

4 VAILLINAINEN TOISEN ASTEEN YHTÄLÖ

Vaillinaisen toisen asteen yhtälö ollessa muotoa $ax^2 + bx = 0$, se ratkaistaan jakamalla vasen puoli tekijöihin ja käyttämällä *tulon nollasääntöä*

$$ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ tai } b = 0$$

Esim. 1 Ratkaise yhtälö $x(x + 3) = 0$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad \begin{aligned} x + 3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Esim. 2 Ratkaise yhtälö $3x^2 - 6x = 0$

$$\begin{aligned} & \text{jaetaan tekijöihin} & 3x^2 - 6x &= 0 \\ & \text{käytetään tulon nollasääntöä} & 3x(x - 2) &= 0 \\ & & 3x = 0 & \text{tai} & x - 2 = 0 \\ & & x = 0 & \text{tai} & x = 2 \end{aligned}$$

Esim. 3 Ratkaise yhtälö $2x - \frac{1}{3}x^2 = 0$

$$\begin{aligned} & \text{kerrotaan 3:lla} & 2x - \frac{1}{3}x^2 &= 0 \\ & \text{jaetaan tekijöihin} & 6x - x^2 &= 0 \\ & \text{käytetään tulon nollasääntöä} & x(6 - x) &= 0 \\ & & x = 0 & \text{tai} & 6 - x = 0 \\ & & & & x = 6 \end{aligned}$$

Vaillinaisen toisen asteen yhtälön ollessa muotoa $ax^2 + c = 0$, se ratkaistaan käyttämällä *neliöiden yhtäsuuruusehtoa*

$$x^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -r \quad \text{tai} \quad x = r \quad (\text{eli } x = \pm r)$$

Esim. 4 Ratkaise yhtälö $x^2 - 4 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Esim. 5 Ratkaise yhtälö $(x + 3)^2 = 6(x + 1)$

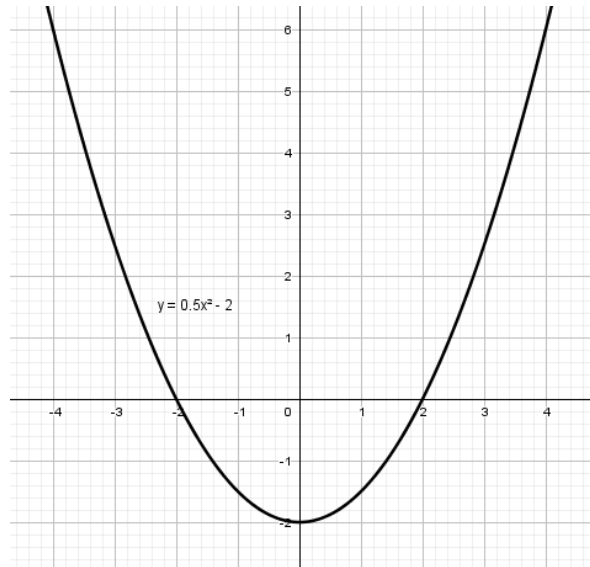
$$\begin{aligned} & \text{poistetaan sulut} & (x + 3)^2 &= 6(x + 1) \\ & \text{sievennetään} & x^2 + 6x + 9 &= 6x + 6 \\ & & x^2 &= -3 \end{aligned}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua, koska x^2 ei voi olla negatiivinen

Toisen asteen yhtälön kuvaaja on *paraabeli*

Esim. 6 Piirrä paraabeli $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

| x | y |
|----|----|
| 0 | -2 |
| 2 | 0 |
| 4 | 6 |
| -2 | 0 |
| -4 | 6 |



Toisen asteen termin kerroin a vaikuttaa paraabelin ominaisuuksiin

Jos $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin

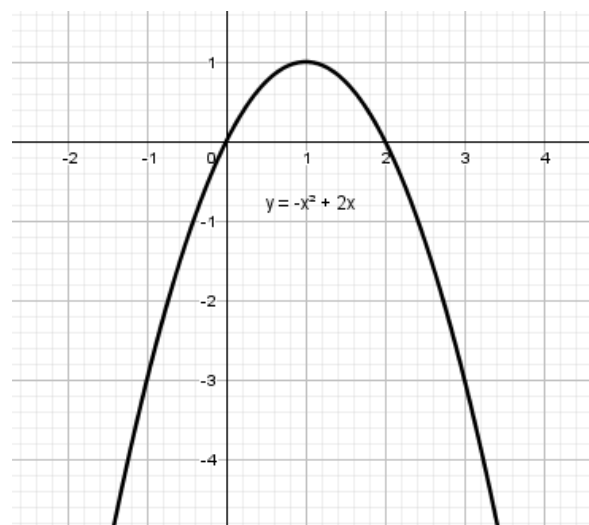
Jos $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin

Toisen asteen yhtälö voidaan ratkaista *graafisesti* piirtämällä sen kuvaaja. Yhtälön ratkaisuna on paraabelin ja x-akselin leikkauspisteet.

