4 Avaruuden suora ja taso

ENNAKKOTEHTÄVÄT

1. **a)** Kappale kulkee yhdessä sekunnissa vektorin $\overline{s}$, joten kahdessa sekunnissa kappale kulkee vektorin $2\overline{s}$. Pisteestä $A = (-3, 5, 1)$ päästään pisteeseen P, jossa kappale sijaitsee, kulkemalla vektori $2\overline{s}$.

Selvitetään paikkavektorin avulla pisteen P koordinaatit.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + 2\overline{s} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 \\ 5-2 \\ 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Piste $P = (1, 3, 12)$.
Kappaleen on 2 sekunnin kuluttua pisteessä (1, 3, 12).

b) Lasketaan kappaleen koordinaatit, kun aikaa on kulunut 10 sekuntia

$$\overline{OP} = \overline{OA} + 10\overline{s} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+20 \\ 5-10 \\ 4+40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \\ 44 \end{bmatrix}$$

Piste $P = (17, -5, 44)$.
Kappaleen on 10 sekunnin kuluttua pisteessä (17, −5, 44).

c) Lasketaan kappaleen x- ja y-koordinaatit, kun aikaa on kulunut t sekuntia.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + 2\overline{s} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+2t \\ 5-2t \\ 4+4t \end{bmatrix}$$

Piste $P = (-3 + 2t, 5 - t, 4 + 4t)$.

Kun aikaa on kulut t sekuntia, kappaleen x-koordinaatti on $-3 + 2t$, y-koordinaatti on $5 - t$ ja z-koordinaatti on $4 + 4t$.

2. Pisteet $A = (2, -1, 4)$, $B = (-2, 1, -2)$ ja $C = (-6, 3, -8)$ ovat samalla suoralla, jos vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat yhdensuuntaiset. Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat yhdensuuntaiset, jos on olemassa luku t siten, että $\overline{AB} = t\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = (-2-2)\overline{i} + (1-(-1))\overline{j} + (-2-4)\overline{k} = -4\overline{i} + 2\overline{j} - 6\overline{k}$$
$$\overline{AC} = (-6-2)\overline{i} + (3-(-1))\overline{j} + (-8-4)\overline{k} = -8\overline{i} + 4\overline{j} - 12\overline{k}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= t\overline{AC} \\ -4\overline{i} + 2\overline{j} - 6\overline{k} &= t(-8\overline{i} + 4\overline{j} - 12\overline{k}) \end{aligned}$$

Huomataan, että $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, joten vektorit ovat yhdensuuntaiset ja pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla.

4.1 Suoran yhtälö

YDINTEHTÄVÄT

401. **a)** Pisteet P ja Q, joiden paikkavektorit ovat $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{s}$ ja $\overline{OQ} = \overline{OA} + 2\overline{s}$ ovat suoran pisteitä.

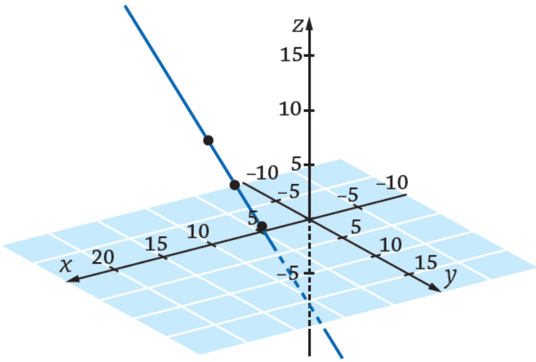
$$\overline{OP} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ ja } \overline{OQ} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Kaksi muuta suoran pistettä ovat (9, 2, 6) ja (11, 1, 10).

b) Suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 3 - t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

c)



402. **a)** Suoran eräs suuntavektori on

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 6 - 3 \\ -3 - (-1) \\ 1 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 - 2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5 - 4t \end{cases}.$$

b) Valitaan esimerkiksi $t = -1$, jolloin

$$\begin{cases} x = 3 + 3 \cdot (-1) = 0 \\ y = -1 - 2 \cdot (-1) = 1 \\ z = 5 - 4 \cdot (-1) = 9 \end{cases}$$

Kolmas suoralla oleva piste on esimerkiksi (0, 1, 9).

Huomio: Arvoilla $t = 0$ ja $t = 1$ saataisiin pisteet A ja B, jotka oli jo annettu.

c) Sijoitetaan pisteen $P = (18, -11, -15)$ koordinaatit suoran yhtälöön.

$$\begin{cases} 18 = 3 + 3t \\ -11 = -1 - 2t \\ -15 = 5 - 4t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3t = -15 \quad \| : (-3) \\ \ \ 2t = 10 \quad \| : 2 \\ \ \ 4t = 20 \quad \| : 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 5 \\ t = 5 \\ t = 5 \end{cases}$$

Koska kaikista yhtälöistä saadaan sama $t = 5$, suoran yhtälö toteutuu. Piste P on suoralla.

Sijoitetaan pisteen $Q = (-6, 7, 17)$ koordinaatit suoran yhtälöön.

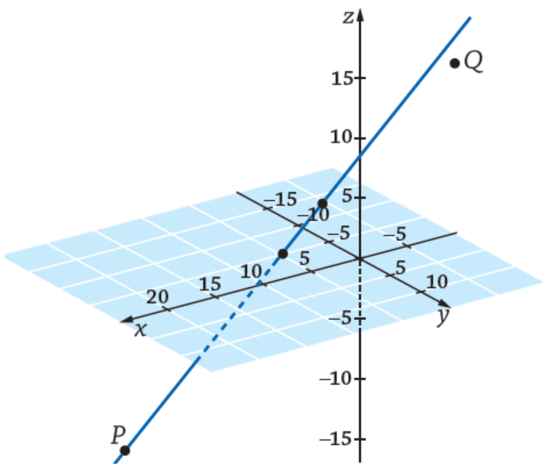
$$\begin{cases} -6 = 3 + 3t \\ 7 = -1 - 2t \\ 17 = 5 - 4t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3t = 9 \quad \|:(-3) \\ \quad 2t = -8 \quad \|:2 \\ \quad 4t = -12 \quad \|:4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -3 \\ t = -4 \\ t = -3 \end{cases}$$

Ei ole olemassa lukua t, joka toteuttaisi kaikki yhtälöt.
Piste Q ei ole suoralla.

d)



403. **a)** Suorien eräät suuntavektorit ovat

$$\overline{AB}=\begin{bmatrix}0-4\\0-(-4)\\4-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\4\\4\end{bmatrix} \text{ ja } \overline{AC}=\begin{bmatrix}2-3\\1-3\\2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

Suorien parametrimuotoiset yhtälöt ovat

$$\begin{cases}x=4-4t\\y=-4+4t\ (t\in\mathbb{R})\\z=4t\end{cases} \text{ ja } \begin{cases}x=3-r\\y=3-2r\ (r\in\mathbb{R})\\z=1+r\end{cases}.$$

Suorien leikkauspistettä vastaavat parametrien *t* ja *r* arvot ovat yhtälöryhmän

$$\begin{cases}4-4t=3-r\\-4+4t=3-2r\\4t=1+r\end{cases}$$

ratkaisut $r=2$ ja $t=\frac{3}{4}$. Kun $r=2$ sijoitetaan suoran *AC* yhtälöön saadaan leikkauspiste $(1, -1, 3)$.

b) *xy*-tason pisteillä *z*-koordinaatti $1+r$ on nolla. Yhtälön $1+r=0$ ratkaisu on $r=-1$. Tätä vastaava suoran piste on

$$\begin{cases}x=3-(-1)=4\\y=3-2(-1)=5\\z=1-1=0\end{cases}$$

joten kysytty leikkauspiste on $(4, 5, 0)$.

404. **a)** Päätellään suorien välinen kulma suorien suuntavektoreiden välisestä kulmasta. Lasketaan vektorien pituudet ja välinen pistetulo.

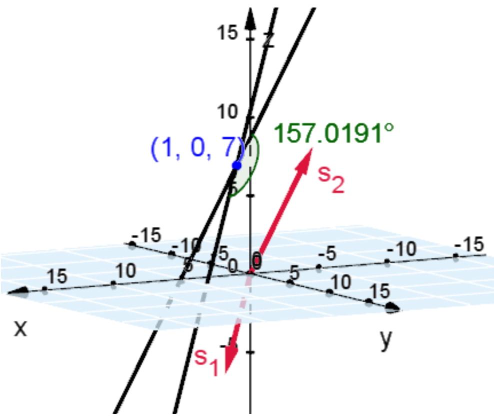
$$|\overline{s}_1| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = 7$$
$$|\overline{s}_2| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 8^2} = 9$$

$$\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 = 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 - 6 \cdot 8 = -58$$

$$\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 = |\overline{s}_1| \cdot |\overline{s}_2| \cdot \cos(\overline{s}_1, \overline{s}_2), \text{ joten}$$
$$\cos(\overline{s}_1, \overline{s}_2) = \frac{\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2}{|\overline{s}_1| \cdot |\overline{s}_2|}$$
$$\cos(\overline{s}_1, \overline{s}_2) = \frac{-58}{7 \cdot 9}$$
$$\sphericalangle(\overline{s}_1, \overline{s}_2) = 157{,}01...^\circ \approx 157{,}0^\circ$$

Koska suuntavektoreiden välinen kulma on tylppä, on suorien välinen kulma vektoreiden välisen kulman suplementtikulma 180° − 157,0° = 23,0°.

b) Piirretään suorat pisteen (1, 0, 7) ja suuntavektoreiden $\overline{s}_1$ ja $\overline{s}_2$ avulla.



Saadaan sama kulma 180° − 157,0° = 23,0°.

405. Suorien suuntavektorin komponentit luetaan parametrimuotoisen yhtälön parametrin (*t* tai *r*) kertoimista.

$$\overline{s}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ ja } \overline{s}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Päätellään suorien välinen kulma niiden suuntavektoreiden välisestä kulmasta. Lasketaan vektorien pituudet ja välinen pistetulo.

$$|\overline{s}_1| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{66}$$
$$|\overline{s}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 = 4 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 + 7 \cdot 5 = 31$$

$$\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 = |\overline{s}_1| \cdot |\overline{s}_2| \cdot \cos(\overline{s}_1, \overline{s}_2), \text{ joten}$$
$$\cos(\overline{s}_1, \overline{s}_2) = \frac{\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2}{|\overline{s}_1| \cdot |\overline{s}_2|}$$
$$\cos(\overline{s}_1, \overline{s}_2) = \frac{31}{\sqrt{66} \cdot \sqrt{26}}$$
$$\sphericalangle(\overline{s}_1, \overline{s}_2) = 41{,}55\ldots^\circ \approx 41{,}6^\circ$$

Koska suuntavektorien välinen kulma on terävä on se suoraan suorien välinen kulma, jon on siis 41,6°.

