# 1 Luvut ja laskutoimitukset

## 1.1 Perusteita

### LUVUN 1.1 YDINTEHTÄVÄT

**101.** **a)** $2\frac{1}{3}-1\frac{5}{7}= {}^{7)}\frac{7}{3}- {}^{3)}\frac{12}{7}=\frac{49}{21}-\frac{36}{21}=\frac{13}{21}$

**b)**

$$3\frac{1}{3}:1\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}\cdot\left(-1\frac{5}{9}\right)$$
$$=\frac{10}{3}:\frac{5}{3}+\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{14}{9}\right)$$
$$=\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}-\frac{5}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{14}^{7}}{9}$$
$$=2-\frac{35}{9}$$
$$=\frac{18}{9}-\frac{35}{9}=-\frac{17}{9}=-1\frac{8}{9}$$

**c)** $3\cdot\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}}=3\cdot(1\frac{2}{3}:1\frac{1}{2})=3\cdot(\frac{5}{3}:\frac{3}{2})=3\cdot(\frac{5}{3}:\frac{3}{2})=3\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$

**d)** $\frac{3a}{4}+ {}^{2)}\frac{a}{2}=\frac{3a}{4}+\frac{2a}{4}=\frac{5a}{4}$

**e)**

$$
\begin{aligned}
&\frac{4a}{5} : \frac{a}{4} - \frac{a}{2}(a-1) \\
&= \frac{4\cancel{a}}{5} \cdot \frac{4}{\cancel{a}} - \frac{a(a-1)}{2} \\
&= {}^{2)}\frac{16}{5} - {}^{5)}\frac{a(a-1)}{2} \\
&= \frac{32}{10} - \frac{5a(a-1)}{10} \\
&= \frac{32-5a^2+5a}{10} \\
&= \frac{-5a^2+5a+32}{10} \\
&= \frac{-5a^2}{10} + \frac{5a}{10} + \frac{32}{10} \\
&= -\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} + \frac{16}{5} \quad (a \neq 0)
\end{aligned}
$$

**f)** $-a \cdot \left(\frac{2a-3}{3}\right) : 3 = \frac{-a(2a-3)}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-2a^2+3a}{9} = -\frac{2a^2}{9} + \frac{a}{3}$

**102.** **a)** Vastaluku on $-(\sqrt{3}-7) = -\sqrt{3}+7 = 7-\sqrt{3}$ .

Käänteisluku on ${}^{\sqrt{3}+7)}\frac{1}{\sqrt{3}-7} = \frac{\sqrt{3}+7}{(\sqrt{3}-7)(\sqrt{3}+7)} = \frac{\sqrt{3}+7}{3-49} = -\frac{\sqrt{3}+7}{46}$ .

**b)** Vastaluku on $-(e-1) = -e+1 = 1-e$.

Käänteisluku on $\frac{1}{e-1}$

**c)** Vastaluku on $-(-a+b) = a-b$.

Käänteisluku on $\frac{1}{-a+b}$ .

**103.** **a)** $4\cdot 2^{-3}-2^{-1}+2^{0}=4\cdot\frac{1}{2^{3}}-\frac{1}{2}+1=\frac{4}{8}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=1$

**b)** $3^{0}+((-1)^{3})^{7}=1+(-1)^{21}=1-1=0$

**c)** $\frac{2\cdot 3^{2}}{27}-\frac{1}{3^{2}}=\frac{2\cdot 9}{27}^{(3}-\frac{1}{9}=\frac{2\cdot 3}{9}-\frac{1}{9}=\frac{6}{9}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

**d)**

$$
\begin{aligned}
&7^{4}\cdot 7^{-4}-7^{-2}+(-7)^{2}\\
&=7^{4-4}-\frac{1}{7^{2}}+49\\
&=7^{0}-\frac{1}{49}+49\\
&=1-\frac{1}{49}+49\\
&=\frac{48}{49}+49=49\frac{48}{49}
\end{aligned}
$$

**e)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}-\frac{2^{4}}{3^{2}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2}-\frac{16}{9}=\frac{16}{9}-\frac{16}{9}=0$

**f)**

$$
\begin{aligned}
&(5\cdot 10^{-4})\cdot(3\cdot 10^{6})\\
&=5\cdot 10^{-4}\cdot 3\cdot 10^{6}\\
&=5\cdot 3\cdot 10^{-4}\cdot 10^{6}\\
&=15\cdot 10^{-4+6}\\
&=15\cdot 10^{2}=1500
\end{aligned}
$$

**104.** **a)** $1{,}03\cdot 10^{-5}=0{,}0000103$

**b)** $2{,}40\cdot 10^{7}=24\,000\,000$

**105.** **a)** Luvut ovat toistensa käänteislukuja, jos niiden tulo on 1.

$$\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{6}{6}=1$$

Luvut ovat toistensa käänteislukuja.

