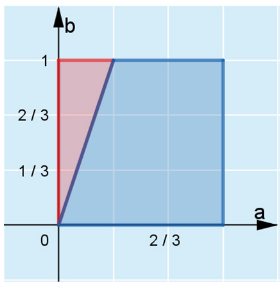
Keskihajonnalla on sama yksikkö (minuutteja) kuin haastattelun kestolla. Muutetaan desimaaliosa sekunneiksi: $0{,}8238\ldots \cdot 60 = 49{,}4\ldots$

Keskihajonnan kasvaessa kasvaa todennäköisyys saada kaukana odotusarvosta olevia arvoja. Keskihajonnan pitäisi siis olla korkeintaan 1 minuutti 50 sekuntia.

1044. Suoran $ax - by = 0$ kulmakerroin nähdään ratkaistusta muodosta $y = \frac{a}{b}x$ ja on siis $\frac{a}{b}$.

Alkeistapauksia ovat lukuparit (a, b), joissa $0 \leq a \leq 1$ ja $0 \leq b \leq 1$. Kaikki alkeistapaukset muodostavat neliön, jonka sivun pituus on yksi ja pinta-ala $1 \cdot 1 = 1$.

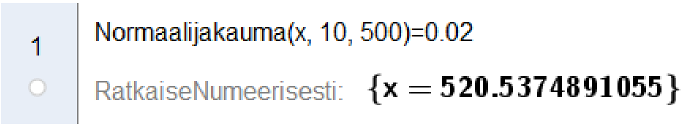
Suotuisa alue on se osa neliötä, jossa $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{3}$ eli $b \geq 3a$. Tämä alue on kolmio, jonka pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$.



Kysytty todennäköisyys on $\frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$.

1045. Olkoon X kahvin määrä (grammoina), jolloin $X \sim \mathrm{N}(\mu, 10)$ tuntemattomalle odotusarvolle μ. Odotusarvo tulisi määrätä niin, että $\mathrm{P}(X < 500) \leq 0{,}02$.

Ohjelman avulla saadaan
$\mu = 520{,}537\ldots \approx 521$ (grammaa).



Toinen tapa:
Normeerataan satunnaismuuttuja X ja kirjoitetaan ehto odotusarvolle standardinormaalijakauman kertymäfunktiota Φ käyttäen.

$$\begin{aligned}
&P(X < 500) \\
&= P\left(\frac{X-\mu}{10} < \frac{500-\mu}{10}\right) \\
&= P\left(Z < 50 - \frac{\mu}{10}\right) \\
&= P\left(Z \leq 50 - \frac{\mu}{10}\right) \\
&= \Phi\left(50 - \frac{\mu}{10}\right)
\end{aligned}$$

Näin ollen $\mathrm{P}(X < 500) \leq 0{,}02$ täsmälleen silloin, kun $\Phi\left(50 - \frac{\mu}{10}\right) \leq 0{,}02$

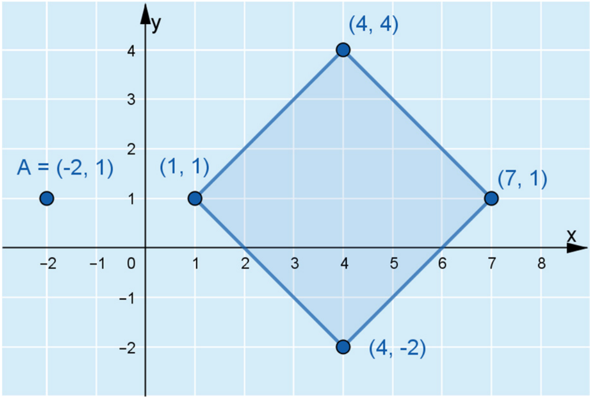
eli kun $\Phi\left(\frac{\mu}{10} - 50\right) \geq 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$ Taulukoitujen arvojen perusteella

näin on, kun $\frac{\mu}{10} - 50 \geq 2{,}0538.$ Ratkaistaan μ.