Esim. 7 Ratkaise yhtälö $-x^2 + 2x = 0$

Vasemman puolen kuvaaja on paraabeli $y = x^2 + 2x$

| x | y |
|----|----|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |
| 3 | -3 |
| -1 | -3 |



TEHTÄVÄT

Ratkaise yhtälö tehtävissä 1 – 14

1. a) $x(x + 3) = 0$
c) $-4x(5 + x) = 0$
 2. a) $x^2 + 2x = 0$
c) $\frac{1}{2}x^2 - x = 0$
 3. a) $3x^2 = 6x$
c) $3x = x^2$
 4. a) $x^2 = 16$
c) $x^2 = 8$
 5. a) $144 - x^2 = 0$
c) $56 - 8x^2 = 0$
 6. a) $\frac{1}{x} = \frac{x}{4}$
c) $x(4x^2 - 27) = 0$
 7. a) $(x - 3)(x + 2) = 0$
c) $x(1 - x) + 6 = (x - 1)(3 + 2x)$
 8. a) $(x - 1)(x + 1) = 8$
c) $(3 + 2x)(3 - 2x) = 3(12x + 3)$
 9. a) $x^3 - 4x = 0$
c) $x^3 = 2x^2$
 10. a) $\frac{x}{3} = \frac{4x^2}{9}$
c) $\frac{9}{x} = \frac{1}{x^3}$
 11. a) $(x - 5)(x + 3) = 0$
c) $x(x + 2) - 3(x + 2) = 0$
 12. a) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 13$ [k88]
 13. a) $x^2 - 3 = 3(x - 1)$
c) $(3x - 2)^4 = (x + 2)^4$
 14. a) $(x - 3)^2 = 9$
c) $(x + 2)^2 = 4 + 2x$
 15. Kun eräs positiivinen luku kerrotaan viidellä, saadaan sama tulos, kuin kerrottaessa tämän luvun neliö kahdella. Mikä on tämä luku?
 16. Ratkaise yhtälö piirtämällä
a) $-x^2 + 4 = 0$
b) $x^2 - 3x = 0$
- b) $2x(3x - 6) = 0$
 - d) $(x + 1)(x - 1) = 0$
 - b) $-2x^2 + 3x = 0$
 - d) $x^2 - x\sqrt{2} = 0$
 - b) $2x = 8x^2$
 - d) $\frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{4}x$
 - b) $9x^2 = 25$
 - d) $2x^2 = 24$
 - b) $5x^2 - 125 = 0$
 - d) $4\sqrt{2} - x^2\sqrt{8} = 0$
 - b) $\frac{5}{x} = \frac{5}{4x}$
 - d) $12x^3 + 3x = 0$
 - b) $(x - 3)(x + 4) = x$
 - d) $2x + 1 = 3 - (1 - x)(5x + 2)$
 - b) $(x + 1)^2 = 1$
 - d) $(2 - x)^2 = (x + 2)(x - 2)$
 - b) $2x^4 - 18x^2 = 0$
 - d) $3x^5 = 12x^3$
 - b) $\frac{4}{x} = x$
 - d) $\frac{x}{x-3} = \frac{x-3}{x}$ [k93]
 - b) $x(9 - x^2) = 0$
 - d) $(x^2 - 2x) + (6 - 3x) = 0$
 - b) $(x + 7 - \sqrt{3})(x + 7 + \sqrt{3}) = 0$ [s91]
 - b) $(3x - 2)^2 = (x + 2)^2$
 - d) $(3x - 2)^3 = (x + 2)^3$
 - b) $4(x + 5)^2 + 9 = 0$
 - d) $(2x - 3)^4 = 16$

VASTAUKSET

1. a) $x = -3 \vee x = 0$ b) $x = 0 \vee x = 2$ c) $x = -5 \vee x = 0$ d) $x = \pm 1$
2. a) $x = -2 \vee x = 0$ b) $x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$
c) $x = 0 \vee x = 2$ d) $x = 0 \vee x = \sqrt{2}$
3. a) $x = 0 \vee x = 2$ b) $x = 0 \vee x = \frac{1}{4}$
c) $x = 0 \vee x = 3$ d) $x = 0 \vee x = \frac{3}{2}$
4. a) $x = \pm 4$ b) $x = \pm \frac{5}{3}$ c) $x = \pm 2\sqrt{2}$ d) $x = \pm 2\sqrt{3}$
5. a) $x = \pm 12$ b) $x = \pm 5$ c) $x = \pm \sqrt{7}$ d) $x = \pm \sqrt{2}$
6. a) $x = \pm 2$ b) $x = \pm \frac{5}{2}$
c) $x = 0 \vee x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$ d) $x = 0$
7. a) $x = -2 \vee x = 3$ b) $x = \pm 2\sqrt{3}$
c) $x = \pm \sqrt{3}$ d) $x = 0 \vee x = 1$
8. a) $x = \pm 3$ b) $x = -2 \vee x = 0$ c) $x = -9 \vee x = 0$ d) $x = 2$
9. a) $x = 0 \vee x = \pm 2$ b) $x = 0 \vee x = \pm 3$
c) $x = 0 \vee x = 2$ d) $x = 0 \vee x = \pm 2$
10. a) $x = 0 \vee x = \frac{3}{4}$ b) $x = \pm 2$ c) $x = \pm \frac{1}{3}$ d) $x = \frac{3}{2}$
11. a) $x = -3 \vee x = 5$ b) $x = -3 \vee x = 0 \vee x = 3$
c) $x = -2 \vee x = 3$ d) $x = 2 \vee x = 3$
12. a) $x = \pm 4$ b) $x = -7 \pm \sqrt{3}$
13. a) $x = 0 \vee x = 3$ b) $x = 0 \vee x = 2$ c) $x = -2 \vee x = 0$ d) $x = 2$
14. a) $x = 0 \vee x = 6$ b) ei ratkaisua
c) $x = -2 \vee x = 0$ d) $x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{5}{2}$
15. $\frac{5}{2}$