**b)** Luvut ovat toistensa vastalukuja, jos niiden summa on 0 ja käänteislukuja, jos niiden tulo on 1.

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=2+2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=4\neq 0$$

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$$

Luvut ovat toistensa käänteislukuja mutta eivät vastalukuja.

**106.** $(1+1)\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})+...+(1+\frac{1}{99})$

$$=\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot...\cdot\frac{\cancel{99}}{\cancel{98}}\cdot\frac{100}{\cancel{99}}=1\cdot 100=100$$

**107.** **a)** $(a+3)^2-(a-3)^2$

$$=a^2+6a+9-(a^2-6a+9)$$

$$=a^2+6a+9-a^2+6a-9$$

$$=12a$$

**b)** $((a+3)(a-3))^2=(a^2-9)^2=a^4-18a^2+81$

**c)**

$$2+2(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)$$

$$=2+2(\sqrt{a}^2-1^2)$$

$$=2+2(a-1)$$

$$=2+2a-2=2a$$

**108.** **a)** $\dfrac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{2}}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}\overset{\sqrt{2})}{=}\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

**b)** $8^{\frac{2}{3}}-9^{\frac{3}{2}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}-(3^2)^{\frac{3}{2}}=2^{3\cdot\frac{2}{3}}-3^{2\cdot\frac{3}{2}}=2^2-3^3=4-27=-23$

**c)** $\sqrt[4]{\sqrt{16}}=\sqrt[4]{4}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{2\cdot\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

**109.** **a)** $\dfrac{a^2}{3}-\left(\dfrac{-a}{3}\right)^2\overset{3)}{=}\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{a^2}{9}=\dfrac{3a^2}{9}-\dfrac{a^2}{9}=\dfrac{2a^2}{9}$

**b)**

$$\begin{aligned}&\frac{a^2-b^2}{a-b}+\frac{a^2-b^2}{a+b}\\&=\frac{(a+b)\cancel{(a-b)}}{\cancel{a-b}}+\frac{\cancel{(a+b)}(a-b)}{\cancel{a+b}}\\&=(a+b)+(a-b)\\&=2a\end{aligned}$$

**c)**

$$\begin{aligned}&(a+b)^2\cdot(a-b)^2-(a^4+b^4)\\&=((a+b)(a-b))^2-(a^4+b^4)\\&=(a^2-b^2)^2-(a^4+b^4)\\&=a^4-2a^2b^2+b^4-a^4-b^4\\&=-2a^2b^2\end{aligned}$$

# 1.2 Prosenttilaskuja

## LUVUN 1.2 YDINTEHTÄVÄT

**110.** **a)** 100 % + 15 % = 115 %
$1{,}15a$

**b)** 100 % – 35 % = 65 %
$0{,}65a$

**c)** 100 % + 230 % = 330 %
$3{,}3a$

**d)** 100 % – 50 % = 50 %
$0{,}5 \cdot 0{,}5a = 0{,}25a$

**111.** Merkitään verotonta hintaa kirjaimella $x$.
$1{,}24x = 389{,}90 \;||: 1{,}24$
$x = 314{,}435\ldots$

Veroton hinta on 314,44 €.
Hinnassa on veroa 389,90 € – 314,44 € = 75,46 €.

**112.** Merkitään työntekijöiden määrää vuoden alussa kirjaimella $x$.
$1{,}09x = 145 \;||: 1{,}09$
$x = 133{,}027\ldots$

Yrityksessä oli vuoden alussa 133 työntekijää.

**113.** Liuosta on yhteensä 500 g + 300 g = 800 g.

6-prosenttisessa liuoksessa on suolaa 0,06 · 500 g = 30 g.
5-prosenttisessa liuoksessa on suolaa 0,05 · 300 g = 15 g.
Suolaa on yhteensä 30 g + 15 g = 45 g.

Lasketaan koko liuoksen suolapitoisuus.

$$\frac{45g}{800g} = 0,05625$$

Syntyvän liuoksen suolapitoisuus on 5,6 %.

**114.** Merkitään matkustajamäärää vuoden alussa kirjaimella $a$.
Helmikuun alussa matkustajamäärää oli $1,02a$.
Maaliskuun alussa matkustajamäärä oli $1,03 \cdot 1,02a$.
Huhtikuun alussa matkustajamäärä oli $1,04 \cdot 1,03 \cdot 1,02a = 1,092624a$.

Matkustajamäärä kasvoi yhteensä 9,3 %.

**115.** Merkitään osakkeen arvoa alussa kirjaimella $a$. Muutosten jälkeen osakkeen arvo on $1,12 \cdot 0,9a = 1,008a$.

Arvo nousi 0,8 %.