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{10} - 50 &\geq 2{,}0538 \\
\frac{\mu}{10} &\geq 52{,}0538 \quad \| \cdot 10 \\
\mu &\geq 520{,}538
\end{aligned}$$

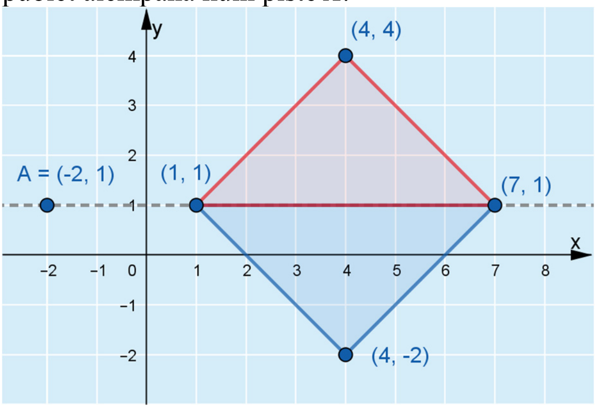
Odotusarvon tulee siis olla vähintään 521 grammaa.

1046. **a)** Piirretään mallikuva.



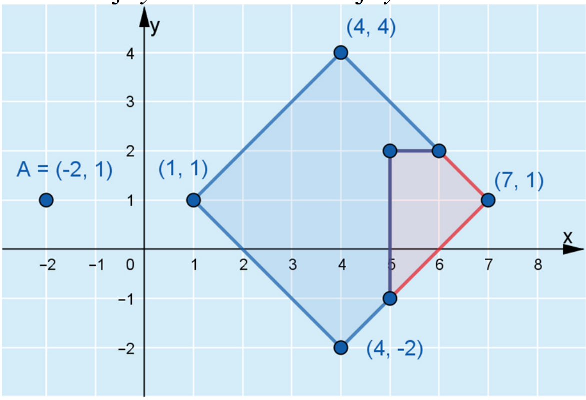
Koska koko neliö on pisteen A oikealla puolella, vektorissa $\overline{AP} = a\bar{i} + b\bar{j}$ kerroin a on välttämättä positiivinen eli P(a > 0) = 1.

b) Neliön pinta-alasta täsmälleen puolet on koordinaatistossa ylempänä, puolet alempana kuin piste A.

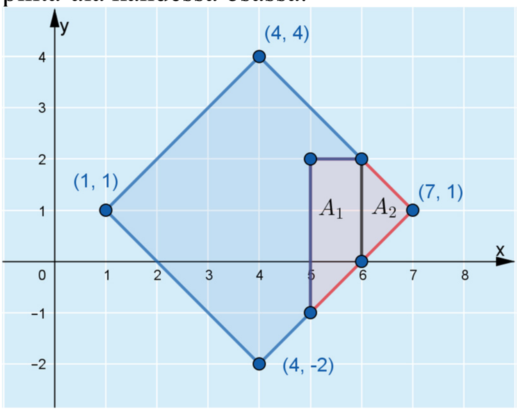


Niinpä $\mathrm{P}(b > 0) = \dfrac{1}{2}$.

c) Merkitään $P = (x, y)$, jolloin $a = x - (-2) = x + 2$ ja $b = y - 1$. Tapahtumalle "$a > 7$ ja $b < 1$" suotuisa alue on se osa neliötä, jossa $x + 2 > 7$ ja $y - 1 > 1$ eli $x > 5$ ja $y < 2$.



Jaetaan suotuisa alue puolisuunnikkaaksi ja kolmioksi ja lasketaan sen pinta-ala kahdessa osassa.



$$A_1 = \frac{2+3}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$$

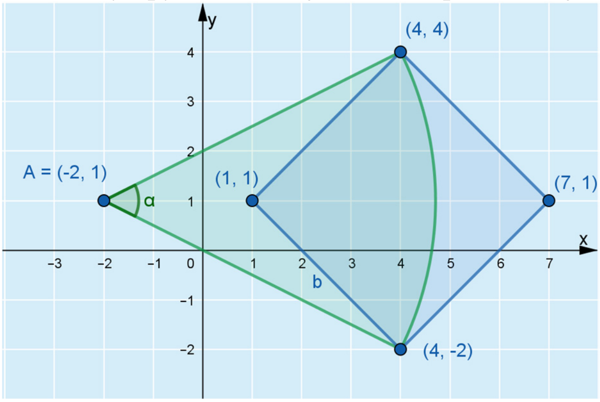
$$A_2 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

Suotuisan alueen pinta-ala on $A_1 + A_2 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$.

Koko neliön pinta-ala on 18.