Suora leikkaa *yz*-tason, kun *x* = 0 eli kun 5 + 4*t* = 0, josta $t = -\frac{5}{4}$.

$$\begin{cases} x = 5 + 4 \cdot (-\frac{5}{4}) = 0 \\ y = 2 - (-\frac{5}{4}) = \frac{13}{4} \\ z = 3 + 7 \cdot (-\frac{5}{4}) = -\frac{23}{4} \end{cases}$$

Suoraa leikkaa *yz*-tason pisteessä $(0, \frac{13}{4}, -\frac{23}{4})$.

406. Muodostetaan suorien yhtälöt.

Suora *a*:
$P = (8, 5, 7)$ ja $\overline{s} = 83\overline{i} + 33\overline{j} + 66\overline{k}$

Suoran *a* yhtälö on
$$\begin{cases} x = 8 + 83t \\ y = 5 + 33t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 7 + 66t \end{cases}$$

Suora *b*:
Suoran *b* eräs suuntavektori on $\overline{AB} = \begin{bmatrix} -25-3 \\ 12-1 \\ -9-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 \\ 11 \\ -11 \end{bmatrix}$.

Suoran *b* yhtälö on

$$\begin{cases} x = 3 - 28r \\ y = 1 + 11r \quad (r \in \mathbb{R}). \\ z = 2 - 11r \end{cases}$$

Suorien leikkauspistettä vastaavat parametrien *t* ja *r* arvot ovat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 8 + 83t = 3 - 28r \\ 5 + 33t = 1 + 11r \\ 7 + 66t = 2 - 11r \end{cases}$$

ratkaisut $r = \frac{1}{11}$ ja $t = -\frac{1}{11}$.

Leikkauspiste saadaan sijoittamalla toinen ratkaistuista parametrin arvoista vastaavaan yhtälöön. Sijoitetaan $r = \frac{1}{11}$ suoran *b* yhtälöön.
$$\begin{cases} x = 3 - 28 \cdot \frac{1}{11} = \frac{5}{11} \\ y = 1 + 11 \cdot \frac{1}{11} = 2 \\ z = 2 - 11 \cdot \frac{1}{11} = 1 \end{cases}$$
Leikkauspiste on $(\frac{5}{11}, 2, 1)$.

Suorien välinen kulma saadaan suuntavektorien välisestä kulmasta.

Lasketaan suoran *a* suuntavektorin $\overline{s}$ ja suoran *b* suuntavektorin $\overline{AB}$ pistetulo, sekä molempien vektorien pituudet.

$$\overline{s}\cdot\overline{AB} = 83\cdot(-28)+33\cdot 11+66\cdot(-11) = -2687$$

$$|\overline{s}| = \sqrt{83^2+33^2+66^2} = \sqrt{12334}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-28)^2+11^2+(-11)^2} = 3\sqrt{114}$$

$$\cos(\overline{s},\overline{AB}) = \frac{\overline{s}\cdot\overline{AB}}{|\overline{s}||\overline{AB}|}$$

$$\cos(\overline{s},\overline{AB}) = \frac{-2687}{\sqrt{12334}\cdot 3\sqrt{114}}$$

$$\sphericalangle(\overline{s},\overline{AB}) = 139{,}055...^\circ$$

Kahden suoran välinen kulma on suuruudeltaan välillä [0°, 90°].
Suorien *a* ja *b* välien kulma on 180° − 139,055…° = 40,944…° ≈ 40,9°.

Leikkauspiste on $(\frac{5}{11}, 2, 1)$ ja vektoreiden välien kulma on 40,9°.

407. Suoran eräs suuntavektori on

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} -3-3 \\ -1-1 \\ 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 3-6t \\ y = 1-2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2+2t \end{cases}.$$

a) *z*-akselin leikkauspisteessä $x = 0$ ja $y = 0$. Ratkaistaan t ehdosta $x = 0$.

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ 3-6t &= 0 \\ -6t &= -3 \\ t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Varmistetaan, että *y*-koordinaatti on tällöin 0:

$$y = 1-2t = 1-2\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

Lasketaan *z*-koordinaatti:

Kun $t = \frac{1}{2}$, on $z = 2+2t = 2+2\cdot\frac{1}{2} = 2+1 = 3.$

Leikkauspiste on (0, 0, 3).

b) *x*-akselin leikkauspisteessä $y = 0$ ja $z = 0$.

Ratkaistaan t ehdosta $z = 0$:
$2 + 2t = 0$ eli $t = -1$.
Tällöin kuitenkin $y = 1 - 2t = 1 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3 \neq 0$.

Suoralla ei siis ole pistettä, jolla $z = 0$ ja $y = 0$.
Näin ollen suora ei leikkaa *x*-akselia.

408. **a)** Esimerkiksi ristikkäiset suorat eivät leikkaa. Tällaisia ovat esimerkiksi *z*-akseliin yhtyvä suora ja pisteen (1, 0, 0) kautta kulkeva *y*-akselin suuntainen suora. Näillä ei ole yhtään yhteistä pistettä, joissa *x*-koordinaatit olisivat yhtä suuret, sillä toisella suoralla $x = 0$ ja toisella $x = 1$.

Kyseisten suorien yhtälöt ovat

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases} (t\in\mathbb{R}) \text{ ja } \begin{cases} x=1 \\ y=r \\ z=0 \end{cases} (r\in\mathbb{R}).$$

Vaihtoehtoinen ratkaisu:

Suorien leikkauspisteessä kummankin suoran *x*-koordinaatit ovat yhtä suuret. Muodostetaan suorat, joiden *x*-koordinaatit ovat aina eri suuret. Esimerkiksi toisella suoralla $x = 0$ ja toisella $x = 1$.

Kyseisten suorien yhtälöiksi käy esimerkiksi

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases} (t\in\mathbb{R}) \text{ ja } \begin{cases} x=1 \\ y=r \\ z=0 \end{cases} (r\in\mathbb{R}).$$

Suorat ovat selvästi erisuuntaiset (suuntavektorit ovat $\overline{j}$ ja $\overline{k}$.)

b) Jos suoran pisteiden *z*-koordinaatti on aina eri suuri kuin nolla, yksikään suoran piste ei ole *xy*-tasossa.

Esimerkiksi käy suora $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=3 \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

c) Esimerkiksi *z*-akselin suuntainen suora, joka kulkee jonkin sellaisen *xy*-tason pisteen kautta, joka ei ole koordinaattiakselilla ei leikkaa mitään koordinaattiakselia.

Esimerkiksi:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$$

Vaihtoehtoinen ratkaisu:
Suoran ja koordinaattiakselin leikkauspisteessä kaksi koordinaattia ovat nollia. Laaditaan suoran yhtälö, jossa kaksi koordinaattia on aina eri suuria kuin nolla. Tällöin vain yksi koordinaatti voi olla nolla eikä näin ollen suora leikkaa yhtäkään koordinaattiakselia.

Esimerkiksi: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$

409. **a)** Suora on kohtisuorassa *xy*-tasoa vastaan, jos sen eräs suuntavektori on *z*-akselin suuntainen vektori $\overline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Suoran yhtälö on $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + t \end{cases}$.

b) Suora on yhdensuuntainen *y*-akselin kanssa, jos sen eräs suuntavektori on *y*-akselin suuntainen vektori $\overline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Suoran yhtälö on $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t\,(t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 \end{cases}$.

c) Suoran suuntavektori on $\overline{s} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Suoran yhtälö on $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

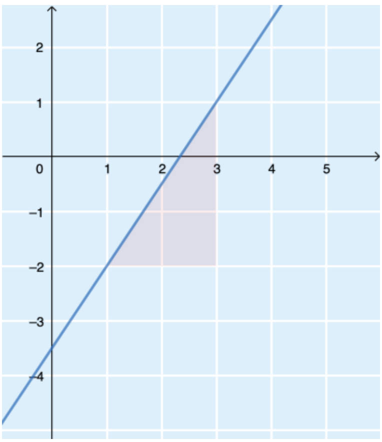
VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

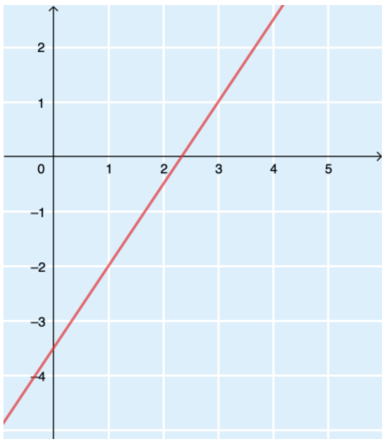
410. **a)** Suuntavektori luetaan parametrin *t* kertoimista. Suoran eräs suuntavektori $\bar{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Suuntavektori kertoo, että on kuljettava kaksi oikealle ja kolme ylös, joten kulmakerroin on $k = \frac{3}{2}$.

b) Parametria $t = 0$ vastaava piste on $(1, -2)$. Suoran yhtälö saadaan kaavalla $y - y_0 = k(x - x_0)$:

$y - (-2) = \frac{3}{2}(x - 1)$, josta $3x - 2y - 7 = 0$.

c) Piirretään suora tehtäväannon parametrimuotoisen yhtälön avulla. Voidaan huomata, että kulmakerroin on $\frac{3}{2}$ ja piste $(1, -2)$ on suoralla. Piirretään lisäksi suora $3x - 2y - 7 = 0$ ja voidaan varmistua, että suorat ovat sama suora.





411. Kun yhtälöstä $3x - 5y + 10 = 0$ ratkaistaan y, saadaan $y = \frac{3}{5}x + 2$. Suoran kulmakerroin on $k = \frac{3}{5}$, mistä nähdään suoran eräs suuntavektori $\overline{s} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Suuntavektorin lisäksi tarvitaan jokin suoran piste. Tämä saadaan ratkaistua yhtälöstä: Kun $x = 0$, on $3 \cdot 0 - 5y + 10 = 0$, josta $y = 2$. Eräs suoran piste on $(0, 2)$.

Suoran parametrimuotoinen yhtälö on $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Vaihtoehtoinen ratkaisu:

Kun yhtälöstä $3x - 5y + 10 = 0$ ratkaistaan y, saadaan $y = \frac{3}{5}x + 2$.

Tässä x voi olla mikä vain luku, kunhan $y = \frac{3}{5}x + 2$.

Tästä saadaan suoran parametrimuotoinen yhtälö:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{5}t + 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

412. **a)** Suoralla *a* on piste $P = (-5, 4)$ ja

suoran eräs suuntavektori on $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2-(-5) \\ 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Suoran *a* parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = -5+3t \\ y = 4-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Suoralla *b* on piste $A = (6, 3)$ ja

suoran eräs suuntavektori on $\bar{v} = \begin{bmatrix} 8-6 \\ 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Suoran *b* parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 6+2r \\ y = 3+r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

Suorien välinen kulma saadaan suuntavektoreiden avulla.