**116.**

| Väite | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kaavan numero | 3 | 5 | 2 | 6 | 1 | 4 |

# 1.3 Itseisarvon määritelmä ja ominaisuuksia

## LUVUN 1.3 YDINTEHTÄVÄT

**117.** **a)** Luku $1-\sqrt{2}$ on negatiivinen, koska $1=\sqrt{1}<\sqrt{2}$.

**b)** $\left|1-\sqrt{2}\right| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2} = \sqrt{2}-1$

**118.** **a)** $\left|\sqrt{5}-1\right| = \sqrt{5}-1 \quad (\sqrt{5} > \sqrt{1} = 1)$

**b)** $\left|3-\sqrt{10}\right| = -(3-\sqrt{10}) = \sqrt{10}-3 \quad (3=\sqrt{9}<\sqrt{10})$

**c)** $\left|6-2\ \ \right| = -(6-2\ \ ) = 2\ \ -6 \quad (\pi = 3{,}14... > 3\text{, joten } 2\pi > 6)$

**119.** **a)** $\left|\sqrt{3}+2\right| - \left|\sqrt{3}-2\right| = \sqrt{3}+2-(-(\sqrt{3}-2)) = \sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2 = 2\sqrt{3}$

**b)** $\dfrac{\left|1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{-(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 1$

**c)** $\left|\sqrt{5}-5\right| - \left|5-\sqrt{5}\right| = -(\sqrt{5}-5)-(5-\sqrt{5}) = -\sqrt{5}+5-5+\sqrt{5} = 0$

**120.** **a)** Epätosi. Luvun 0 itseisarvo on 0.

**b)** Epätosi. Jos esimerkiksi $a = -3$, $|-3 + 2| = 1$, mutta $-3 + 2 = -1$.

**c)** Tosi. Tämä on osa itseisarvon määritelmää.

**121.** **a)** $|\pi-2|+|5-\pi|=\pi-2+5-\pi=3$

**b)** $\left|\sqrt{3}+5\right|-\left|\sqrt{3}-5\right|=\sqrt{3}+5-(-(\sqrt{3}-5))=\sqrt{3}+5+\sqrt{3}-5=2\sqrt{3}$

**c)** $-\left|\sqrt{3}-1\right|+\left|-(\sqrt{3}-1)\right|=-(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)=-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=0$

**122.** **a)** $|a| = a$ , kun $a > 0$.

**b)** Kun $a \leq -1$, niin $1 + a \leq 0$, joten $|1 + a| = -(1 + a) = -1 - a$.

**c)** $|3a| = -3a$, kun $a < 0$.

**d)** Kun $a < 0$, niin $-a > 0$ ja $1 - a > 0$, joten $|1 - a| = 1 - a$.

**123.** **a)** Epätosi. Kun $a = -1$, $-1$ ei ole suurempi kuin $-(-1) = 1$.

**b)** Epätosi. Ei ole voimassa luvulle $a = 0$.

**c)** Tosi. Koska $a + 1 - a = 1 > 0$, niin $a + 1 \geq a$.

**d)** Epätosi. Negatiivisille luvuille $a$ väite ei ole voimassa, koska neliöjuuren arvo ei voi olla negatiivinen.

**e)** Epätosi. Kun $a = -2$, $-|-(-2)| = -2$, mutta $-(-2) = 2$.

**f)** Tosi. Tällainen luku on esimerkiksi $a = -0{,}5$.

**g)** Tosi. Tällainen luku on $a = 0$.

**h)** Tosi. Luku $a = 0$ on tällainen luku.

# Luvun 1 vahvistavat ja syventävät tehtävät

## VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

**124.** **a)** Pienin rationaaliluku on sellainen negatiivinen luku, jonka itseisarvo on suurin. Luku on negatiivinen ainoastaan silloin, kun $m = -1$. Itseisarvo $\left|\frac{m}{n}\right|$ on suurin, kun nimittäjä $n$ on pienin, eli $n = 2$. Pienin luku on $-\frac{1}{2}$.

Luvuista $m$ ja $n$ valitaan (positiiviset) luvut siten, että osoittaja $m$ on suurin mahdollinen ja nimittäjä $n$ pienin mahdollinen.

Suurin luku on $\frac{2}{2}=1$.

Huomautus:
Voidaan myös luetella kaikki mahdolliset osamäärät

$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ ja $1$,

ja valita niistä suurin ja pienin.

**b)** Luvun 1,5 käänteisluku on $\frac{1}{1{,}5}=1:\frac{3}{2}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ ja tämän vastaluku on $-\frac{2}{3}$. Luvun 1,5 vastaluku on $-1{,}5$ ja tämän käänteisluku on

$\frac{1}{-1{,}5}=1:(-\frac{3}{2})=-1\cdot\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$.