Siis $\mathrm{P}(a > 7 \text{ ja } b < 1) = \frac{\frac{7}{2}}{18} = \frac{7}{36}$.

d) Tapahtumalle $\left|\overline{AP}\right| < \sqrt{45}$ suotuisa alue on se osa neliötä, joka jää sellaisen ympyrän sisään, jonka keskipiste on A ja säde $\sqrt{45}$.



Pisteiden $A = (-2, 1)$ ja $(4, 4)$ välinen etäisyys on $\sqrt{(4-(-2))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{45}$, samoin pisteiden A ja $(4, -2)$ välinen etäisyys.

Niinpä suotuisan alueen pinta-ala saadaan vähentämällä kuvassa näkyvän sektorin pinta-alasta nuolimaisen nelikulmion pinta-ala.

Määritetään sektorin pinta-ala. Sitä varten tarvitaan keskuskulma α. Kulma α on pisteiden $(-2, 1)$ ja $(4, -2)$ sekä pisteiden $(-2, 1)$ ja $(4, 4)$ kautta kulkevien suorien välinen kulma.

$$k_1 = \frac{-2-1}{4-(-2)} = -\frac{1}{2}$$

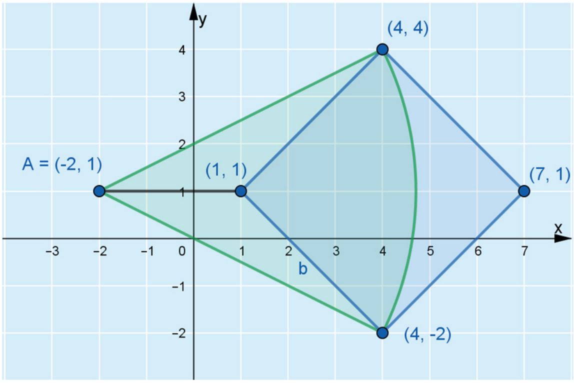
$$k_2 = \frac{4-1}{4-(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1 + (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2}}\right| = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = 53{,}1\ldots°$$

$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot (\sqrt{45})^2 = 20{,}8\ldots$$

Jaetaan nuolimainen nelikulmio kahdeksi kolmioksi.



Kolmiot ovat yhtenevät. Jos kannaksi ajatellaan pisteiden (−2, 1) ja (1, 1) välinen 3:n pituinen jana, niin niiden korkeus on 3.

$$A_{\text{kolmiot}} = 2 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} = 9$$

Kysytty todennäköisyys on siis

$$\frac{20,8... - 9}{18} = 0,659... \approx 0,66.$$

1047. Alkeistapauksia ovat lukuparit (p, q), joissa luvut p ja q täyttävät ehdot $|p| \le 1$ ja $|q| \le 1$ eli ehdot $-1 \le p \le 1$ ja $-1 \le q \le 1$. Nämä lukuparit muodostavat neliön, jonka sivun pituus on 2.

Yhtälöllä $x^2 + px + q = 0$ on kaksi ratkaisua eli juurta, jos diskriminantti $D = p^2 - 4q > 0$ eli jos $q < \frac{1}{4}p^2$.

Juuret ovat tällöin $x_1 = \dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ ja $x_2 = \dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

Molemmat juuret ovat positiivisia täsmälleen silloin, kun juurista pienempi on positiivinen eli kun $x_1 > 0$.

Jos $p \ge 0$, niin $-p \le 0$. Koska neliöjuuren arvo on aina positiivinen tai nolla, niin tällöin $x_1 = \dfrac{-\overbrace{p}^{\ge 0}-\overbrace{\sqrt{p^2-4q}}^{\ge 0}}{2} \le 0$.

On siis oltava $p < 0$.

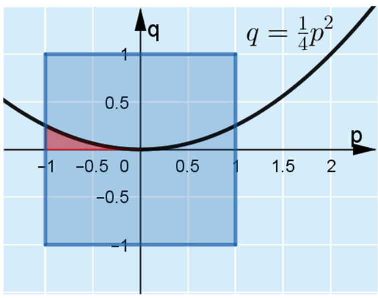
Jos nyt $q \le 0$, niin $-4q \ge 0$, jolloin $p^2 - 4q \ge p^2$. Tällöin

$$x_1 = \frac{-p-\overbrace{\sqrt{p^2-4q}}^{\ge |p|}}{2} \le 0.$$

On siis oltava $p < 0$ ja $q > 0$. Tällöin $x_1 = \dfrac{\overbrace{-p}^{=|p|}-\overbrace{\sqrt{p^2-4q}}^{<|p|}}{2} > 0$.

