MAB1

Polynomit

Laskentaa kirjaimilla

Tähän asti olemme laskeneet **luvuilla**, jotka on esitetty numeroiden avulla.

Matematiikan säännöt, laskentamenetelmät, ”kaavat” samoin kuin fysiikan ja itse asiassa kaikkien tieteiden laskentamenetelmät esitetään **kirjaimilla.**

Kirjaimet tarkoittavat **muuttujia**, joille voidaan sitten antaa lukuarvoja.

Polynomi on summalauseke

Polynomi on summalauseke, jossa kirjainmuuttuja ei esiinny nimittäjässä.

Polynomi voi olla yhden muuttujan, esimerkiksi x:n polynomi:

$$5x^3 – 4x^2 + 7x - 5$$

Yleensä x:n polynomia merkitään P(x), joten

$$P\ (x) = 5x^3 – 4x^2 + 7x - 5$$

Nimityksiä

Polynomissa termit peräkkäin etumerkkeineen (**järjestetty**: korkein potenssi ensin)

Poly = ”monta”

nomi= ”termi”

termi = yhteenlaskettava, esim $5x^3$, esim. $-4x$

kerroin 5 kirjainosa x^3

$$\mathbf{P(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x - 5}$$

Lyhennysmerkintä x:n polynomille

termejä

termit $5x^3$, $-4x^2$, $+7x$, -5

Samanmuotoiset termit

Jos kahdella termillä on **täsmälleen sama kirjainosa**, termit ovat **samanmuotoisia**.

Kirjainosien kirjaimien pitää olla samoja eksponenttejä myöten

$-5x^2$ ja $3x^2$ ovat samanmuotoisia

$3x$ ja $-x$ ovat samanmuotoisia

$2a^2$ ja $-4a$ eivät ole, koska a:lla eri eksponentti

lausekkeessa samanmuotoiset termit voidaan yhdistää

Nimityksiä

1-terminen polynomi = **monomi**

$$P(x) = -5x$$

2-terminen polynomi = **binomi**

$$P(a,b) = 3a - 4b$$

$$P(x) = -4x^2 + 5x$$

3-terminen polynomi = trinomi (nimeä ei juuri käytetä)

$$P(x) = 4x^2 - 2x + 3$$

Polynomin asteluku

Polynomin **asteluku** = muuttujan **korkein** eksponentti

Esim. Järjestä x:n polynomi

$$P(x) = 2x - 3 + 4x^2 - 5x^3$$

Muuttujan x **korkein** eksponentti on 3, se **ensin**.
Saadaan **kolmannen** asteen polynomi:

$$P(x) = -5x^3 + 4x^2 + 2x - 3$$

(Järjestämisessä vaihdetaan termien paikkoja)

Polynomin arvon laskeminen

Kun muuttujan arvo tiedetään, **polynomin arvo** lasketaan **sijoittamalla** x:n paikalle arvo 4

Olkoon polynomi $P(x) = -3x^2 + 2x - 3$

$$P(4) = -3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 3$$
$$= -3 \cdot 16 + 8 - 3$$
$$= -43$$

Negatiivinen muuttujan arvo → suluissa

Jos muuttujan paikalle sijoitetaan **negatiivinen**, siis miinusmerkkinen arvo, se on sijoitettava **suluissa**

$P(a) = 2a^3 – 3a^2 + 4a - 5$

kun muuttuja a = -2, saadaan

$P(-2) = 2•(-2)^3 - 3•(-2)^2 + 4•(-2) – 5$

$P(-2) = 2•(-8) - 3•4 – 8 - 5$

$P(-2) = -16 – 12 – 8 – 5 = - 41$

Vastapolynomi –P(x)

Jos polynomi P(x) on

$$P(x) = 2x^3 - 5x + 3$$

Niin polynomin P(x) vastapolynomi on –P(x) saadaan **vaihtamalla etumerkit**

$$-P(x) = -2x^3 + 5x - 3$$

Muistisääntö: Sulkujen edessä oleva miinus vaihtaa merkit

Polynomilausekkeiden yhteen- ja vähennyslasku (**sievennys**)

Olkoon $P(x) = 2x^3 + x^2 – 3x + 5$
Olkoon $Q(x) = 3x^2 – 2x + 5$

a) Sievennä polynomien summa **$P(x) + Q(x)$**

$(2x^3+x^2-3x+5) + (3x^2 - 2x+5) =$

Ensin sulut pois

$2x^3+x^2 - 3x+5 + 3x^2 - 2x+5 =$

Sitten yhdistetään samanmuotoiset termit

$\mathbf{2x^3 + 4x^2 – 5x +10}$

Polynomilausekkeiden yhteen- ja vähennyslasku (**sievennys**)