**125.** **a)** $${}^{x)}\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1-x}{x^2}=\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{1-x}{x^2}=\frac{x+1-1+x}{x^2}=\frac{2x}{x^2}^{(x}=\frac{2}{x},\ x\neq 0$$

**b)** $$\frac{1}{2a-a^2}\cdot\frac{a^2+2a}{2+a}=\frac{1}{\cancel{a}(2-a)}\cdot\frac{\cancel{a}(\cancel{a+2})}{\cancel{a+2}}=\frac{1}{2-a},\ a\neq 0,\ a\neq \pm 2$$

**126.** **a)** Lavennetaan luvut samannimisiksi.

$$^{35)}\frac{1}{2}=\frac{35}{70}$$

$$^{14)}\frac{3}{5}=\frac{42}{70}$$

$$^{10)}\frac{4}{7}=\frac{40}{70}$$

Suuruusjärjestys määräytyy osoittajien perusteella ja on $\frac{1}{2}<\frac{4}{7}<\frac{3}{5}$.

**b)** $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Koska $a > 0$ ja $b > 0$, epäyhtälön molemmat puolet ovat positiivisia ja epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$(\sqrt{a+b})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$a+b<a+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+b \qquad \|-a-b$$

$$0<2\sqrt{ab}$$

Oikealla puollella oleva lauseke on aina positiivinen, joten epäyhtälö aina tosi. Tällöin myös alkuperäinen epäyhtälö on aina tosi.

**127.** **a)** $\frac{8\cdot 2^3}{32}=\frac{2^3\cdot 2^3}{2^5}=\frac{2^6}{2^5}=2^{6-5}=2^1$

**b)** $2^6\cdot(-2)^8=2^6\cdot 2^8=2^{6+8}=2^{14}$

**c)** $\underbrace{4\cdot\underbrace{(-2)^3}_{<0}\cdot\underbrace{(-\frac{1}{2})^5}_{<0}}_{>0}=2^2\cdot 2^3\cdot(2^{-1})^5=2^2\cdot 2^3\cdot 2^{-5}=2^{2+3-5}=2^0$

**128.** $a=0{,}75b$

$$\frac{b}{a}=\frac{b}{0{,}75b}=1:0{,}75=1:\frac{3}{4}=\frac{4}{3}=1{,}333...$$

$b$ on noin 33% suurempi kuin $a$.

**129.** A-I: $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{4}=2$
B-II
C-I
D-III: Vähenee neljäsosan, joten jäljelle jää kolme neljäsosaa, eli 0,75$a$.
E-I: Vähenee neljäsosaan, joten jäljellä on neljäsosa, eli 0,25$a$.
F-II: Jos $a$ on negatiivinen, niin $-a$ on positiivinen.

**130.** Merkitään yöpymisen hintaa ennen sesongin alkamista kirjaimella $a$.
Sesongin alkaessa hinta on 1,08$a$.
Sesongin päätyttyä hinta on $0{,}9 \cdot 1{,}08a = 0{,}972a$.

$1 - 0{,}972 = 0{,}028$
Hinta on laskenut 2,8 %.

**131.**

$$
\begin{aligned}
&(a^2b^2 - a^4b^6):(ab - a^2b^3)\\
&= \frac{a^2b^2(1-a^2b^4)}{ab(1-ab^2)}\\
&= \frac{(ab)^{\cancel{2}}\cancel{(1-ab^2)}(1+ab^2)}{\cancel{ab}\cancel{(1-ab^2)}}\\
&= ab(1+ab^2)\\
&= ab + a^2b^3\\
&= a^2b^3 + ab
\end{aligned}
$$

$a = 10^6$ ja $b = 10^{-5}$

$$
\begin{aligned}
&(10^6)^2 \cdot (10^{-5})^3 + 10^6 \cdot 10^{-5}\\
&= 10^{12} \cdot 10^{-15} + 10^1\\
&= 10^{-3} + 10\\
&= 0{,}001 + 10\\
&= 10{,}001
\end{aligned}
$$

**132.** **a)** Luvut ovat toistensa vastalukuja, jos niiden summa on 0.

$(a - b) + (b - a) = a - b + b - a = 0.$

Luvut ovat toistensa vastalukuja.

**b)** Luvut ovat toistensa käänteislukuja, jos niiden tulo on 1.

$$\frac{\sqrt{a}}{b} \cdot \frac{b\sqrt{a}}{a} = \frac{b\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{ba} = \frac{ba}{ba} = 1$$

Luvut ovat toistensa käänteislukuja.

**133.**

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a}\sqrt{2}\sqrt{4}\sqrt{5}\sqrt{6} \\
&= \sqrt{a \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \\
&= \sqrt{a \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} \\
&= \sqrt{16 \cdot 5 \cdot 3 \cdot a} \\
&= \sqrt{16} \cdot \sqrt{5 \cdot 3 \cdot a} \\
&= 4\sqrt{5 \cdot 3 \cdot a}
\end{aligned}$$

Tulo on kokonaisluku, jos juurrettava eli $5 \cdot 3 \cdot a$ on jonkin kokonaisluvun neliö. Pienin mahdollinen $a$:n arvo on $5 \cdot 3 = 15$, koska tällöin $5 \cdot 3 \cdot a$ on $5^2 \cdot 3^2$. Pienin kokonaisluku on 15.