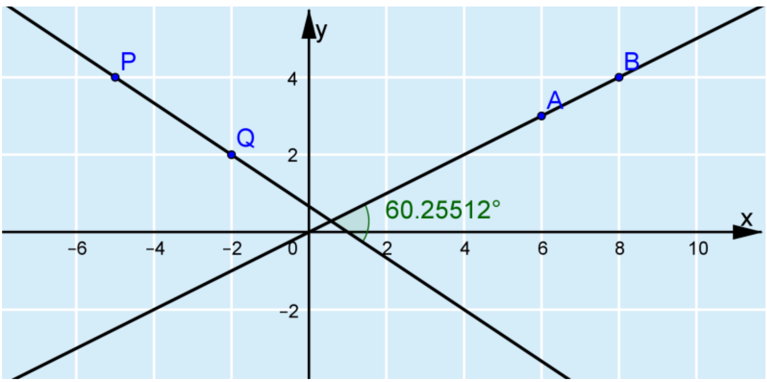
$$\cos(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$$

$$\cos(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$\sphericalangle(\bar{u}, \bar{v}) = 60,255...^\circ \approx 60,3^\circ$$

Suorien välinen kulma on 60,3°.

b)



413. Pisteestä *A* lähtevä ammus osuu pisteeseen *B* täsmälleen silloin, kun $\overline{OA}+t\cdot\overline{c}=\overline{OB}$ jollain positiivisella *t* (negatiivinen *t* tarkoittaa että osumakohta olisi päinvastaisessa suunnassa kuin mihin ammuttiin).

Määritetään ensin pisteiden *A* ja *B* paikkavektorit.

$$\overline{OA}=\overline{OP}+\overline{a}=\begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\0\end{bmatrix}$$

$$\overline{OB}=\overline{OP}+\overline{b}=\begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\7\\2\end{bmatrix}$$

Ratkaistaan *t*.

$$\overline{OA}+t\cdot\overline{c}=\overline{OB}$$

$$\begin{bmatrix}3\\5\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\7\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3-t\\5-t\\-t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\7\\2\end{bmatrix}$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases}3-t=5\\5-t=7\\-t=2\end{cases}$$, jonka ratkaisu on $t = -2$.

Koska positiivista *t* ei löytynyt, ammus ei osu pisteessä *B* olevaan pelihahmoon.

414. Suorien yhtälön ovat parametrimuodossa

$$\begin{cases} x=-1+4t \\ y=2-t \\ z=-7+8t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x=1+2r \\ y=-2+3r \\ z=5-6r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

Suorien leikkauspistettä vastaavat parametrien t ja r arvot ovat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} -1+4t=1+2r \\ 2-t=-2+3r \\ -7+8t=5-6r \end{cases}$$

ratkaisut. Kahden ensimmäisen yhtälön muodostaman yhtälöparin $\begin{cases} -1+4t=1+2r \\ 2-t=-2+3r \end{cases}$ ratkaisu on $t = r = 1$. Kun nämä arvot sijoitetaan kolmanteen yhtälöön saadaan tulos $1 = -1$, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Se merkitsee suorilla ei ole yhteistä (leikkaus)pistettä eli että ne ovat ristikkäiset.

Suoran a eräs suuntavektori on $\overline{s}_a = 4\overline{i} - \overline{j} + 8\overline{k}$.

Suoran b eräs suuntavektori on $\overline{s}_b = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 6\overline{k}$.

Lasketaan suuntavektoreiden välinen kulma.

$$\overline{s}_a \cdot \overline{s}_b = 4\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 8\cdot(-6) = 8-3-48 = -43$$
$$|\overline{s}_a| = \sqrt{4^2+(-1)^2+8^2} = \sqrt{81} = 9$$
$$|\overline{s}_b| = \sqrt{2^2+3^2+(-6)^2} = \sqrt{49} = 7$$
$$\cos(\overline{s}_a, \overline{s}_b) = \frac{\overline{s}_a \cdot \overline{s}_b}{|\overline{s}_a||\overline{s}_b|} = \frac{-43}{9\cdot 7} = \frac{-43}{63}$$
$$\sphericalangle(\overline{s}_a, \overline{s}_b) = 133,04...^\circ$$

Kahden suoran välinen kulma on suuruudeltaan välillä [0°, 90°].
Suorien a ja b välinen kulma on $180° - 133,04…° = 46,95…° \approx 47,0°$.

415. **a)** Muodostetaan suoran *a* yhtälö.

Suoran *a* eräs suuntavektori on $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = (6-2)\overline{i} + (8-5)\overline{j} + (2-7)\overline{k} = 4\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{k}$$

Piste $A = (2, 5, 7)$ on suoralla.

Suoran *a* parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5 + 3t \, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 7 - 5t \end{cases}$$

Projektiosuoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$$

Pisteiden *A* ja *B* projektiopisteet *xy*-tasossa ovat $A' = (2, 5, 0)$ ja $B' = (6, 8, 0)$. Mikäli tarkastellaan vain *xy*-tasoa, pisteet ovat $A' = (2, 5)$ ja $B' = (6, 8)$. Muodostetaan näiden pisteiden kautta kulkevan suoran yhtälö.

Suoran kulmakerroin on $k = \dfrac{8-5}{6-2} = \dfrac{3}{4}$.

Suora kulkee pisteen (2, 5) kautta. Suoran yhtälö muodostetaan kaavalla $y - y_0 = k(x - x_0)$, johon tiedot sijoitetaan.

$y - 5 = \frac{3}{4}(x - 2) \quad || \cdot 4$

$4y - 20 = 3(x - 2)$

$4y - 20 = 3x - 6$

$3x - 4y + 14 = 0$

xy-tasossa ($z = 0$) projektiosuoran normaalimuotoinen yhtälö on $3x - 4y + 14 = 0$.

b) Projektiosuora on *xy*-tasossa, joten suoran *a* ja projektiosuoran leikkauspiste on myös *xy*-tasossa. Näin ollen leikkauspiste on se suoran *a* piste, jonka *z*-koordinaatti on nolla.

$$\begin{aligned}7-5t&=0\\ t&=\frac{7}{5}.\end{aligned}$$

Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit suoran *a* yhtälöstä, kun $t=\frac{7}{5}$.

$$\begin{cases}x=2+4\cdot\frac{7}{5}=\frac{38}{5}=7\frac{3}{5}\\ y=5+3\cdot\frac{7}{5}=\frac{46}{5}=9\frac{1}{5}\\ z=0\end{cases}$$

Leikkauspiste on $(\frac{38}{5},\frac{46}{5},0)$.

Lasketaan suoran *a* ja sen projektiosuoran suuntavektorien välinen kulma.

$$\begin{aligned}\overline{s}_a&=4\overline{i}+3\overline{j}-5\overline{k}\\ \overline{s}_p&=4\overline{i}+3\overline{j}\end{aligned}$$

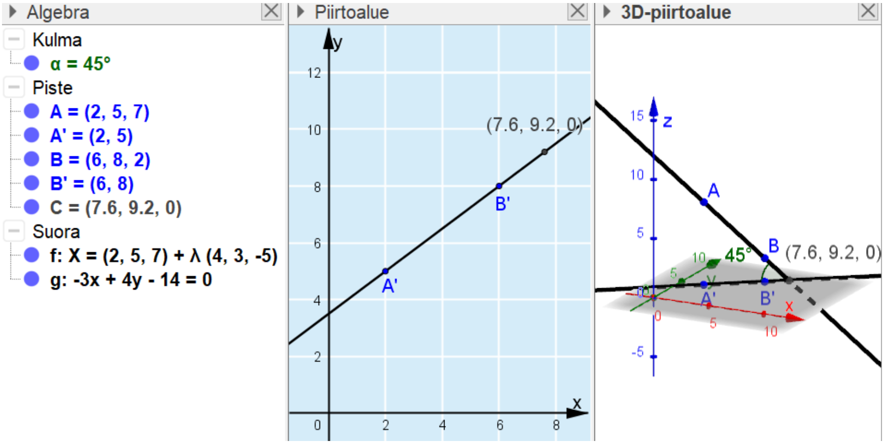
$$\overline{s}_a\cdot\overline{s}_p=4\cdot4+3\cdot3-5\cdot0=25$$

$$\begin{aligned}|\overline{s}_a|&=\sqrt{4^2+3^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}\\ |\overline{s}_p|&=\sqrt{4^2+3^2}=5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\overline{s}_a,\overline{s}_b)&=\frac{25}{5\sqrt{2}\cdot5}\\ \cos(\overline{s}_a,\overline{s}_b)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sphericalangle(\overline{s}_a,\overline{s}_b)&=45^\circ\end{aligned}$$

Suorien välinen kulma on 45°.

c) Piirretään suora 3D-näkymään pisteiden *A* ja *B* kautta sekä projektiosuora 2D-näkymään pisteiden *A'* ja *B'* kautta.



416. Muodostetaan sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden A ja B kautta.

Suoran suuntavektori on $\overline{AB} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 1-(-1) \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Suoran yhtälö on:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \ \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - t \end{cases}.$$

Sijoitetaan pisteen $Q = (-12, 1, 17)$ koordinaatit suoran yhtälöön.

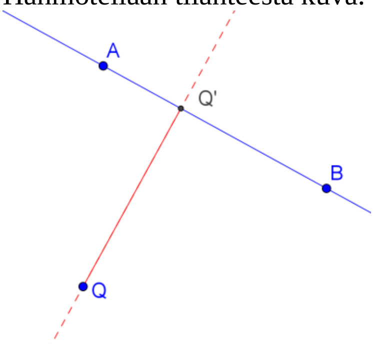
$$\begin{cases} -12 = 1 + 2t \\ 1 = -1 + 2t \\ 17 = 3 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -\dfrac{13}{2} \\ t = 1 \\ t = -14 \end{cases}$$

Piste Q ei toteuta suoran yhtälöä, joten piste Q ei ole pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla.

Määritetään pisteen Q projektiopiste Q' suoralla ja määritetään pisteiden Q ja Q' etäisyys.

Hahmotellaan tilanteesta kuva.



Koska piste Q' on suoralla, sen koordinaatit ovat jollakin t:n arvolla $(1 + 2t, -1 + 2t, 3 - t)$

Määritetään vektori $\overline{QQ'}$.

$$\overline{QQ'} = \begin{bmatrix} 1+2t+12 \\ -1+2t-1 \\ 3-t-17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t+13 \\ 2t-2 \\ -t-14 \end{bmatrix}$$

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{QQ'}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten niiden pistetulo on nolla.

