

### 3. ENSIMMÄISEN ASTEEN EPÄYHTÄLÖ

**Epäyhtälö** muodostuu, kun kaksi lauseketta merkitään erisuuriksi merkillä  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$  tai  $\geq$ .  
**Epäyhtälön ratkaisemisella** tarkoitetaan sen kaikkien ratkaisujen määrittämistä. Epäyhtälön ratkaisut muodostavat **ratkaisujoukon**.

**Esim. 1** Ratkaise epäyhtälö  $3x > 15$

$$\begin{aligned} 3x > 15 & \quad ||: 3 \\ x > 5 \end{aligned}$$

Epäyhtälön ratkaisujoukko on usein jokin **reaalilukuväli**.

**Avoim väli** ei sisällä päätepisteitään:

$$a < x < b$$

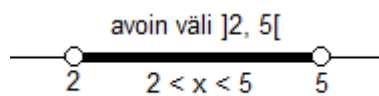
**Suljettu väli** sisältää päätepisteensä:

$$a \leq x \leq b$$

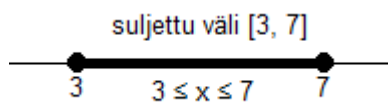
**Puoliavoin väli** sisältää toisen päätepisteen:

$$a \leq x < b \quad \text{tai} \quad a < x \leq b$$

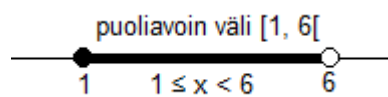
**Esim. 2** a)



b)



c)



Epäyhtälö säilyy yhtäpitävänä, kun

1. epäyhtälö käännetään ympäri

2. molemmille puolille lisätään tai vähennetään sama luku

3. molemmat puolet kerrotaan tai jaetaan samalla (nollasta eroavalla) luvulla

**Esim. 3** Ratkaise epäyhtälö

a)

$$\begin{aligned} x - 2 &< 5 \\ x &< 5 + 2 \\ x &< 7 \end{aligned}$$



b)

$$\begin{aligned} x + 5 &\leq 2x + 6 \\ 2x - x &\geq 5 - 6 \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$



**Esim. 4** Ratkaise epäyhtälö  $\frac{x+4}{3} < \frac{2x+5}{4}$

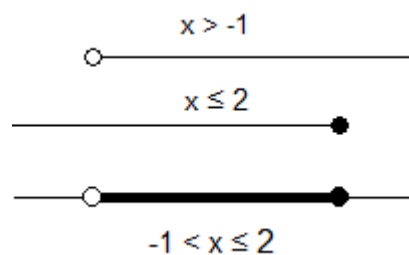
	$\frac{x+4}{3} < \frac{2x+5}{4}$
kerrotaan 12:lla	$12 \cdot \frac{x+4}{3} < 12 \cdot \frac{2x+5}{4}$
supistetaan	$4(x+4) < 3(2x+5)$
poistetaan sulut	$4x+16 < 6x+15$
siirretään termit	$4x-6x < 15-16$
yhdistetään termit	$-2x < -1$
jaetaan -2:lla (suunta kääntyy)	$x > \frac{1}{2}$



**Kaksoisepäyhtälön molempien puolien on oltava aina voimassa. Saadaan useimmiten kaksi epäyhtälöä, jotka ratkaistaan erikseen.**

**Esim. 5** Ratkaise kaksoisepäyhtälö  $1 < x + 2 \leq -2x + 8$

$1 < x + 2$	ja	$x + 2 \leq -2x + 8$
$1 - 2 < x$	ja	$x + 2x \leq 8 - 2$
$x > -1$	ja	$3x \leq 6$
		$x \leq 2$

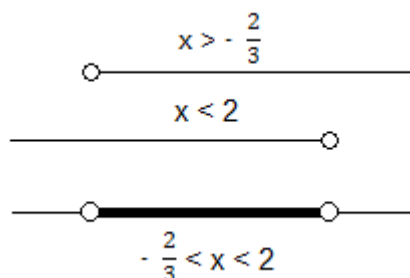


**Itseisarvoepäyhtälö ratkaistaan usein kaksoisepäyhtälönä**

$ x  < a$	$\Leftrightarrow$	$-a < x < a$
$ x  > a$	$\Leftrightarrow$	$x < -a$ tai $x > a$

**Esim. 6** Ratkaise itseisarvoepäyhtälö  $|3x - 2| < 4$

yhtäpitävä kaksoisepäyhtälö	$3x - 2 > -4$	tai	$3x - 2 < 4$
lisätään 2	$3x > -4 + 2$	tai	$3x < 4 + 2$
yhdistetään termit	$3x > -2$	tai	$3x < 6$
jaetaan 3:lla	$x > -\frac{2}{3}$	tai	$x < 2$