**134.** **a)**

$$^{2+\sqrt{2})}\frac{1}{\sqrt{2}} + {}^{\sqrt{2})}\frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2} = 1$$

**b)**

$$\sqrt{3\frac{3}{4}} : \sqrt{1\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{15}{4}} : \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 3}}{\sqrt{4}} : \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

**135.** **a)** $(\sqrt{a}+1)^2-a-1=a+2\sqrt{a}+1-a-1=2\sqrt{a}$

**b)**

$$
\begin{aligned}
&{}^{1+x)}\frac{x}{1-x}+{}^{1-x)}\frac{x}{1+x}\\
&=\frac{x(1+x)}{(1+x)(1-x)}+\frac{x(1-x)}{(1+x)(1-x)}\\
&=\frac{x+x^2+x-x^2}{1-x^2}\\
&=\frac{2x}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

**c)**

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{a-1}\cdot\left(\frac{1}{a}-a\right)\\
&=\frac{a}{a-1}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{a^2}{a}\right)\\
&=\frac{a}{a-1}\cdot\frac{1-a^2}{a}\\
&=\frac{\cancel{a}(\cancel{1-a})(1+a)}{-\underset{1}{(\cancel{1-a})}\cancel{a}}\\
&=\frac{1+a}{-1}\\
&=-1-a\\
&=-a-1
\end{aligned}
$$

**d)**

$$
\begin{aligned}
&{}^{\sqrt{5})}\frac{10}{\sqrt{5}}-{}^{\sqrt{5}+1}\frac{4}{\sqrt{5}-1}\\
&=\frac{10\sqrt{5}}{5}-\frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\\
&=\frac{10\sqrt{5}}{5}-\frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1}\\
&=2\sqrt{5}-\frac{\cancel{4}(\sqrt{5}+1)}{\cancel{4}}\\
&=2\sqrt{5}-(\sqrt{5}+1)\\
&=2\sqrt{5}-\sqrt{5}-1\\
&=\sqrt{5}-1
\end{aligned}
$$

**136.** **a)** $\sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

**b)** $\sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-32} = -\sqrt[3]{32} = -\sqrt[3]{2^5} = -2^{\frac{5}{3}} = -2^{1\frac{2}{3}} = -(2^1 \cdot 2^{\frac{2}{3}})$

$= -2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = -2\sqrt[3]{4}$

(Huomaa, että murtopotenssi on määritelty vain, kun kantaluku on positiivinen.)

**c)** $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 3^1 = 3$

**d)** $\dfrac{\sqrt{a^5}}{a} = \dfrac{a^{\frac{5}{2}}}{a} = a^{\frac{5}{2}-1} = a^{\frac{3}{2}} = a^{1\frac{1}{2}} = a\sqrt{a}$

**137.** **a)** Ei-negatiivisen luvun $a$ neliöjuuri on luku $b$, jos $b \geq 0$ ja $b^2 = a$.

Koska $5 = \sqrt{25} > \sqrt{2}$, on $5-\sqrt{2} \geq 0$.

$(5-\sqrt{2})^2 = 25 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} + 2 = 27 - 10\sqrt{2}$

Siis luku $5-\sqrt{2}$ on luvun $27-10\sqrt{2}$ neliöjuuri.

**b)** $2-\sqrt{5} = \sqrt{4} - \sqrt{5} < 0$, joten ei ole $2-\sqrt{5}$ minkään luvun neliöjuuri.

**c)** $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a > 0$

**138.** **a)** $\sqrt{(1-\pi)^2} = \underbrace{|1-\pi|}_{<0} = -(1-\pi) = \pi - 1$

**b)** $\left|2-\sqrt{2}\right|^2 = (2-\sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$

**c)** $a^a \cdot a^a \cdot a^a \cdot a^a = a^{a+a+a+a} = a^{4a}$, $a > 0$

**d)** $|-5(\pi-4)| = |-5| \cdot \underbrace{|\pi-4|}_{<0} = 5 \cdot (-\pi+4) = 20 - 5\pi$

**e)** $a^a \cdot b^a = (ab)^a$

**f)** $a^{-a} \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^a = \dfrac{1}{a^a} \cdot \dfrac{b^a}{a^a} = \dfrac{b^a}{a^{2a}} = \left(\dfrac{b}{a^2}\right)^a$, $a > 0$, $b > 0$

**139.** **a)** Positiivisten lukujen neliöiden suuruusjärjestys on täsmälleen sama kuin alkuperäisten lukujen suuruusjärjestys.