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{QQ'} &= 2 \cdot (2t+13) + 2 \cdot (2t-2) - 1 \cdot (-t-14) \\ &= 4t + 26 + 4t - 4 + t + 14 \\ &= 9t + 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9t + 36 &= 0 \\ 9t &= -36 \quad \|:9 \\ t &= -4 \end{aligned}$$

Määritetään vektori $\overline{QQ'}$, kun $t = -4$ ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{QQ'} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-4) + 13 \\ 2 \cdot (-4) - 2 \\ -(-4) - 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left|\overline{QQ'}\right| = \sqrt{5^2 + (-10)^2 + (-10)^2} = \sqrt{225} = 15$$

Piste Q on etäisyydellä 15 pisteiden A ja B kautta kulkevasta suorasta.

Huomautus:
Koska pisteen Q etäisyys suorasta AB on 15, se osoittaa samalla, että Q ei ole suoralla AB. Ratkaisun alussa tehty pisteen Q koordinaattien sijoittaminen suoran AB yhtälöön ei siis ole välttämätöntä.

Vaihtoehtoinen ratkaisu:

Yllä olevaan tapaan määritetään $\overline{QQ'} = \begin{bmatrix} 1+2t+12 \\ -1+2t-1 \\ 3-t-17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t+13 \\ 2t-2 \\ -t-14 \end{bmatrix}$.

Sen jälkeen voidaan edetä myös seuraavasti:

$$\left|\overline{QQ'}\right| = \sqrt{(2t+13)^2 + (2t-2)^2 + (-t-14)^2} = \sqrt{9t^2 + 72t + 369}$$

Kysytty etäisyys on lausekkeen $\sqrt{9t^2 + 72t + 369}$ pienin arvo. Tämä saadaan, kun juurrettava $f(t) = 9t^2 + 72t + 369$ saa pienimmän arvona. Ylöspäin aukeavan paraabelin pienin arvo on paraabelin huippukohdassa eli derivaatan nollakohdassa.

$f'(t) = 18t + 72$

Derivaatan nollakohdassa $18t + 72 = 0$ eli $t = -4$.

Näin ollen $\left|\overline{QQ'}\right| = \sqrt{9 \cdot (-4)^2 + 72 \cdot (-4) + 369} = 15$.

417. **a)** Projektiopiste xy-tasolla on (18, 35, 0).
Etäisyys xy-tasosta on pisteen z-koordinaatti 22.

b) Projektiopiste P' x-akselilla on (18, 0, 0).

Pisteiden P ja P' etäisyys on vektorin $\overline{PP'}$ pituus.

$$\overline{PP'} = \begin{bmatrix} 18-18 \\ 0-35 \\ 0-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -35 \\ -22 \end{bmatrix}$$

$$\left|\overline{PP'}\right| = \sqrt{(-35)^2 + (-22)^2} = \sqrt{1709}$$

c) Projektiopisteen koordinaatit ovat jollakin t:n arvolla
$P' = (-1 + 3t, 2 + 6t, 4 - 4t)$.

Pisteen P etäisyys projektiopisteestä P' on vektorin $\overline{PP'}$ pituus.

$$\overline{PP'} = \begin{bmatrix} -1+3t-18 \\ 2+6t-35 \\ 4-4t-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t-19 \\ 6t-33 \\ -4t-18 \end{bmatrix}$$

Vektori $\overline{PP'}$ on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{s} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$

vastaan, joten niiden pistetulo on nolla.

$$\begin{aligned} \overline{PP'} \cdot \overline{s} &= (3t-19)\cdot 3 + (6t-33)\cdot 6 + (-4t-18)\cdot(-4) \\ &= 9t - 57 + 36t - 198 + 16t + 72 \\ &= 61t - 183 \end{aligned}$$

Näin ollen $61t - 183 = 0$, josta $t = 3$.

Siis $\overline{PP'} = \begin{bmatrix} 3\cdot 3-19 \\ 6\cdot 3-33 \\ -4\cdot 3-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -15 \\ -30 \end{bmatrix}$

ja $\left|\overline{PP'}\right| = \sqrt{(-10)^2 + (-15)^2 + (-30)^2} = 35$.

Määritetään piste $P' = (-1 + 3t, 2 + 6t, 4 - 4t)$, kun $t = 3$.
$P' = (-1 + 3 \cdot 3, 2 + 6 \cdot 3, 4 - 4 \cdot 3) = (8, 20, -8)$.

Projektiopiste on $P' = (8, 20, -8)$ ja pisteen P etäisyys suorasta on 35.

418. **a)** Pisteen P projektio x-akselilla on $P' = (7, 0, 0)$.

Lasketaan vektorin $\overline{PP'}$ pituus.

$$\overline{PP'} = \begin{bmatrix} 7-7 \\ -4-0 \\ 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|\overline{PP'}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Pisteen P etäisyys x-akselista on 5.

b) Suoran eräs suuntavektori on $\overline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Piste (3, 8, 8) on suoralla.

Suoran yhtälö on

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 \qquad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 8 \end{cases}$$

Pisteen P projektio suoralla on $P' = (3 + t, 8, 8)$.

Määritetään vektori $\overline{PP'}$.

$$\overline{PP'} = \begin{bmatrix} 3+t-7 \\ 8-(-4) \\ 8-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-4 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Vektori $\overline{PP'}$ on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{i}$ vastaan, joten niiden pistetulo on nolla.

$(t - 4) \cdot 1 = 0$

$t = 4$

Vektori $\overline{PP'} = \begin{bmatrix} 4-4 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$.

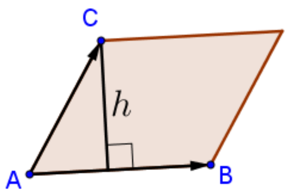
$$|\overline{PP'}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

Piste P on etäisyydellä 13 suorasta.

Vaihtoehtoinen ratkaisu vähillä laskuilla:
Pistettä *P* lähimpänä oleva pisteen *A* kautta kulkevan *x*-akselin suuntaisen suoran piste on se suoran piste, jolla on sama *x*-koordinaatti kuin pisteellä *P*. Näin ollen kysytty etäisyys on pisteen $P = (7, -4, 3)$ ja pisteen (7, 8, 8) välinen etäisyys $\sqrt{(8-(-4))^2+(8-3)^2}=13$.

419. Mikäli pisteen *C* etäisyys suorasta *AB* on suurempi kuin nolla, vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ virittävät suunnikkaan, jonka pinta-ala on $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

Toisaalta suunnikkaan pinta-ala on $\left|\overline{AB}\right|\cdot h$, missä *h* on suunnikkaan korkeus kantaa $\left|\overline{AB}\right|$ vasten mitattuna. Toisin sanoen *h* on pisteen *C* etäisyys suorasta *AB*.



Näin ollen $\left|\overline{AB}\right|\cdot h=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$, josta saadaan $h=\dfrac{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}{\left|\overline{AB}\right|}$.

Lasketaan tarvittavat tiedot, kun $A = (1, 6, 4)$, $B = (3, 8, 1)$ ja $C = (8, 9, 5)$.

$$\overline{AB}=\begin{bmatrix}2\\2\\-3\end{bmatrix} \text{ ja } \overline{AC}=\begin{bmatrix}7\\3\\1\end{bmatrix}$$

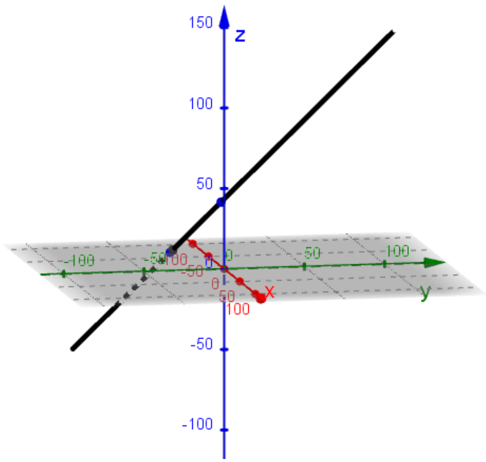
$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{bmatrix}11\\-23\\-8\end{bmatrix}$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{714} \text{ ja } \left|\overline{AB}\right|=\sqrt{17}$$

Nyt saadaan $h = \frac{\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|}{\left|\overline{AB}\right|} = \frac{\sqrt{714}}{\sqrt{17}} = \sqrt{42}.$

Pisteen C etäisyys suorasta AB on $\sqrt{42}$.

420. Piirretään tilanteesta kuva.



Määritetään raketin lentorataa kuvaavan suoran yhtälö.

$$\begin{cases} x = -70 + 3t \\ y = -20 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$$

Kun raketti ylittää rantaviivaa kuvaavan x-akselin, on y-koordinaatti nolla.

$$y = -20 + t = 0$$
$$t = 20$$

Tällöin raketin korkeus, eli pisteen z-koordinaatti on $2 \cdot 20 = 40$.

Raketti on korkeudella 40 m.

421. Etäisyys on lyhimmillään suoran $x = 30 + 2t,\ y = 20 + 6t,\ z = 1 + t,\ t \in \mathbb{R}$ pisteessä, joka on lähimpänä pistettä *P* = (27, 25, 0). Kyseinen piste on pisteen *P* projektiopiste *P*’ suoralla.

P’ = (30 + 2*t*, 20 + 6*t*, 1 + *t*) jollain parametrin *t* arvolla.

$$\overline{PP'} = \begin{bmatrix} 30 + 2t - 27 \\ 20 + 6t - 25 \\ 1 + t - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2t \\ -5 + 6t \\ 1 + t \end{bmatrix}$$

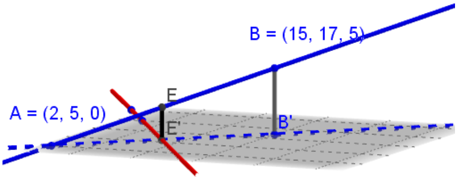
Vektori $\overline{PP'}$ on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ vastaan, joten niiden pistetulo on nolla.

$$\overline{PP'} \cdot \overline{s} = 0$$
$$\begin{bmatrix} 3 + 2t \\ -5 + 6t \\ 1 + t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$
$$(3 + 2t) \cdot 2 + (-5 + 6t) \cdot 6 + (1 + t) \cdot 1 = 0$$
$$41t - 23 = 0$$
$$t = \tfrac{23}{41}$$

Pisteen *P’ z*-koordinaatti on $1 + t = 1 + \tfrac{23}{41} = \tfrac{64}{41} = 1{,}560... \approx 1{,}6.$

Lentokone lentää noin 1,6 km korkeudella, kun etäisyys mittalaitteesta on lyhimmillään.

422. Piirretään tilanteesta kuva.



Merkitään $A = (2, 5, 0)$ ja $B = (15, 17, 5)$.

Ilmalaivan kulkua kuvaavan suoran eräs suuntavektori on
$\overline{AB} = (15-2)\overline{i} + (17-5)\overline{j} + (5-0)\overline{k} = 13\overline{i} + 12\overline{j} + 5\overline{k}$.
Piste $A = (2, 5, 0)$ on suoralla.