Olkoon $P(x) = 2x^3 + x^2 – 3x + 5$

Olkoon $Q(x) = 3x^2 – 2x + 5$

b) Sievennä polynomien erotus **P(x) - Q(x)**

$(2x^3+x^2-3x+5) - (3x^2 - 2x+5) =$

Ensin sulut pois, huom! vastapolynomi

$2x^3+x^2 - 3x+5 - 3x^2 + 2x - 5 =$

Sitten yhdistetään samanmuotoiset termit

$\mathbf{2x^3 - 2x^2 – x}$

Monomien kertolasku

Monomissa on vain yksi termi.
Se koostuu kertoimesta ja kirjainosasta

$-5x^2$

kirjainosa

kerroin

Kertoimet kerrotaan erikseen, kirjainosat erikseen

$3a^2 \bullet 4a^3 = 12a^5$

$-5x^3 \bullet (-4x^2y) \bullet (-2xy^4) = -40x^6y^5$

Huom!: pariton määrä miinuksia → **-**

$5 \bullet 4 \bullet 2 = 40$

$x^3 \bullet x^2 \bullet x = x^6$

$y \bullet y^4 = y^5$

Monomi kertaa polynomi

Monomilla kerrotaan vuoronperään kaikki polynomit termit.
Saadut tulotermit etumerkkeineen peräkkäin

$5(4x – 3) = 20x - 15$

$2x(5x – 4) = 10x^2 – 8x$

$$-3x^2(2x – 4x^3 + 5x^2) = -6x^3 + 12x^5 – 15x^4$$
$$= 12x^5 – 15x^4 – 6x^3$$

(polynomi pannaan järjestykseen)

Polynomi kertaa polynomi

Kullakin kertojan termillä kerrotaan **vuoronperään** kaikki, saadut tulotermit etumerkkeineen peräkkäin

$(2x – 3)\ (4x\ \ - 5)\ \ =\ \ 8x^2 – 10x – 12x + 15$

keskimmäiset samanmuotoisia

$= 8x^2 – 22x + 15$

Monomi jaettuna monomilla

Kertoimet supistetaan erikseen
kirjainosa jaetaan erikseen samankantaisten potenssien jakolaskun mukaisesti

$$\frac{18x^5y^7}{3x^2y^5} = \frac{\overset{6}{\cancel{18}}\;\overset{x^3}{\cancel{x^5}}\;\overset{y^2}{\cancel{y^7}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\;\underset{1}{\cancel{x^2}}\;\underset{1}{\cancel{y^5}}} = 6x^3y^2$$

$$\frac{15\,a^2\;b^8}{5\,a^6\;b^5\;c} = \frac{\overset{3}{\cancel{15}}\;\overset{1}{\cancel{a^2}}\;\overset{b^3}{\cancel{b^8}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\;\underset{a^4}{\cancel{a^6}}\;\underset{1}{\cancel{b^5}}\;c} = \frac{3b^3}{a^4c}$$

Vain **lausekkeella** saa supistaa, ei summalausekkeen osalla. Osoittajan ja nimittäjän pitää olla **tulon muodossa**

$$\frac{2x - 5}{2x + 3}$$

Tässä ei saa supistaa 2x pois koska se on vain summalausekkeen osa. Osoittaja ja nimittäjä **eivät ole** tulon muodossa

$$\frac{(3x-1)(2x-5)}{8(2x-5)} = \frac{(3x-1)\cancel{(2x-5)}}{8\cancel{(2x-5)}} = \frac{3x - 1}{8}$$

Tässä saa supistaa **lausekkeella** 2x – 5, koska se on sekä osoittajassa että nimittäjässä. Osoittaja ja nimittäjä on **tulon muodossa**.

Hankalahko esimerkki

Sievennä lauseke $$\frac{2x - (4x^2 + 2x)}{2x}$$

Osoittaja **ei ole tulon** muodossa, nimittäjä on.
Ei saa supistaa 2x:lla

Sievennetään osoittaja poistamalla sulut, jolloin voidaan yhdistellä samanmuotoisia termejä.

$$\frac{2x - (4x^2 + 2x)}{2x} = \frac{2x - 4x^2 - 2x}{2x} = \frac{-4x^2}{2x} = -2x$$