$(5\sqrt{3})^2 = 25 \cdot 3 = 75$

$(6\sqrt{2})^2 = 36 \cdot 2 = 72$

Koska 75 > 72, on $5\sqrt{3} > 6\sqrt{2}$.

**b)** Positiivisten lukujen suuruusjärjestys säilyy korotettaessa molemmat positiiviseen kokonaislukupotenssiin.

$(\sqrt[3]{3})^{12} = (3^{\frac{1}{3}})^{12} = 3^4 = 81$

$(\sqrt[4]{4})^{12} = (4^{\frac{1}{4}})^{12} = 4^3 = 64$

Luku $\sqrt[3]{3}$ on suurempi.

**c)** Positiivisten lukujen suuruusjärjestys säilyy korotettaessa molemmat positiiviseen kokonaislukupotenssiin.

$(\sqrt[3]{3})^6 = (3^{\frac{1}{3}})^6 = 3^2 = 9$

$(\sqrt[6]{6})^6 = 6$

Luku $\sqrt[3]{3}$ on suurempi.

**140.** **a)** Väite on tosi, sillä $\sqrt[4]{4}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{2}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

**b)** Väite on epätosi. Esimerkiksi, jos $a=-2$, niin $\sqrt{(-2)^6}=\sqrt{64}=8$, mutta $(-2)^3=-8$.

**c)** Väite on epätosi. Esimerkiksi, jos $n=-1$, on $8^{-1}=\frac{1}{8}$, mutta $2^{4\cdot(-1)}=2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$.

**d)** Väite on tosi, sillä $(-1)^{2n}=((-1)^2)^n=1^n=1$.

**141.** **a)** Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella $a$. Korotuksen jälkeen hinta on $1{,}25a$. Merkitään alennusta vastaavaa prosenttikerrointa kirjaimella $k$. Tulee olla:

$$\begin{aligned} k\cdot 1{,}25a &= a \\ k\cdot 1{,}25 &= 1 \qquad \|:1{,}25 \\ k &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Hintaa on alennettava 20 %.

**b)** Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella $a$ ja myyntiä eli myytyjen tuotteiden lukumäärää kirjaimella $m$. Alennuksen jälkeen hinta on $0{,}75a$. Merkitään myynnin korotusta vastaavaa prosenttikerrointa kirjaimella $k$. Tulee olla:

$$\begin{aligned} k\cdot m\cdot 0{,}75a &= ma \\ k\cdot 0{,}75 &= 1 \qquad \|:0{,}75 \\ k &= 1{,}333... \end{aligned}$$

Myynnin on lisäännyttävä noin 33 %.

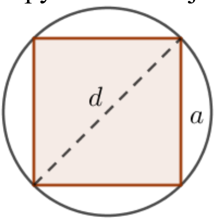
**142.** **a)** Alkuperäisessä liuoksessa on suolaa 0,035 · 38 g = 1,33 g.
Veden haihduttamisen jälkeen liuosta on 38 g – 6,0 g = 32 g.
Liuoksen suolapitoisuus on

$$\frac{1{,}33}{32} = 0{,}0415... \approx 4{,}2\ \%.$$

**b)** Merkitään alkuperäisen liuoksen massaa kirjaimella *a*. Suolaa on alkuperäisessä liuoksessa 0,06*a*. Veden lisäyksen jälkeen liuoksen massa on 1,5*a*.
Liuoksen suolapitoisuus on

$$\frac{0{,}06a}{1{,}5a} = 0{,}04 = 4{,}0\ \%.$$

**143.** Piirretään kuva tilanteesta. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella *a* ja ympyrän halkaisijaa kirjaimella *d*.




Neliön piirin pituus on 4*a*.
Ympyrän halkaisija on neliön lävistäjän pituinen.
Lävistäjän pituus voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella.

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2a^2$$
$$d = \sqrt{2}a \text{ (tai } d = -\sqrt{2}a)$$

Ympyrän kehän pituus on $\pi \cdot d = \pi \cdot \sqrt{2}a$.

$$\frac{\pi \cdot \sqrt{2}a}{4a} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1{,}1107...$$

Ympyrän kehän pituus on noin 11,1 % suurempi kuin neliön piirin pituus.

**144.**

$$\frac{2^{n-3}\cdot 4^n}{8^{n-1}}$$
$$=\frac{2^{n-3}\cdot (2^2)^n}{(2^3)^{n-1}}$$
$$=\frac{2^{n-3}\cdot 2^{2n}}{2^{3(n-1)}}$$
$$=\frac{2^{n-3+2n}}{2^{3n-3}}$$
$$=\frac{2^{3n-3}}{2^{3n-3}}$$
$$=2^{(3n-3)-(3n-3)}$$
$$=2^0$$
$$=1$$

**145.** Merkitään alkuperäisen kuution sivun pituutta kirjaimella $a$ ja suurennetun kuution sivun pituutta kirjaimella $b$. Kuutioiden pinta-alat ovat $6a^2$ ja $6b^2$, joten syntyy yhtälö:

$$6b^2=1,2\cdot 6a^2$$
$$b^2=1,2a^2$$
$$b=\sqrt{1,2}a\ (b>0)$$

Suurennetun kuution tilavuus on
$b^3=(\sqrt{1,2}a)^3=(\sqrt{1,2})^3\cdot a^3=1,3145...\ \cdot a^3$.

