

11 MURTOEPÄYHTÄLÖ

Murtoepäyhtälön ratkaiseminen

1. Muunnetaan epäyhtälö *perusmuotoon* $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$, jossa vasemmalla puolella on murtolauseke. (merkin $>$ paikalla voi olla $<$, \leq tai \geq)
2. Määritetään osoittajan ja nimittäjän nollakohdat yhtälöistä $p(x) = 0$ ja $q(x) = 0$
3. Jaetaan x-akseli osiin osoittajan ja nimittäjän nollakohdilla. Murtolausekkeen merkki säilyy jokaisessa osassa. Selvitetään nämä merkit laskemalla murtolausekkeen arvo kunkin osan yhdessä kohdassa
4. Päätellään vastaus merkkitutkimuksen perusteella

Esim. 1 Ratkaise epäyhtälö $\frac{1-x}{2x+3} > 0$

Määritetään nollakohdat

$$1 - x = 0 \quad \vee \quad 2x + 3 = 0$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -\frac{3}{2}$$

Tutkitaan yhtälön merkit

$$\text{väli } x < -\frac{3}{2}: \quad f(-2) = \frac{1-(-2)}{2(-2)+3} = \frac{3}{-4+3} = -1$$

tällä välillä $f(x) < 0$

$$\text{väli } -\frac{3}{2} < x < 1: \quad f(0) = \frac{1-0}{2 \cdot 0 + 3} = \frac{1}{3}$$

tällä välillä $f(x) > 0$

$$\text{väli } x > 1: \quad f(2) = \frac{1-2}{2 \cdot 2 + 3} = \frac{-1}{4+3} = -\frac{1}{7}$$

tällä välillä $f(x) < 0$

Koostetaan ratkaisu

$-\frac{3}{2}$		1
-	+	-

$$-\frac{3}{2} < x < 1$$

Esim. 2 Ratkaise epäyhtälö $\frac{4}{x} - x \leq 3$

Määrittelyehto on $x \neq 0$. Siirtämällä kaikki termit vasemmalla puolelle ja laventamalla samannimisiksi saamme epäyhtälön perusmuotoon

$$\frac{-x^2 - 3x + 4}{x} \leq 0$$

Määritetään nollakohdat

$$x = -4 \vee x = 1$$

koska epäyhtälössä on yhtäsuuruus, niin nämä kohdat otetaan mukaan. Nimittäjän nollakohta $x = 0$ emme ota mukaan.

Tutkitaan yhtälön merkit

$$\begin{aligned} x < -4: & \quad f(-5) = \frac{6}{5} \\ & \quad \text{tällä välillä } f(x) > 0 \\ -4 < x < 0: & \quad f(-1) = -6 \\ & \quad \text{tällä välillä } f(x) < 0 \\ 0 < x < 1: & \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{2} \\ & \quad \text{tällä välillä } f(x) > 0 \\ x > 1: & \quad f(2) = -3 \\ & \quad \text{tällä välillä } f(x) < 0 \end{aligned}$$

Koostetaan ratkaisu

	-4	0	1	
	+	-	+	-

koska epäyhtälössä on mukana yhtäsuuruus, osoittajan nollakohdat -4 ja 1 kuuluvat mukaan, sen sijaan nimittäjän nollakohta $x = 0$ ei kuulu.

Ratkaisu

$$-4 \leq x < 0 \vee x \geq 1$$

TEHTÄVÄT

Ratkaise epäyhtälö tehtävissä 1 – 5

1. a) $\frac{1-x}{x+2} < 0$ b) $\frac{x+1}{x^2-4} \geq 0$ c) $\frac{1-x^2}{3+x^2} > 0$ d) $\frac{x-4}{3-5x-2x^2} \leq 0$

2. a) $\frac{2}{x-2} > 3$ b) $\frac{2x-1}{x+4} \geq 2$ c) $\frac{1}{4x} < x$ d) $x \leq \frac{2}{x-1}$

3. a) $\frac{1-x}{x-3} < \frac{1}{x-1}$ b) $\frac{2x+3}{3x-6} - \frac{1}{x-1} < 0$ c) $\frac{2x}{3} < \frac{1-3x}{x-2}$ d) $\frac{x-2}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 1$

4. a) $\frac{9x^2+1}{3x} \leq 2$ b) $x-1 \geq \frac{2}{x}$ c) $\frac{3x-2}{2x+1} < \frac{2}{3}$ d) $\frac{2x^2+1}{x-2} > x$

5. a) $\frac{1}{x(x-1)} + \frac{x}{1-x} < 2 - \frac{6}{x}$ b) $\frac{x^2}{x^2-4} \geq 1 + \frac{1}{x^2-2x}$

c) $\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} > \frac{2}{x^2-1}$ d) $\frac{6}{x+3} - \frac{1}{x} \leq \frac{x+3}{x^2+3x}$

6. Omakotitalon sähkölasku muodostuu perusmaksusta 350 € ja kulutusmaksusta 8,5 snt/kWh. Kuinka suuri kulutuksen pitäisi vähintään olla, jotta yhden kilowattitunnin kokonaishinta olisi alle 10 snt?

7. Erään työn kesto aika on kääntäen verrannollinen työn tekijöiden määrään. Kuinka monta tekijää on vähintään oltava, jotta kahden poisjäänti ei aiheuttaisi yli 10% viivästyä?

VASTAUKSET

1. a) $x < -2 \vee x > 1$ b) $-2 < x \leq -1 \vee x > 2$ c) $-1 < x < 1$ d) $-3 < x < \frac{1}{2} \vee x \geq 4$
2. a) $2 < x < \frac{8}{3}$ b) $x < -4$ c) $-\frac{1}{2} < x < 0 \vee x > \frac{1}{2}$ d) $x \leq -1 \vee 1 < x \leq 2$
3. a) $x < -1 \vee 1 < x < 2 \vee x > 3$ b) $1 < x < 2$
c) $x < -3 \vee \frac{1}{2} < x < 2$ d) $x < 0 \vee 0 < x \leq \frac{1}{2}$
4. a) $x < 0 \vee x = \frac{1}{3}$ b) $-1 \leq x < 0 \vee x \geq 2$ c) $-\frac{1}{2} < x < \frac{8}{5}$ d) $x > 2$
5. a) $x < 0 \vee x > \frac{5}{3}$ b) $x < -2 \vee 0 < x \leq \frac{2}{3} \vee x > 2$
c) $x > -1 \wedge x \neq 1$ d) $x < -3 \vee 0 < x \leq \frac{3}{2}$
6. 23 344 kWh
7. 22