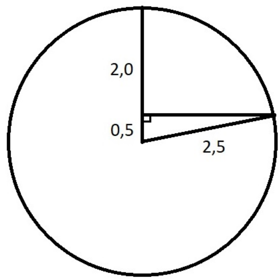
Tapahtuma "molemmat juuret positiivisia" tarkoittaa siis sitä, että $p < 0$, $q > 0$ ja $q < \frac{1}{4}p^2$.

Suotuisa alue neliötä on siis kuvassa käyrän $q = \frac{1}{4}p^2$ ja vaaka-akselin väliin jäävä alue pystyakselin vasemmalla puolella.



Tämän alueen pinta-ala on $\int_{-1}^{0} \frac{1}{4} p^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12}$. Koko neliön pinta-ala on $2^2 = 4$, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{\frac{1}{12}}{4} = \frac{1}{48}$.

1048. Lasketaan ensin, kuinka suuri on alue, jolle pistetty neula osuu yhteen palloon. Koska pallon säde on 2,5 cm, pallon poikkileikkauskuvassa suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 2,5 cm ja pystykateetti 2,5 cm − 2,0 cm = 0,5 cm.



Pythagoraan lauseen mukaan toinen kateetti on $\sqrt{2,5^2 - 0,5^2} = \sqrt{6} \approx 2,449...$ (cm).

Alue, jolle pistetty neula osuu yhteen palloon, on ympyrä, jonka pinta-ala on $\pi\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6\pi$ (cm^2).

Palloja on 25 ja laatikon kannen pinta-ala on 25 · 25 cm^2, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{25 \cdot 6\pi}{25 \cdot 25} = \frac{6\pi}{25} = 0,7539... \approx 0,75$.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

1049. Kaksitoista henkilöä voi muodostaa 12! erilaista jonoa.

Kahdentoista paikan jonossa sellaisia paikkapareja, joissa paikat ovat peräkkäin, on 11 erilaista;
XXOOOOOOOOOO
OXXOOOOOOOOO
…
OOOOOOOOOOXX

sellaisia, joissa paikkojen välissä on yksi paikka, on 10
XOXOOOOOOOOO
OXOXOOOOOOOO
…
OOOOOOOOOXOX

ja sellaisia, joissa välissä on kaksi paikkaa, 9
XOOXOOOOOOOO
OXOOXOOOOOOO
…
OOOOOOOOXOOX

Henkilöt A ja B voivat olla näillä kahdella heille valitulla paikalla kahdessa järjestyksessä, ja muut 10 henkilöä muilla paikoilla 10! eri järjestyksessä.

Tuloperiaatteen mukaan suotuisia jonoja on
$(11 + 10 + 9) \cdot 2! \cdot 10! = 30 \cdot 2! \cdot 10!$ erilaista.

Kysytty todennäköisyys on $\dfrac{30 \cdot 2! \cdot 10!}{12!} = \dfrac{5}{11}$.

1050. Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa kivien oston ja hionnan vaikutusta kultasepän varallisuuteen. Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo kummassakin tilanteessa.

1) Kultaseppä ostaa yhden suuren jalokiven ja maksaa siitä 12 000 mk:
- jos hionta epäonnistuu, kivi on arvoton ja hankintahinnan lisäksi myös hiontakulu 1000 mk jää tappioksi eli $X = 0 - 12\,000 - 1000 = -13\,000$ (mk)
- jos hionta onnistuu, kiven arvo on $1{,}3 \cdot 12\,000$ mk $= 15\,600$ mk ja siten $X = 15\,600 - 12\,000 - 1000 = 2\,600$ (mk)

Hionnan onnistumisen todennäköisyys on 0,9, joten odotusarvo tilanteessa 1 on
$EX = 0{,}1 \cdot (-13000) + 0{,}9 \cdot 2\,600 = 1040$ (mk).