Tilavuus kasvaa 31,5 %.

**146.** Merkitään parturimaksun verotonta hintaa kirjaimella $a$. Ennen veron alennusta parturimaksu oli $1,22a$. Alennuksen jälkeen maksu oli $1,08a$.

$\frac{1,08a}{1,22a}=0,8852...$ $\quad$ $1-0,8852...=0,1147...\approx 11,5\ \%$

Maksut olisivat alentuneet 11,5 %.

**147.** 15 ‰ = 15:1000 = 0,015
Puhdistusainetta tulee olla 0,015 · 1000 ml = 15 ml ja
vettä 1000 ml – 15 ml = 985 ml.

200 millilitrassa pesuliuosta on 0,015 · 200 ml = 3 ml puhdistusainetta.
Merkitään kirjaimella $x$ lisättävän puhdistusaineen määrää.
Tällöin pesuliuosta on yhteensä 200 + $x$ ml ja puhdistusainetta liuoksessa 3 + $x$ ml.
Saadaan yhtälö $\frac{3+x}{200+x}=0{,}035$, jonka ratkaisu on $x$ = 4,145…

Puhdistusainetta on lisättävä 4 ml.

**148.** Olkoon meriveden massa ennen haihduttamista $a$.
Vedessä on suolaa 0,04$a$. Haihduttamisen jälkeen meriveden massa on 72 % alkuperäisestä, eli 0,72$a$.

Haihduttamisen jälkeen suolapitoisuus on
$\frac{0{,}04a}{0{,}72a}=0{,}0555...\approx 5{,}6\ \%$.

**149.** Olkoon perheen tulot $a$, joten vuokramenot ovat 0,25$a$, ja muuhun käyttöön jää $a$ – 0,25$a$ = 0,75$a$.

Korotuksen jälkeen vuokramenot ovat 1,15 · 0,25$a$ = 0,2875$a$, joten muuhun käyttöön jää $a$ – 0,2875$a$ = 0,7125$a$.

$$\frac{0{,}7125a}{0{,}75a}=0{,}95$$

Muuhun käyttöön jää 5 % vähemmän rahaa korotuksen jälkeen.

**150.** **a)** $a^{\frac{2}{3}} = a^{2\cdot\frac{1}{3}} = (a^{\frac{1}{3}})^2 = 4^2 = 16$

**b)** $8^m = (2^3)^m = 2^{3m} = (2^m)^3 = 3^3 = 27$

**c)** $2^{4k} = 2^{2\cdot 2k} = (2^2)^{2k} = 4^{2k} = (4^k)^2 = 6^2 = 36$

**151.** Olkoon tuoreiden omenoiden massa *a*.
Tuoreissa omenoissa on sokeria 0,04*a* ja vettä 0,8*a*. Sokeria ja muita aineita on yhteensä 0,2*a*.

Olkoon kuivauksen jälkeen omenien massa *b*.
Kuivatuissa omenissa on vettä 0,2*b* ja sokeria ja muita aineita yhteensä 0,8*b*.

Kuivauksessa sokerin ja muiden aineiden määrä ei muutu, joten
0,8*b* = 0,2*a*, josta $b = \dfrac{0,2a}{0,8} = \dfrac{2}{8}a = \dfrac{1}{4}a = 0,25a$.

Sokeripitoisuus on $\dfrac{0,04a}{b} = \dfrac{0,04a}{0,25a} = 0,16 = 16\ \%$.

**152.** Olkoon päärynämehun massa *a* ja omenamehun massa *b*. Mehua on yhteensä *a* + *b*.

Päärynämehussa on sokeria 0,14*a* ja omenamehussa 0,07*b*. Sokeria on yhteensä 0,14*a* + 0,07*b*.

Koska sokeripitoisuus tiedetään, saadaan yhtälö
$\dfrac{0,14a + 0,07b}{a+b} = 0,11$, josta $b = \dfrac{3}{4}a$.

Päärynämehun ja omenamehun sekoitussuhde on
$a : b = a : \dfrac{3}{4}a = \dfrac{4}{3} = 4:3$, eli
päärynämehua tulee olla neljä osaa ja omenamehua kolme osaa.

## SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

**153.** **a)** Jos $a$ ja $b$ ovat molemmat positiivisia tai nolla,
$|a| + |b| = a + b$ ja $|a + b| = a + b$. Yhtälö on tällöin tosi.