Suoran yhtälö on
$$\begin{cases} x = 2 + 13s \\ y = 5 + 12s \ \ (s \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 5s \end{cases}$$

Suoran projektio xy-tasolla on
$$\begin{cases} x = 2 + 13s \\ y = 5 + 12s \ \ (s \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$$

Määritetään suoran projektion ja moottoritietä kuvaavan suoran leikkauspisteet.

Moottoritietä kuvaavan suoran parametriesitys on:
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 25 - 5t \ \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$$

Lasketaan leikkauspiste.

$$\begin{cases} 2+13s=3t \\ 5+12s=25-5t \\ 0=0 \end{cases}$$

$s=\dfrac{50}{101}$ ja $t=\dfrac{284}{101}$

Ilmalaivan korkeus saadaan sijoittamalla $s = \dfrac{50}{101}$ ilmalaivan kulkua kuvaavan suoran yhtälöön.

$z = 0 + 5s = 5\cdot\dfrac{50}{101}=\dfrac{250}{101}=2,47...\approx 2,5\ (\text{km})$

Ilmalaivan korkeus on 2,5 km.
Ilmalaiva etenee 10 minuutissa eli $\frac{1}{6}$ tunnissa vektorin $\overline{AB}$ verran.
Sen projektio maantasoon on $13\overline{i}+12\overline{j}$.
Ilmalaivan maanopeus on

$$\frac{\sqrt{13^2+12^2}}{\frac{1}{6}}=6\sqrt{313}=106,15...\approx 106\ \text{km/h}.$$

423. Origon ja pisteen (1, 2, 3) kautta kulkevan suoran

suuntavektori on $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ja suoran yhtälö $\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ kuvaaja on $z = x^2 + y^2$. Sijoitetaan tähän suoran koordinaatit ja ratkaistaan t.

$$3t=t^2+(2t)^2$$
$$5t^2-3t=0$$
$$t=0 \quad \text{tai} \quad t=\tfrac{3}{5}$$

Leikkauspisteiden koordinaatit ovat

$$\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases} \text{ ja } \begin{cases}x=\tfrac{3}{5}\\y=\tfrac{6}{5}\\z=\tfrac{9}{5}\end{cases}$$

Suora leikkaa funktion f kuvaajan pisteissä (0, 0, 0) ja $(\tfrac{3}{5}, \tfrac{6}{5}, \tfrac{9}{5})$.

424. **a)** Sijoitetaan suoran $x=3+2t$, $y=6+4t$, $z=-t$, $t\in\mathbb{R}$, koordinaatit pallon yhtälöön $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ja ratkaistaan t.

$$(3+2t)^2+(6+4t)^2+(-t)^2=9$$
$$21t^2+60t+36=0$$
$$t=-2 \quad \text{tai} \quad t=-\tfrac{6}{7}$$

Arvoa $t = -2$ vastaava leikkauspiste:
$x=3+2(-2)=-1$, $y=6+4(-2)=-2$, $z=-(-2)=2$

Arvoa $t = -2$ vastaava leikkauspiste:
$x=3+2(-\tfrac{6}{7})=\tfrac{9}{7}$, $y=6+4(-\tfrac{6}{7})=\tfrac{18}{7}$, $z=-(-\tfrac{6}{7})=\tfrac{6}{7}$

Pallon ja suoran leikkauspisteet ovat (−1, −2, 2) ja $(\tfrac{9}{7}, \tfrac{18}{7}, \tfrac{6}{7})$.

b) Pallo leikkaa z akselin, kun $x = 0$ ja $y = 0$.
Yhtälöstä $0^2 + 0^2 + z^2 = 9$ saadaan $z = 3$ tai $z = -3$.

Origokeskisen pallon säde on siis kolme. Suorat, joiden z-koordinaatti on aina 3, eivät kohtaa palloa muualla kuin pisteessä (0, 0, 3).

Palloa pisteessä (0, 0, 3) sivuavien suorien yhtälöiksi kelpaavat siis esimerkiksi seuraavat suorat:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ ja } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Vaihtoehtoinen ratkaisu:

Pallo leikkaa z akselin, kun $x = 0$ ja $y = 0$.
Yhtälöstä $0^2 + 0^2 + z^2 = 9$ saadaan $z = 3$ tai $z = -3$.

Valitaan sivuamispisteeksi pallon piste (0, 0, 3).
Koska pallo on origokeskinen, pisteen (0, 0, 3) kautta kulkevat xy-tason suuntaiset suorat eivät kohtaa palloa muualla kuin pisteessä (0, 0, 3).

Valitaan suorien suuntavektoreiksi vektorit, joissa z-komponentti on 0:

$$\overline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \overline{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ja } \overline{s}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Suuntavektoreita vastaavat pisteen (0, 0, 3) kautta kulkevien suorien yhtälöt ovat

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ ja } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

425. $A = (0, -4, 0)$, $B = (2, 0, 0)$ ja $C = (-2, -2, 6)$. Kolmion mediaanit leikkaavat samassa pisteessä. Määritetään kaksi mediaani ja niiden leikkauspiste.

Sivun AC keskipiste on $D = (\frac{0-2}{2}, \frac{-4-2}{2}, \frac{0+6}{2}) = (-1, -3, 3)$.

Mediaanin BD eräs suuntavektori on $\overline{BD} = \begin{bmatrix} -1-2 \\ -3-0 \\ 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Mediaanin BD yhtälö on $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = -3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3t \end{cases}$.

Sivun BC keskipiste on $E = (\frac{2-2}{2}, \frac{0-2}{2}, \frac{0+6}{2}) = (0, -1, 3)$.

Mediaanin AE eräs suuntavektori on $\overline{AE} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ -1-(-4) \\ 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Mediaanin AE yhtälö on $\begin{cases} x = 0 \\ y = -4+3r \quad (r \in \mathbb{R}) \\ z = 3r \end{cases}$.

Mediaanien BD ja AE leikkauspiste saadaan yhtälöryhmän avulla.

Yhtälöryhmän $\begin{cases} 2-3t = 0 \\ -3t = -4+3r \\ 3t = 3r \end{cases}$ ratkaisu on $t = r = \frac{2}{3}$.

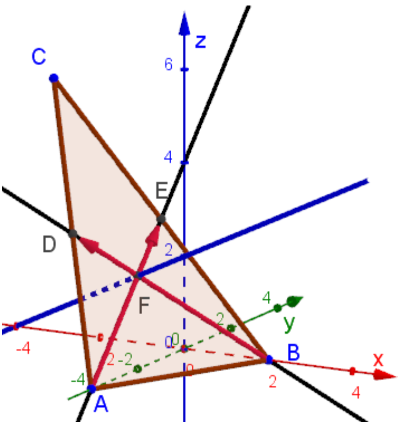
Mediaanien leikkauspisteessä $\begin{cases} x = 0 \\ y = -4+3\cdot\frac{2}{3} = -2 \\ z = 3\cdot\frac{2}{3} = 2 \end{cases}$ eli leikkauspiste on

$F = (0, -2, 2)$.

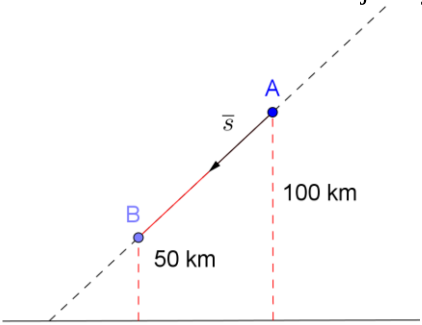
Suoran suuntavektorin on oltava kolmiota vastaan kohtisuorassa, joten eräs suuntavektori on ristitulo $\overline{BD} \times \overline{AE} = \begin{bmatrix} -18 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix}$.

Mediaanien leikkauspisteen $F = (0, -2, 2)$ kautta kulkeva kolmiota vasten kohtisuorassa olevan suoran yhtälö on

$$\begin{cases} x = -18t \\ y = -2 + 9t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 9t \end{cases}.$$



426. Hahmotellaan kuva tilanteesta. Merkitään kirjaimella A pistettä, jossa meteoriitti saavutti ilmakehän ja kirjaimella B pistettä, jossa se tuhoutui.



Pisteen A koordinaatit ovat (a, b, 100). Suoran AB suuntavektori on $\bar{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, ja suoran AB yhtälö on $\begin{cases} x = a + t \\ y = b + 3t \\ z = 100 - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Pisteen B z-koordinaatti on 50. Ratkaistaan pistettä B vastaava parametri t.

$$\begin{aligned} 100 - 5t &= 50 \\ -5t &= -50 \\ t &= 10 \end{aligned}$$

$B = (a + 10,\ b + 3 \cdot 10,\ 100 - 5 \cdot 10) = (a + 10,\ b + 30,\ 50)$

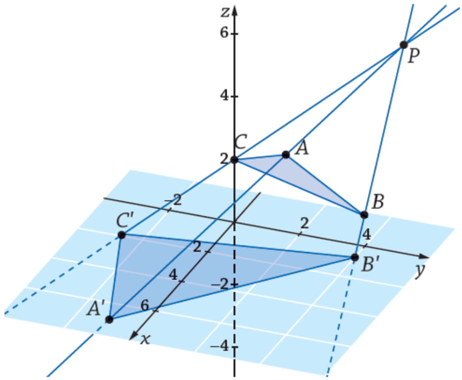
Muodostetaan vektori $\overline{AB}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} a + 10 - a \\ b + 30 - b \\ 50 - 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ -50 \end{bmatrix}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{10^2 + 30^2 + (-50)^2} = \sqrt{3500} \approx 59{,}16...$$

Meteoriitti kulki ilmakehässä 59 km.

427. **a)** Piirretään kuva.



b) Piste A' on pisteiden P ja A kautta kulkevan suoran ja xy-tason leikkauspiste.

Suoran PA eräs suuntavektori on $\overline{PA} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 2-4 \\ 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Suoralla on piste $A = (1, 2, 3)$. Muodostetaan suoran parametrimuotoinen yhtälö.

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Piste A' on xy-tasolla, joten sen z-koordinaatti on 0.

$z = 3 - 2t$

$3 - 2t = 0$

$t = \dfrac{3}{2}$

Lasketaan pisteen A' koordinaatit.

$$\begin{cases} x = 1 + 4 \cdot \frac{3}{2} = 7 \\ y = 2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = -1. \\ z = 0 \end{cases}$$

$A' = (7, -1, 0)$.

Vastaavasti piste B' on suoran PB ja xy-tason leikkauspiste.