2) Kultaseppä ostaa kaksi pienempää jalokiveä ja maksaa niistä yhteensä 12 000 mk:
- jos molempien kivien hionta epäonnistuu, kivet ovat arvottomia ja hankintahinnan lisäksi myös niiden yhteenlaskettu hiontakulu $2 \cdot 800$ m $= 1600$ mk jää tappioksi, eli $X = 0 - 12\,000 - 1600 = -13\,600$ (mk)
- jos yhden kiven hionta onnistuu ja toisen epäonnistuu, kivien yhteenlaskettu arvo on $0 + 1{,}3 \cdot 6000 = 7800$ (mk) ja siksi $X = 7800 - 12\,000 - 1600 = -5800$ (mk)
- jos molempien kivien hionta onnistuu, kivien yhteenlaskettu arvo on $2 \cdot 1{,}3 \cdot 6000 = 15\,600$ (mk) ja siksi $X = 15\,600 - 12\,000 - 1600 = 2\,000$ (mk)

Lasketaan näiden tapahtumien todennäköisyydet ja X:n odotusarvo tilanteessa 2.

P(kummankin kiven hionta epäonnistuu) $= 0{,}08 \cdot 0{,}08 = 0{,}0064$
P(yhden kiven hionta epäonnistuu ja toisen onnistuu)
$= 0{,}08 \cdot 0{,}92 + 0{,}92 \cdot 0{,}08 = 0{,}1472$
P(kummankin kiven hionta onnistuu) $= 0{,}92 \cdot 0{,}92 = 0{,}8464$

$$EX = 0{,}0064 \cdot (-13600) + 0{,}1472 \cdot (-5800) + 0{,}8464 \cdot 2\,000 = 752 \text{ (mk)}.$$

Tilanteessa 1 odotusarvo on suurempi (1040 > 752), joten kultasepän kannattaa ostaa yksi suuri kivi.

Toinen tapa:
Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa kultasepän ostamien kivien yhteisarvoa kaupan ja hionnan jälkeen, kun myös hiontakulut on huomioitu. Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo kummassakin tilanteessa.

1) Kultaseppä ostaa yhden suuren jalokiven:
- jos hionta epäonnistuu, kivi on arvoton ja hiontakulu 1000 mk jää tappioksi eli $X = -1000$ (mk)
- jos hionta onnistuu, kiven arvo on $1{,}3 \cdot 12\,000$ mk $= 15\,600$ mk ja siten $X = 15\,600 - 1000 = 14\,600$ (mk)

Hionnan onnistumisen todennäköisyys on 0,9, joten odotusarvo tilanteessa 1 on
$EX = 0{,}1 \cdot (-1000) + 0{,}9 \cdot 14\,600 = 13\,040$ (mk).

2) Kultaseppä ostaa kaksi pienempää jalokiveä:
- jos molempien kivien hionta epäonnistuu, yhteenlaskettu hiontakulu $2 \cdot 800$ m $= 1600$ mk jää tappioksi eli $X = -1600$ (mk)
- jos yhden kiven hionta onnistuu ja toisen epäonnistuu, kivien yhteenlaskettu arvo on $0 + 1{,}3 \cdot 6000 = 7800$ (mk) ja siksi $X = 7800 - 1600 = 6200$ (mk)
- jos molempien kivien hionta onnistuu, kivien yhteenlaskettu arvo on $2 \cdot 1{,}3 \cdot 6000 = 15\,600$ (mk) ja siksi $X = 15\,600 - 1600 = 14\,000$ (mk)

Lasketaan näiden tapahtumien todennäköisyydet ja X:n odotusarvo tilanteessa 2.

P(kummankin kiven hionta epäonnistuu) $= 0{,}08 \cdot 0{,}08 = 0{,}0064$
P(yhden kiven hionta epäonnistuu ja toisen onnistuu)
$= 0{,}08 \cdot 0{,}92 + 0{,}92 \cdot 0{,}08 = 0{,}1472$
P(kummankin kiven hionta onnistuu) $= 0{,}92 \cdot 0{,}92 = 0{,}8464$

$EX = 0{,}0064 \cdot (-1600) + 0{,}1472 \cdot 6200 + 0{,}8464 \cdot 14\,000$
$= 12\,752$ (mk).

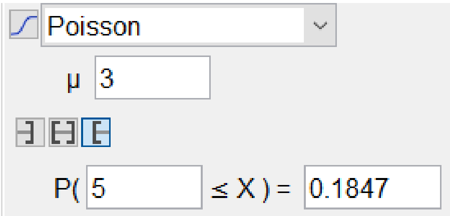
Tilanteessa 1 odotusarvo on suurempi ($13040 > 12752$), joten kultasepän kannattaa ostaa yksi suuri kivi.