Jos $a$ ja $b$ ovat molemmat negatiivisia tai nolla,
$|a| + |b| = -a - b$ ja $|a + b| = -(a + b) = -a - b$. Yhtälö on tällöin tosi.

Yhtälö on tosi, kun $a \geq 0$ ja $b \geq 0$ tai $a \leq 0$ ja $b \leq 0$.

**b)** Jos $a > 0$ ja $b < 0$, $|a| + |b| = a - b$.
Jos $|a| > |b|$, $a + b > 0$ ja $|a + b| = a + b \neq |a| + |b|$.
Jos $|a| < |b|$, $a + b < 0$, ja $|a + b| = -a - b \neq |a| + |b|$.
Samoin, jos $a < 0$ ja $b > 0$, yhtälö ei toteudu.

Yhtälö on epätosi, kun $a < 0$ ja $b > 0$ tai $a > 0$ ja $b < 0$.

**154.** 1) Kun $a > b$, lukujen välinen etäisyys on $a - b$.
Kun $a > b$, on $a - b > 0$, joten $|a - b| = a - b$.

2) Kun $a = b$, lukujen välinen etäisyys on $a - b = 0$ ja $|a - b| = |0| = 0$.

3) Kun $a < b$, lukujen välinen etäisyys on $b - a$.
Kun $a < b$, on $a - b < 0$, joten $|a - b| = -(a - b) = -a + b = b - a$.

Kohtien 1-3 perusteella lukujen $a$ ja $b$ välinen etäisyys on $|a - b|$.

**155.** Kun $a \geq 0$, on $\sqrt{a^2} = a$ ja $|a| = a$.
Kun $a < 0$, on $-a > 0$. Tällöin $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$ ja $|a| = -a$.

**156.** Reaaliluvun itseisarvo on $|x| = \begin{cases} x, \text{ kun } x \geq 0 \\ -x, \text{ kun } x < 0 \end{cases}$.

**a)** Kun $x \geq 0$, $|x| = x$, joten epäyhtälö $x \leq |x|$ voidaan kirjoittaa muotoon $x \leq x$. joka on aina tosi.
Kun $x < 0$, epäyhtälö $x \leq |x|$ on aina tosi, koska negatiivinen luku on aina positiivista lukua pienempi.

**b)** a-kohdan perusteella $x \leq |x|$ ja $y \leq |y|$, joten myös $x + y \leq |x| + |y|$.

**c)** Määritelmän ja a-kohdan perusteella $-|x| \leq x \leq |x|$ ja $-|y| \leq y \leq |y|$.
Siis $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$.
Jos $x + y \geq 0$, on $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.
Jos $x + y < 0$, on edellisen perusteella $|x + y| = -(x + y) \leq |x| + |y|$.
Siis aina $|x + y| \leq |x| + |y|$.

**d)** Jos $|x| - |y| \geq 0$, niin $||x| - |y|| = |x| - |y| \leq |x| + |y|$.
Jos $|x| - |y| < 0$, niin $||x| - |y|| = -|x| + |y| \leq |x| + |y|$.
Siis aina $||x| - |y|| \leq |x| + |y|$.

**157.** 1° $(x \circ y) \circ z = (x + y - 2) \circ z = (x + y - 2) + z - 2 = x + y + z - 4$

$x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - 2) = x + (y + z - 2) - 2 = x + y + z - 4$

Siis $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

2° Koska $x \circ y = x + y - 2$ ja $y \circ x = y + x - 2 = x + y - 2$, on

$x \circ y = x \circ y$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

3° Kohdan 2° mukaan $x \circ \omega = \omega \circ x$ kaikilla $x, \omega \in \mathbb{R}$, joten riittää tarkastella yhtälöä $x \circ \omega = x$.

$x \circ \omega = x + \omega - 2$, joten

$x + \omega - 2 = x$

$\omega = 2$

Siis $x \circ 2 = x + 2 - 2 = x$ ja $2 \circ x = 2 + x - 2 = x$, joten on olemassa luku $\omega$, jolle $x \circ \omega = \omega \circ x = x$.

4° Kohdan 2° mukaan $x \circ x^* = x^* \circ x$ kaikilla $x, \omega \in \mathbb{R}$ ja kohdan 3° mukaan $\omega = 2$. Tarkastellaan yhtälöä $x \circ x^* = \omega$.

$$
\begin{aligned}
x \circ x^* &= \omega \\
x + x^* - 2 &= \omega \\
x + x^* - 2 &= 2 \\
x^* &= 4 - x
\end{aligned}
$$

Siis jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on vasta-alkio $x^* = 4 - x$, jolle

$x \circ x^* = x^* \circ x = \omega$:

$x \circ (4 - x) = x + (4 - x) - 2 = 2 = \omega$ ja

$(4 - x) \circ x = (4 - x) + x - 2 = 2 = \omega$.