Suoran PB suuntavektori on $\overline{PB} = \begin{bmatrix} 0+3 \\ 4-4 \\ 1-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Piste $B = (0, 4, 1)$ on suoralla.

$$\begin{cases} x = 0 + 3s \\ y = 4 \qquad (s \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 4s \end{cases}$$

Piste B' on xy-tasolla, joten sen z-koordinaatti on 0.

$$z = 1 - 4s$$
$$1 - 4s = 0$$
$$s = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x = 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Piste B' on $(\frac{3}{4}, 4, 0)$.

Vastaavasti piste C' on suoran PC ja xy-tason leikkauspiste.

$$\overline{PC} = \begin{bmatrix} 0+3 \\ 0-4 \\ 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 + 3r \\ y = 0 - 4r \, (r \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 3r \end{cases}$$

Piste C' on xy-tasolla, joten sen z-koordinaatti on 0.

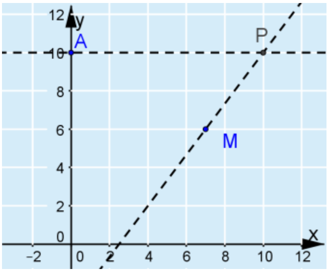
$$z = 2 - 3r$$
$$2 - 3r = 0$$
$$t = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x = 0 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \\ y = 0 - 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

Piste C' on $(2, -\frac{8}{3}, 0) = (2, -2\frac{2}{3}, 0)$.

Varjon kärjet ovat $A' = (7, -1, 0)$, $B' = (\frac{3}{4}, 4, 0)$ ja $C' = (2, -\frac{8}{3}, 0)$

428. Piirretään kuva.



Auroran kulkua kuvaavan suoran yhtälö on

$$\begin{cases} x = t \\ y = 10 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Marian kulkua kuvaavan suoran yhtälö on

$$\begin{cases} x = 7 + 3s \\ y = 6 + 4s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Suorien leikkauspiste:

$$\begin{cases} t = 7 + 3s \\ 10 = 6 + 4s \end{cases}$$

$s = 1$ ja $t = 10$

Leikkauspiste on (10, 10).

Auroran lähtöpaikan (0, 10) etäisyys leikkauspisteestä (10, 10) on 10.

Auroralta kestää mennä reittien risteämiskohtaan $\frac{10}{60}\text{ h} = 10\text{ min}$.

Marian etäisyys risteämiskohdasta on pisteiden (7, 6) ja (10, 10) välisen vektorin pituus.

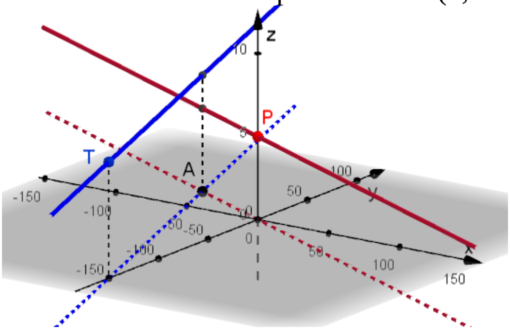
$$\begin{bmatrix} 10-7 \\ 10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Marialta kestää mennä reittien risteämiskohtaan $\frac{5}{40}\text{ h} = 0{,}125\text{ h} = 7{,}5\text{ min}$

Maria ehtii risteämiskohtaan ensin ja ohittamisten välillä on 2,5 minuuttia.

429. Lentokone P on alussa pisteessä $P = (0, 0, 5)$.
Lentokone T on alussa pisteessä $P = (0, -150, 7)$. Hahmotellaan kuva.



Koneiden reittien risteyskohta maanpinnalla on koneiden reittien *xy*-tasoon projisoitujen suorien leikkauspiste.

Koneen P reitti kulkee pitkin suoraa $\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 5 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Tämän projektio *xy*-tasoon on $\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Koneen T reitti kulkee pitkin suoraa $\begin{cases} x = -r \\ y = -150 + 3r \\ z = 7 \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$.

Tämän projektio *xy*-tasoon on $\begin{cases} x = -r \\ y = -150 + 3r \\ z = 0 \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$.

Projektiosuorien leikkauspisteessä $\begin{cases} -2t = -r \\ t = -150 + 3r \\ 0 = 0 \end{cases}$.

Tämän yhtälöryhmän ratkaisu kahdesta ylimmästä yhtälöstä on
$r = 60$ ja $t = 30$.

Projektioiden leikkauspiste on $(-2t, t, 0) = (-60, 30, 0)$.

Koska lentokoneet lentävät samaa vauhtia ovat ne edenneet yhtä pitkän matkan, kun P on risteämiskohdan yllä.

Kun lentokone P on risteyskohdan yllä on se edennyt pisteestä (0, 0, 5) pisteeseen (−60, 30, 5). Pisteiden välinen etäisyys on
$\sqrt{(-60-0)^2+(30-0)^2+(5-5)^2}=\sqrt{4500}$.

Lentokoneen T etenemä matka on myös $\sqrt{4500}.$ Se sijaitsee pisteessä (−r, −150 + 3r, 7) jollakin r. Tämän ja lähtöpisteen (0, −150, 7) välinen etäisyys on $\sqrt{(-r-0)^2+(-150+3r-(-150))^2+(7-7)^2}=\sqrt{10r^2}$.
Siis $\sqrt{10r^2}=\sqrt{4500}$, josta $r=\sqrt{450}$.

Kun P on risteämiskohdassa on T pisteessä $(-\sqrt{450},\ -150+3\sqrt{450},\ 7)$.

Koneiden välinen etäisyys on silloin

$$\sqrt{(-60-(-\sqrt{450})^2+(30-(-150+3\sqrt{450})^2+(5-7)^2}$$
$$=2\sqrt{2(-2250\sqrt{2}+5063)}$$
$$=122,67...$$
$$\approx 120.$$

Lentokoneiden reitit risteävät maanpinnan pisteessä (−60, 30) eli Muuramesta 60 km länteen ja 30 km pohjoiseen. Lentokoneiden välinen etäisyys 120 kilometriä, kun lentokone *P* on risteämiskohdan yllä.

4.2 Tason yhtälö

YDINTEHTÄVÄT

430. **a)** Koska taso kulkee pisteen $A = (2, 1, 0)$ kautta ja sen eräs normaalivektori on $\bar{n} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$, tason yhtälö on $1(x - 2) + 2(y - 1) - 3(z - 0) = 0$.

Sievennetään yhtälö.

$$1 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 1) - 3 \cdot (z - 0) = 0$$
$$x - 2 + 2y - 2 - 3z + 0 = 0$$
$$x + 2y - 3z - 4 = 0$$

Tason yhtälö on $x + 2y - 3z - 4 = 0$.

b) Koska taso kulkee pisteen $A = (4, -2, -3)$ kautta ja sen eräs normaalivektori on $\bar{n} = 2\bar{i} - 7\bar{j} + \bar{k}$, tason yhtälö on $2(x - 4) - 7(y - (-2)) + 1(z - (-3)) = 0$.

Sievennetään yhtälö.

$$2 \cdot (x - 4) - 7 \cdot (y + 2)) + 1 \cdot (z + 3) = 0$$
$$2x - 8 - 7y - 14 + z + 3 = 0$$
$$2x - 7y + z - 19 = 0$$

Tason yhtälö on $2x - 7y + z - 19 = 0$.

431. **a)** Tason $-2x + y + 3z - 4 = 0$ eräs normaalivektori voidaan lukea muuttujien x, y ja z kertoimista ja on $\overline{n} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$.

b) Piste $P = (1, 1, 0)$ on tasossa, jos sen koordinaatit (x, y, z) toteuttavat tason yhtälön.

Sijoitetaan koordinaatit tason yhtälöön.

$$-2 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot 0 - 4 = 0$$
$$-2 + 1 + 0 - 4 = 0$$
$$-5 = 0$$

Pisteen P koordinaatit eivät toteuta tason yhtälöä, joten piste P ei ole tasossa.

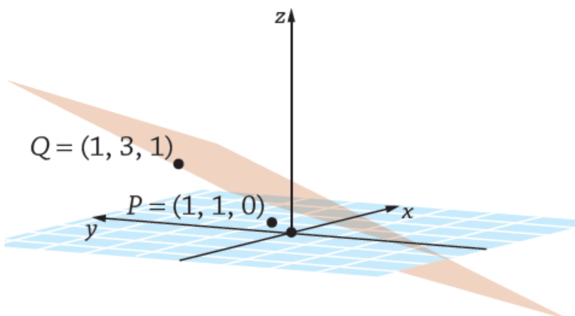
Piste $Q = (1, 3, 1)$ on tasossa, jos sen koordinaatit (x, y, z) toteuttavat tason yhtälön.

Sijoitetaan koordinaatit tason yhtälöön.

$$-2 \cdot 1 + 3 + 3 \cdot 1 - 4 = 0$$
$$-2 + 3 + 3 - 4 = 0$$
$$0 = 0$$

Pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason yhtälön, joten piste Q on tasossa.

c)



Kuvasta huomataan, että piste $P = (1, 1, 0)$ ei ole tasossa, mutta piste $Q = (1, 3, 1)$ on tasossa.

432. A−III

Tason $x - 2y + z - 3 = 0$ eräs normaalivektori on $\bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Piste $A = (1, 0, 2)$ on tasossa, koska se toteuttaa tason yhtälön:

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cdot 0 + 2 - 3 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

B−I

Tason $x + y + 2z - 3 = 0$ eräs normaalivektori on $\bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Piste $A = (1, 0, 1)$ on tasossa, koska se toteuttaa tason yhtälön:

$$\begin{aligned} 1 + 0 + 2 \cdot 1 - 3 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

C−II

Tason $x + y + 2z - 5 = 0$ eräs normaalivektori on $\bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Piste $A = (0, 1, 2)$ on tasossa, koska se toteuttaa tason yhtälön:

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 \cdot 2 - 5 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

433. Tason suuntavektorit ovat

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 0-\frac{1}{7} \\ 2-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ja } \overline{AC} = \begin{bmatrix} 0-\frac{1}{7} \\ 0-0 \\ 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tason erä normaalivektori on $\overline{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{bmatrix} 6 \\ \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}$.

Eräs tason piste on $A = (\frac{1}{7}, 0, 0)$.

Tason yhtälö on siten

$$6(x-\tfrac{1}{7}) + \tfrac{3}{7}(y-0) + \tfrac{2}{7}(z-0) = 0$$

$$6x - \tfrac{6}{7} + \tfrac{3}{7}y + \tfrac{2}{7}z = 0 \quad \| \cdot 7$$

$$42x + 3y + 2z - 6 = 0$$

Piste $P = (0, 1, 2)$ on tasossa, jos se toteuttaa tason yhtälön.

$42 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 6 = 0$

$1 = 0$ epätosi

Piste P ei ole tasossa.

434. Tason eräs normaalivektori on $\overline{AB} = \begin{bmatrix} 6-2 \\ 6-(-1) \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$.