Kolmas tapa:
Jos kultaseppä ostaa yhden suuren jalokiven, sen hionta maksaa 1000 mk.
Hionta onnistuu todennäköisyydellä 0,9 ja onnistuneesti hiotun kiven arvo on $1{,}3 \cdot 12000$ mk = 15600 mk.
Varallisuus koostuu kivestä mutta sitä rasittaa hiontakulu 1000 mk, joten varallisuuden odotusarvo on
$0{,}1 \cdot 0 + 0{,}9 \cdot 15600 - 1000 = 13040$ (mk).

Jos kultaseppä ostaa kaksi pienempää jalokiveä, niiden hionta maksaa yhteensä $2 \cdot 800$ mk = 1600 mk.
Kumpikin hionta onnistuu todennäköisyydellä 0,92 ja yhden onnistuneesti hiotun kiven arvo on $1{,}3 \cdot 6000$ mk = 7800 mk.
Varallisuus koostuu kummastakin kivestä ja sitä rasittaa hiontakulu 1600 mk, joten varallisuuden odotusarvo on
$(0{,}1 \cdot 0 + 0{,}92 \cdot 7800) + (0{,}1 \cdot 0 + 0{,}92 \cdot 7800) - 1600 = 12752$ (mk).

Odotusarvo on ensimmäisessä tilanteessa suurempi, joten kultasepän kannattaa ostaa yksi suuri kivi.

1051. Todennäköisyyslaskurilla saadaan $P(X \geq 5) = 0{,}184\ldots \approx 0{,}18$, kun X noudattaa Poissonin jakaumaa parametrilla 3.



Toinen tapa:
Tapahtuman ”keskukseen tulee minuutissa ainakin 5 puhelua” komplementti on ”keskukseen tulee minuutissa korkeintaan neljä puhelua”. Lasketaan komplementin todennäköisyys.

P(nolla tai yksi tai kaksi tai kolme tai neljä puhelua)

$$
\begin{aligned}
&= p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \\
&= \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 \cdot e^{-3}}{3!} + \frac{3^4 \cdot e^{-3}}{4!} \\
&= \frac{131}{8e^3} \\
&= 0{,}8152\ldots
\end{aligned}
$$

Nyt saadaan
P(vähintään viisi puhelua)
= 1 − P(korkeintaan neljä puhelua)
$= 1 - 0{,}8152\ldots$
$= 0{,}1847\ldots$
$\approx 0{,}18.$

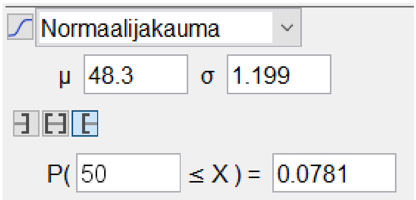
1052. Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa pussissa olevien makeisten yhteispainoa (grammoina). Makeisten lukumäärä on 23, ja yhden makeisen painoa kuvaava satunnaismuuttuja on normaalisti jakautunut odotusarvolla 2,1 (grammaa) ja keskihajonnalla 0,25 (grammaa).

Tehtävänannon alkuosan merkinnöillä siis $n = 23$ ja lisäksi $\mu_i = 2{,}1$ ja $\sigma_i = 0{,}25$ jolloin $\sigma_i^2 = 0{,}25^2$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, 23$.

Tehtävässä annetun tiedon perusteella pussissa olevien 23 makeisen yhteispaino X on normaalisti jakautunut odotusarvona $\mu = 23 \cdot 2{,}1 = 48{,}3$. Keskihajontojen neliöiden summa on nyt $23 \cdot 0{,}25^2$, joten keskihajonta on

$$\sigma = \sqrt{23 \cdot 0{,}25^2} = \frac{\sqrt{23}}{4} \approx 1{,}198...$$

Ohjelman avulla saadaan $P(X \geq 50) = 0{,}0781\ldots \approx 0{,}08$.



(Huom. keskihajonnaksi on syötetty luku $\frac{\sqrt{23}}{4}$, ohjelma ei osaa näyttää tässä muuta kuin desimaaleja, vaikka laskeekin tarkemmilla arvoilla.)