

5 TÄYDELLINEN TOISEN ASTEEN YHTÄLÖ

Täydellinen toisen asteen yhtälö on muotoa $ax^2 + bx + c = 0$, se ratkaistaan käyttämällä *toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{kun } b^2 - 4ac \geq 0$$

Esim. 1 Ratkaise yhtälö $x^2 - 3x + 2 = 0$

sijoittamalla ratkaisukaavaan $a = 1$, $b = -3$ ja $c = 2$ saamme

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}, \text{ joten}$$

$$x = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Esim. 2 Ratkaise yhtälö $x(2x + 1) = 1$

$$\begin{aligned} x(2x + 1) &= 1 \\ 2x^2 + x &= 1 \\ 2x^2 + x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{-1-3}{4} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisukaavassa olevaa juurettavaa $D = b^2 - 4ac$ kutsutaan *diskriminantiksi*. Toisen asteen yhtälön ratkaisujen lukumäärä riippuu diskriminantista

Jos $D > 0$, niin yhtälöllä on kaksi (eri suurta) ratkaisua

Jos $D = 0$, niin yhtälöllä on yksi ratkaisu (tai kaksinkertainen ratkaisu)

Jos $D < 0$, niin yhtälöllä ei ole ratkaisua

Esim. 3 Millä c :n arvoilla yhtälöllä $x^2 - 4x + c = 0$ on kaksi ratkaisua

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 16 - 4c$$

Diskriminantin on oltava positiivinen, $D > 0$

$$\begin{aligned} 16 - 4c &> 0 \\ c &< 4 \end{aligned}$$

TEHTÄVÄT

Ratkaise yhtälö tehtävissä 1 – 9

1. a) $x^2 + x - 6 = 0$
c) $x^2 - 10x + 21 = 0$
2. a) $-3x^2 + 7x - 4 = 0$
c) $2x^2 + x - 1 = 0$
3. a) $x^2 = 17x - 30$
c) $(x + 1)(x - 2) = 1$
4. a) $x(1 - 2x) = 0$
c) $x^2 - 2x - 1 = 0$
5. a) $2x^2 - 3ax + a^2 = 0$
6. a) $9x^2 + 12x + 4 = 0$
c) $16x^2 - 16x + 1 = 0$
7. a) $(x + \frac{1}{2})^2 = 4$
c) $(x - 2)^2 - 1 = 2x(x - 3)$
8. a) $(12x - 1)x = 6$ [k89]
9. a) $(3 - x)^2 = 36$
10. Laske yhtälön diskriminantti
a) $3x^2 - x - 10 = 0$
b) $x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$
11. Millä a :n arvoilla yhtälöllä $3x^2 - 2x + 2a = 0$ on
a) kaksi ratkaisua
b) yksi ratkaisu
12. Minkä kahden peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulo on 650?
13. Suorakulmion muotoisen kentän pituus on 10m suurempi kuin sen leveys. Laske kentän pituus ja leveys, kun sen pinta-ala on 2475 m².
14. Määritä vakio a siten, että yhtälöllä $a^2x^2 + 4(a + 1)x + 4 = 0$ on kaksi ratkaisua
15. Suorakulmion piiri on 14 cm ja lävistäjä 5,0 cm. Kuinka pitkät ovat suorakulmion sivut?
16. Ratkaise yhtälö
a) $|x^2 + 2x - 1| = 2$
b) $x^2 + 2|x| - 3 = 0$
17. Määritä a siten, että yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu. Laske tämä ratkaisu
a) $x^2 + ax + 3 = 0$
b) $x^2 - 12x + 3a - 6 = 0$
18. Osoita, että yhtälöllä $(x + 1)(x + 3) = a^2$ on aina kaksi reaalista ratkaisua

VASTAUKSET

1. a) $x = -3 \vee x = 2$ b) $x = -1 \vee x = 2$ c) $x = 3 \vee x = 7$ d) $x = -10 \vee x = -4$
2. a) $x = 1 \vee x = \frac{4}{3}$ b) $x = -2 \vee x = \frac{1}{4}$ c) $x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$ d) $x = \frac{1}{3} \vee x = \frac{3}{4}$
3. a) $x = 2 \vee x = 15$ b) $x = -1 \vee x = \frac{16}{9}$ c) $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ d) $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$
4. a) $x = -\frac{5}{2} \vee x = 3$ b) $x = \frac{3}{4} \vee x = \frac{4}{3}$ c) $x = 1 \pm \sqrt{2}$ d) $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$
5. a) $x = a \vee x = \frac{a}{2}$ b) $x = 2 \vee x = 3a$
6. a) $x = -\frac{2}{3}$ b) ei ratkaisua c) $x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$ d) $x = -\sqrt{3}$
7. a) $x = -\frac{5}{2} \vee x = \frac{3}{2}$ b) $x = -5 \vee x = -1$ c) $x = -1 \vee x = 3$ d) $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{3}$
8. a) $x = -\frac{2}{3} \vee x = \frac{3}{4}$ b) $x = -1 \vee x = 4$
9. a) $x = -3 \vee x = 9$ b) $x = -1 \vee x = 5$
10. a) 121 b) $3 - 4\sqrt{3}$
11. a) $a < \frac{1}{6}$ b) $a = \frac{1}{6}$ c) $a > \frac{1}{6}$
12. 25 ja 26
13. 55m ja 45m
14. $a > -\frac{1}{2}$ ja $a \neq 0$
15. 3cm ja 4cm
16. a) $x = -3 \vee x = \pm 1$ b) $x = \pm 1$
17. a) $a = 2\sqrt{3}$, jolloin $x = -\sqrt{3}$ \vee $a = -2\sqrt{3}$, jolloin $x = \sqrt{3}$
b) $a = 14$, jolloin $x = 6$
18. tutki diskrimanttia