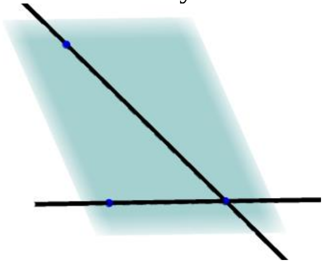
Taso kulkee pisteen $A = (2, -1, 3)$ kautta.

Tason yhtälö on
$4(x-2) + 7(y-(-1)) - 1(z-3) = 0$
$4x - 8 + 7y + 7 - z + 3 = 0$
$4x + 7y - z + 2 = 0$

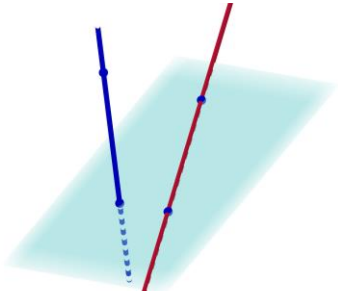
y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$ ja $z = 0$.
$4 \cdot 0 + 7y - 0 + 2 = 0$
$7y = -2$
$y = -\frac{2}{7}$

Taso T leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -\frac{2}{7}, 0)$.

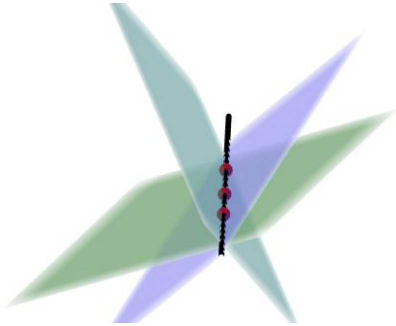
435. **a)** Kyllä. Täsmälleen yksi taso sisältää kaksi toisensa leikkaavaa suoraa.



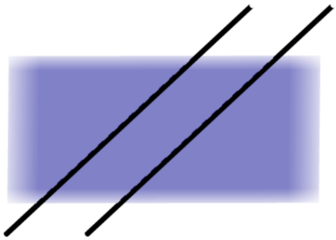
b) Ei. Mikään taso ei sisällä kahta ristikkäistä suoraa.



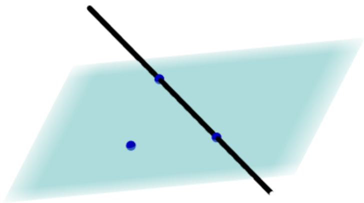
c) Ei. Äärettömän monta tasoa sisältää samalla suoralla olevat pisteet.



d) Kyllä. Täsmälleen yksi taso sisältää kaksi yhdensuuntaista suoraa.



e) Kyllä. Täsmälleen yksi taso sisältää suoran ja sen ulkopuolella olevan pisteen.



436. Suorien suuntavektori $\bar{u} = \begin{bmatrix} -14 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ on yksi tason suuntainen vektori.

Suoralla $\begin{cases} x = 2 - 14t \\ y = 1 - t \\ z = 7t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ on piste $A = (2, 1, 0)$.

Suoralla $\begin{cases} x = -2 - 14r \\ y = -r \\ z = 1 + 7r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$ on piste $B = (-2, 0, 1)$.

Toinen tason suuntainen vektori on $\overline{AB} = \begin{bmatrix} -2-2 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ristitulon avulla saadaan tason normaalivektori.

$$\bar{u} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -14 & -1 & 7 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -14 & 7 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -14 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i} \cdot (-1 \cdot 1 - 7 \cdot (-1)) - \bar{j} \cdot (-14 \cdot 1 - 7 \cdot (-4)) + \bar{k} \cdot (-14 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-4))$$

$$= \bar{i} \cdot 6 - \bar{j} \cdot 14 + \bar{k} \cdot 10$$

$$= 6\bar{i} - 14\bar{j} + 10\bar{k}$$

Tason yhtälö saadaan nyt normaalivektorin ja pisteen $A = (2, 1, 0)$ avulla.

$$6(x-2) - 14(y-1) + 10(z-0) = 0$$

$$6x - 14y + 10z + 2 = 0 \quad ||:2$$

$$3x - 7y + 5z + 1 = 0$$

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

437. Suoran $\overline{OP} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R},$ eräs suuntavektori on $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Tämä on tason normaalivektori, koska suora on tason normaali.

Tasossa on piste $A = (3, 0, -1)$.

Tason yhtälö on:

$$\begin{aligned} 1(x-3) + 2(y-0) + 3(z+1) &= 0 \\ x - 3 + 2y + 3z + 3 &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Taso kulkee origon kautta, jos piste (0, 0, 0) toteuttaa tason yhtälön.

$$\begin{aligned} 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Piste (0, 0, 0) toteuttaa tason yhtälön, joten taso kulkee origon kautta.

438. Pisteet ovat saman tason pisteitä, jos piste D toteuttaa pisteiden A, B ja C muodostaman tason yhtälön.

Tason suuntavektorit ovat

$$\overline{AB}=\begin{bmatrix}3-1\\2-1\\0-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \text{ ja } \overline{AC}=\begin{bmatrix}0-1\\2-1\\2-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

Tason eräs normaalivektori on $\overline{n}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{bmatrix}2\\-4\\3\end{bmatrix}$.

Taso kulkee pisteen $A = (1, 1, 0)$ kautta, joten sen yhtälö on

$$\begin{aligned}2(x-1)-4(y-1)+3(z-0)&=0\\2x-2-4y+4+3z&=0\\2x-4y+3z+2&=0.\end{aligned}$$

Sijoitetaan pisteen $D = (1, 4, 4)$ koordinaatit tason yhtälöön ja tutkitaan toteuttaako koordinaatit tason yhtälön.

$$\begin{aligned}2\cdot1-4\cdot4+3\cdot4+2&=0\\2-16+12+2&=0\\0&=0\end{aligned}$$

Piste D toteuttaa tason yhtälön, joten pisteet A, B, C ja D ovat samassa tasossa.

439. Tasossa on piste $A = (1, 1, 1)$. Etsitään kaksi muuta suoran pistettä:
kun $t = 0$, suoran piste on $B = (1 + t, 2 + 2t, 3 + 3t) = (1, 2, 3)$ ja
kun $t = -1$, suoran piste on $C = (1 - 1, 2 - 2, 3 - 3) = (0, 0, 0)$.

Muodostetaan tason suuntaiset vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{CA}$.

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 2-1 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ja } \overline{CA} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tason eräs normaalivektori on $\overline{AB} \times \overline{CA}$.

$$\begin{aligned}
\overline{AB} \times \overline{CA} &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \overline{i} \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - \overline{j} \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + \overline{k} \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \\
&= \overline{i} \cdot (-1) - \overline{j} \cdot (-2) + \overline{k} \cdot (-1) \\
&= -\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

440. Vektoreiden $x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ ja $\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ pistetulo on
$x \cdot 1 + y \cdot 2 + z \cdot 3 = x + 2y + 3z$.

Pistetulo on 4, eli $x + 2y + 3z = 4$.

Koska origosta alkavien vektorien kärkipisteet (x, y, z) toteuttavat yhtälön $x + 2y + 3z = 4$, ovat pisteet tasossa $x + 2y + 3z = 4$.

Tason eräs normaalivektori on $\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$.

y-akselin pisteillä $x = 0$ ja $z = 0$. Kun nämä sijoitetaan yhtälöön saadaan $2y = 4$, josta $y = 2$.

Taso leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 2, 0)$.

441. **a)** Lasketaan kaksi suoran pistettä:
kun $x = 1$, $1 + 2y = 3$, mistä $y = 1$, eli tasolla on piste $A = (1, 1, 0)$
kun $x = 3$, $3 + 2y = 3$, mistä $y = 0$, eli tasolla on piste $B = (3, 0, 0)$.
Myös piste $C = (2, 4, 6)$ on tason piste.

Tason kaksi suuntavektoria ovat

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ja } \overline{AC} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 4-1 \\ 6-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Tason eräs normaalivektori on

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \overline{i} \cdot (-1 \cdot 6 - 0 \cdot 3) - \overline{j} \cdot (2 \cdot 6 - 0 \cdot 1) + \overline{k} \cdot (2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1)$$

$$= -6\overline{i} - 12\overline{j} + 7\overline{k} = \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Taso sisältää pisteen $B = (3, 0, 0)$, joten saadaan tason yhtälö.

$$-6(x-3) - 12(y-0) + 7(z-0) = 0$$
$$-6x + 18 - 12y + 7z = 0 \quad \| \cdot (-1)$$
$$6x + 12y - 7z - 18 = 0$$

b) Edellä laskettu piste $B = (3, 0, 0)$ on x-akselilla x-akselin leikkauspiste, koska siinä $y = 0$ ja $z = 0$.

y-akselilla $x = 0$ ja $z = 0$, joten $-12y + 18 = 0$, josta $y = \frac{3}{2}$.

y-akselin leikkauspiste on $(0, \frac{3}{2}, 0)$.

z-akselilla $x = 0$ ja $y = 0$, joten $7z + 18 = 0$, josta $z = -\frac{18}{7}$.

z-akselin leikkauspiste on $(0, 0, -\frac{18}{7})$

Koordinaattiakselien leikkauspisteet ovat
$(3, 0, 0)$, $(0, \frac{3}{2}, 0)$ ja $(0, 0, -\frac{18}{7})$.

442. Lasketaan pyramidin kärkipisteiden koordinaatit.

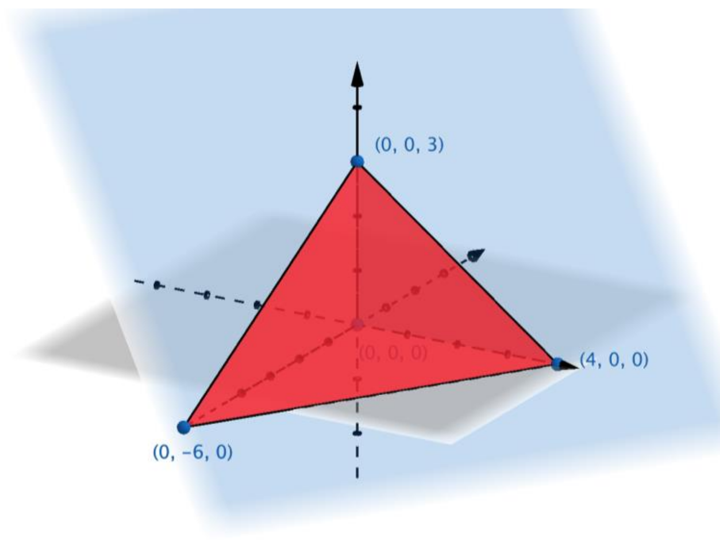
x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$ ja $z = 0$:
$3x + 0 + 0 = 12$
$x = 4$
Leikkauspiste on (4, 0, 0).

y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$ ja $z = 0$:
$0 - 2y + 0 + 3 = 12$
$y = -6$
Leikkauspiste on (0, −6, 0).

z-akselin leikkauspisteessä $x = 0$ ja $y = 0$:
$0 + 0 + 4z = 12$
$z = 3$
Leikkauspiste on (0, 0, 3).

xy-tasolla oleva suorakulmainen kolmio (kylkien pituudet 4 ja 6 nähdään suoraan leikkauspisteistä) voidaan tulkita pohjatahkoksi. Näin tulkiten z-akselilla oleva piste on huippu.

