

7 NELIÖJUURIYHTÄLÖT JA -EPÄYHTÄLÖT

- Esim. 1**
- a) Yhtälö $-2 = 2$ on epätosi, mutta siitä saadaan neliöön korottamalla tosi yhtälö $4 = 4$
 - b) Epäyhtälö $-3 < 2$ on tosi, mutta siitä saadaan neliöön korottamalla epätosi epäyhtälö $9 < 4$

Yhtälö tai epäyhtälö voidaan korottaa neliöön vain, jos molemmat puolet ovat positiivisia

$$\text{Olkoon } a, b \geq 0. \text{ Tällöin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2, \quad a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

- Esim. 2** Ratkaise yhtälö $\sqrt{x+2} = x$

määritellään ehdot

$$x + 2 \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0$$
$$x \geq -2 \quad \wedge \quad x \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 0$$

korotetaan neliöön

$$x + 2 = x^2$$

siirretään termit

$$x^2 - x - 2 = 0$$

ratkaistaan yhtälö

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 2$$

tarkistetaan määrittelyehdot

ratkaisu $x = -1$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \geq 0$
ratkaisu $x = 2$ toteuttaa määrittelyehdon $x \geq 0$

ratkaisu

$$x = 2$$

- Esim. 3** Ratkaise yhtälö $\sqrt{x+1} \geq 2$

määritellään ehdot

$$x + 1 \geq 0$$
$$x \geq -1$$

korotetaan neliöön

$$x + 1 \geq 4$$

ratkaistaan yhtälö

$$x \geq 3$$

tarkistetaan määrittelyehdot

Ehtojen $x \geq -1$ ja $x \geq 3$ on molempien oltava voimassa, joten yhtälön ratkaisu on siis $x \geq 3$

ratkaisu

$$x \geq 3$$

ESIM 4. Ratkaise epäyhtälö $\sqrt{5-x} < x+1$

määritellään ehdot neliöjuuren reaalisuusehto
 $5-x \geq 0$, eli $x \leq 5$

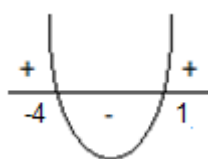
neliöön korottamisen ehto
 $x+1 \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 5$
 $x \geq -1 \quad \wedge \quad x \leq 5$
 $\rightarrow -1 \leq x \leq 5$

korotetaan neliöön $5-x < x^2 + 2x + 1$
siirretään termit $x^2 + 3x - 4 > 0$

ratkaistaan yhtälö $x^2 + 3x - 4 = 0$

$x = -4 \vee x = 1$

hahmotellaan kuvaaja



päätellään ratkaisuväli $x < -4 \vee x > 1$

tarkistetaan
määrittelyehdot

$x < -4$ ○

○ $x > 1$

● $-1 \leq x \leq 5$ ●

○ $1 < x \leq 5$ ●

ratkaisu

$1 < x \leq 5$

TEHTÄVÄT

Ratkaise yhtälö/epäyhtälö tehtävissä 1 – 10

1. a) $\sqrt{x+3} = 2$

c) $\sqrt{x+2} = x$

2. a) $\sqrt{x} + 1 = 3$

c) $\sqrt{2x-1} = x$

3. a) $\sqrt{x} < 2$

c) $\sqrt{x^2+9} \leq 5$

4. a) $\sqrt{x^2+2x+1} = x+1$

c) $\sqrt{x-2} = x-3$

5. a) $\sqrt{x+1} < \sqrt{5-x}$

6. a) $(\sqrt{1-2x}+1)^2 = 16$

c) $x + \sqrt{x} - 2 = 0$

7. a) $x = \sqrt{x} + 110$

c) $x - \sqrt{43-3x} = 11$

8. a) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} = \frac{1}{2}$

9. a) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = 1$

b) $\sqrt{2x+6} = -2$

d) $\sqrt{x^2-4} = x-2$

b) $5 + \sqrt{x-7} = 2$

d) $2x + \sqrt{x} - 1 = 0$

b) $\sqrt{x-3} > 2$

d) $\sqrt{1-x} \geq 1$

b) $\sqrt{x^2+5} = x-1$

d) $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{x}$

b) $-2 < \sqrt{x-1}$

b) $2\sqrt{4-x} \geq 1$

d) $1 + 4\sqrt{1-x} = 4x$

b) $8x + 2\sqrt{1-x} = 5$

d) $-\sqrt{x+1} = x-5$

b) $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{2}{5}$

b) $\frac{1}{x}(1 - \sqrt{1-4x^2}) = 1$