**Esim. 7** Ratkaise itseisarvoepäyhtälö  $|2x - 1| \geq 3$

$$|2x - 1| \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$2x - 1 \leq -3$$

$$2x \leq -2$$

$$x \leq -1$$

tai

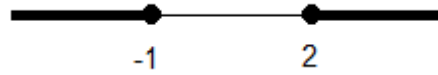
tai

tai

$$2x - 1 \geq 3$$

$$2x \geq 4$$

$$x \geq 2$$



## TEHTÄVÄT

Ratkaise epäyhtälö tai kaksoisepäyhtälö tehtävissä 1 – 12

1. a)  $x + 2 < -5$

b)  $-11 + x \geq -7$

c)  $12 \leq y + 9$

d)  $10 > y + 8$

e)  $5u + 2 > 4u - 3$

f)  $9t - 10 \leq 10t - 7$

2. a)  $12x < -48$

b)  $-5s \geq 35$

c)  $-16t < -32$

d)  $\frac{y}{2} \leq -3$

e)  $-\frac{1}{4}z < \frac{2}{3}$

f)  $-\frac{5}{14} \geq \frac{15v}{7}$

3. a)  $2x - 3 < 3x + 5$

b)  $-y + 2 \geq 3y + 6$

c)  $s - 3(s - 1) > 2(s + 1) + 1$

d)  $4(t - 10) < 3(t - 12)$

4. a)  $\frac{2x-1}{3} \geq 4$

b)  $\frac{6y-7}{3} < \frac{7-y}{3}$

c)  $\frac{3x-4}{12} > \frac{1}{6}$

d)  $\frac{z+4}{5} \geq \frac{2z+1}{7}$

5. a)  $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{6} < x - \frac{1}{3}$

b)  $\frac{x+1}{2} - \frac{2x-1}{3} \geq \frac{x+3}{6}$

6. a)  $x \geq \frac{2x-3}{4} - \frac{x-2}{2}$

b)  $\frac{x}{3} - \frac{x-3}{2} < x + \frac{x+6}{3}$  [s89]

7. a)  $\frac{2x+3}{3} - \frac{1-x}{6} < 2x$

b)  $\frac{1+x}{3} - \frac{1+x}{4} \geq 1$

8. a)  $0 < 2x - 4 < 8$

b)  $-12 \leq 7x - 2 < 1$

9. a)  $x - 3 \leq 0 \leq 1 - x$

b)  $5x - 1 < 1 - x \leq 5x + 5$

10. a)  $|2x + 1| \leq 1$

b)  $|3x - 5| < 2$

c)  $|3x - 7| > 2$

d)  $|2x + 5| \geq 3$

11. a)  $\frac{2}{3}(x - 2) > \frac{4}{5}x - 1$  [s83]

b)  $3(x + 4) < 12(15 + 2x)$  [s84]

12. a)  $|x + 12| \leq 3x$

b)  $|x| < 2x - 9$

13. Millä x:n arvoilla on voimassa

a)  $-3 < x + 2$  ja  $x + 1 \leq 3$

b)  $-3 > 2x - 3$  ja  $5x - 3 < 7$

c)  $2x - 6 < -4$  tai  $x + 3 \geq 2x$

d)  $9 + 4x \leq 1$  tai  $-8 < 7x - 1$

14. Millä luvun a arvoilla epäyhtälöllä  $ax > x + 1$  on ratkaisuna  $x > 2$

15. Ratkaise epäyhtälö  $|x - a| < x$  kaikilla vakion a arvoilla [s86]

16. Ratkaise epäyhtälö  $3x - 1 > 2|x|$  [k78]

17. Määritä kaikki vakion a arvot, joilla  $|x + 5| + |x + a| = 0$  on ratkaisu [k79]

## VASTAUKSET

1. a)  $x < -7$   
d)  $y < 2$
  2. a)  $x < -4$   
d)  $y \leq -6$
  3. a)  $x > -8$
  4. a)  $x \geq 6\frac{1}{2}$
  5. a)  $x > \frac{1}{4}$
  6. a)  $x \in R$
  7. a)  $x > \frac{5}{7}$
  8. a)  $2 < x < 6$
  9. a)  $x \leq 1$
  10. a)  $-1 \leq x \leq 0$   
c)  $x < \frac{5}{3}$  tai  $x > 3$
  11. a)  $x < -\frac{5}{2}$
  12. a)  $x \geq 6$
  13. a)  $-5 < x \leq 2$   
c)  $x \leq 3$
  14. a)  $a = \frac{3}{2}$
  15.  $x > \frac{a}{2}$ , kun  $a > 0$
  16.  $x > 1$
  17.  $a = 5$
- b)  $x \geq 4$   
e)  $u > -5$
  - b)  $s \leq -7$   
e)  $z > -\frac{8}{3}$
  - b)  $y \leq -1$
  - b)  $y < 2$
  - b)  $x \leq 1$
  - b)  $x > -\frac{1}{3}$
  - b)  $x \geq 11$
  - b)  $-\frac{10}{7} \leq x < \frac{3}{7}$
  - b)  $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3}$
  - b)  $1 < x < \frac{7}{3}$   
d)  $x \leq -4$  tai  $x \geq -1$
  - b)  $x > -8$
  - b)  $x > 9$
  - b)  $x < 0$   
d)  $x \leq -2$  tai  $x > -1$
- c)  $y \geq 3$   
f)  $t \geq -3$
  - c)  $t < 2$   
f)  $v \leq -\frac{1}{6}$
  - c)  $s < 0$                       d)  $t < 4$
  - c)  $x > 2$                       d)  $z \leq 7\frac{2}{3}$