Siten pyramidin tilavuus on $V = \frac{1}{3} \cdot (\frac{4 \cdot 6}{2}) \cdot 3 = 12$.



443. **a)** Tason yksi piste on (2, 1, 3). Vektorit $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$ ovat selvästi erisuuntaiset. Näiden avulla saadaan suoraan tason vektorimuotoinen yhtälö:

$$\overline{OP}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}\quad (r,s\in\mathbb{R}).$$

b) Tutkitaan onko olemassa luvut r ja s siten, että $\overline{OP}=\overline{OA}$ eli että

$$\begin{bmatrix}11\\5\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}11\\5\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+r-s\\1+r\\3+2s\end{bmatrix}\text{ eli }\begin{cases}11=2+r-s\\5=1+r\\-7=3+2s\end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = 4$ ja $s = -5$.
Piste A on siis tasossa.

c) Summavektori $r\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}\ (r,s\in\mathbb{R})$ on aina tasossa.

Valitaan esimerkiksi $r = s = 1$, jolloin esimerkiksi vektori

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1\\1+0\\0+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\text{ on tasossa.}$$

Se on myös selvästi eri suuntainen kuin vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$, koska sen x-komponentti on 0.

444. **a)** Muodostetaan tason suuntaiset vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{CA}$.

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} -3-(-1) \\ 5-4 \\ 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ja } \overline{AC} = \begin{bmatrix} -2-(-1) \\ 8-4 \\ 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vektorit ovat selvästi erisuuntaiset ja piste A on tasossa, joten tason vektorimuotoinen yhtälö on $\overline{OP} = \overline{OA} + r \cdot \overline{AB} + s \cdot \overline{AC}$ eli

$$\overline{OP} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R}).$$

b) Tutkitaan onko olemassa luvut r ja s siten, että $r \cdot \overline{AB} + s \cdot \overline{AC} = \overline{u}$ eli että $\overline{u}$ voidaan esittää tason suuntavektoreiden lineaariyhdistelynä.

$$r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ eli } \begin{bmatrix} -2r - s \\ 2 + 4s \\ 3r + 3s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ josta } \begin{cases} -2r - s = -5 \\ r + 4s = -2 \\ 3r + 3s = 6 \end{cases}$$

Tällä yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. (Ylimmästä ja alimmasta yhtälöstä saadaan $r = 3$ ja $s = -1$, mutta nämä eivät toteuta keskimmäistä yhtälöä.)

Näin ollen vektori $\overline{u}$ ei ole tason suuntainen.

445. **a)** Osoitetaan, että on olemassa luvut r ja s siten, että $r(2\overline{i}-\overline{j})+s(\overline{i}-\overline{k})=3\overline{j}-6\overline{k}$. Tällöin vektorit $2\overline{i}-\overline{j}$ ja $\overline{i}-\overline{j}$ ovat tason suuntavektorit joiden avulla vektori $3\overline{j}-6\overline{k}$ voidaan esittää.

$$r(2\overline{i}-\overline{j})+s(\overline{i}-\overline{k})=3\overline{j}-6\overline{k}$$

$$r\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\-6\end{bmatrix} \quad \text{eli} \quad \begin{bmatrix}2r\\-r\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}s\\0\\-s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\-6\end{bmatrix}, \text{ josta } \begin{cases}2r+s=0\\-r=3\\-s=-6\end{cases}$$

Koska toisesta ja kolmannesta yhtälöstä saadut ratkaisut $r=-3$ ja $s=6$ toteuttavat myös ensimmäisen yhtälön $(-6+6=0)$, vektori $3\overline{j}-6\overline{k}$ voidaan esittää vektoreiden $2\overline{i}-\overline{j}$ ja $\overline{i}-\overline{j}$ avulla eli vektorit ovat saman tason suuntaiset.

b) Vektorit $\overline{i}+\overline{j}$ ja $\overline{i}-2\overline{k}$ ovat erisuuntaiset eli virittävät tason. Tutkitaan a-kohdan tapaan yhtälöä $r(\overline{i}+\overline{j})+s(\overline{i}-2\overline{k})=\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$.

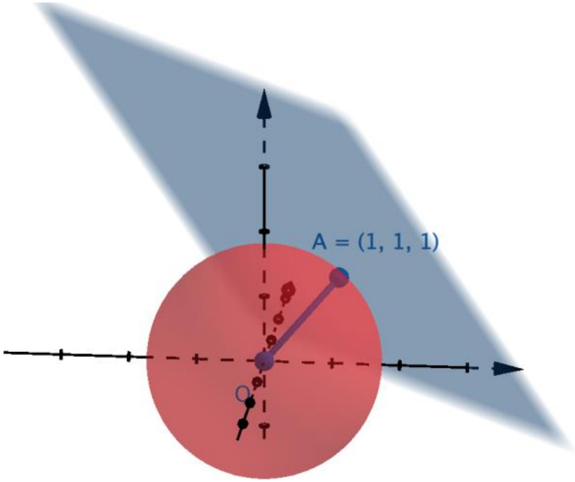
$$r(\overline{i}+\overline{j})+s(\overline{i}-2\overline{k})=\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$$

$$r\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}r+s\\r\\-s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \text{ josta } \begin{cases}r+s=0\\r=2\\-s=-1\end{cases}$$

Toisesta ja kolmannesta yhtälöstä saadut ratkaisut $r=2$ ja $s=1$ eivät toteuta ensimmäistä yhtälöä $(2+1=3\neq 0)$, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua eikä siten myöskään yhtälöllä $r(\overline{i}+\overline{j})+s(\overline{i}-2\overline{k})=\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$. Vektorit eivät siis ole saman tason suuntaisia eli niitä ei voida lausua minkään saman tason suuntavektoreiden avulla.

446. Piste $A = (1, 1, 1)$ on lähimpänä ympyrän keskipistettä O (O on origo) oleva tason piste. Näin ollen OA on kohtisuorassa tasoa vasten.



$\overline{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, joten tason yhtälö on $1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 1) = 0$ eli

$x + y + z - 3 = 0.$

447. **a)** Tason normaalivektori on $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ -2 \end{bmatrix}$ ja $A = (-\frac{1}{3}, 1, 9)$ on tasossa.

Näiden avulla saadaan tason yhtälö.

$$4(x - (-\tfrac{1}{3})) + 16(y - 1) - 2(z - 9) = 0$$

$$4x + 16y - 2z + \tfrac{10}{3} = 0$$

Kun pisteen $P = (-12, 3, 1)$ koordinaatit sijoitetaan, tason yhtälön vasemmasta puolesta saadaan

$4 \cdot (-12) + 16 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + \frac{10}{3} = -\frac{2}{3} \neq 0.$

Näin ollen piste P ei toteuta tason yhtälöä eli se ei ole tasossa.

b) Tason vektorimuotoinen yhtälö on

$$\overline{OP} = \overline{OA} + r\bar{u} + s\bar{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Piste $P = (-12, 3, 1)$ on tasossa jos ja vain jos se toteuttaa tason vektorimuotoisen yhtälön jollain r ja s.

$$\begin{bmatrix} -12 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -12 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} - 3r + 2s \\ 1 + r \\ 9 + 2r + 4s \end{bmatrix}$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä $\begin{cases} -12 = -\frac{1}{3} - 3r + 2s \\ 3 = 1 + r \\ 1 = 9 + 2r + 4s \end{cases}$.

Ohjelmalla saadaan, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.
Piste P ei ole tasossa.

c) *Ratkaisutapa 1:*

Tutkitaan onko vektori $\overline{AP} = \begin{bmatrix} -12-(-\frac{1}{3}) \\ 3-1 \\ 1-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{35}{3} \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$ tason suuntainen eli kohtisuorassa tason normaalivektoria vasten.

Tason normaalivektori on $\overline{u} \times \overline{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{35}{3} \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} = 4(-\tfrac{35}{3}) + 16 \cdot 2 - 2(-8) = \tfrac{4}{3}$$

Koska pistetulo ei ole 0, vektori $\overline{AP}$ ei ole kohtisuorassa tason normaalivektoria vasten. Näin ollen $\overline{AP}$ ei ole tason suuntainen.
Piste P ei ole tasossa.

Ratkaisutapa 2:

Vektoreiden $\overline{AP} = \begin{bmatrix} -12-(-\frac{1}{3}) \\ 3-1 \\ 1-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{35}{3} \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$, $\overline{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\overline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

virittämän suuntaissärmiön tilavuus on skalaarikolmituloa käyttäen
$\left|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{AP}\right|$.

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{AP} = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{35}{3} \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} = 4(-\tfrac{35}{3}) + 16 \cdot 2 - 2(-8) = \tfrac{4}{3}$$

$$\left|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{AP}\right| = \left|\tfrac{4}{3}\right| = \tfrac{4}{3}$$

Koska suuntaissärmiöllä on positiivinen tilavuus, täytyy särmiön korkeuden olla positiivinen. Näin ollen vektorin $\overline{AP}$ täytyy olla eri suuntainen kuin vektoreiden $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntainen taso (särmiön pohja). Näin ollen piste P on tasossa.

Ratkaisutapa 3:

Yritetään muodostaa vektori $\overline{AP} = \begin{bmatrix} -12-(-\frac{1}{3}) \\ 3-1 \\ 1-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{35}{3} \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$ vektoreiden

$\overline{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\overline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ avulla. Koska vektorin $\overline{v}$ y-komponentti on 0, ei siitä ole hyötyä siirryttäessä y-akselin suunnassa. Näin ollen täytyy siirtyä $2\overline{u} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Jotta saataisiin z-komponentiksi −8, täytyy lisätä z-komponenttiin −12 vektoria $\overline{v}$ käyttäen. Siirrytään siis vielä $-3\overline{v}$.

Yhteensä saadaan $2\overline{u} - 3\overline{v} = 2\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6-6 \\ 2-0 \\ 4-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$.

Nyt x-komponetti −12 ei ole $-\frac{35}{3}$.

Näin ollen vektoria $\overline{AP}$ ei voi esittää muodossa $\overline{AP} = r\overline{u} + s\overline{v}$ millään r ja s. Näin ollen $\overline{AP}$ ei ole tason suuntainen. Tästä seuraa, että piste P ei ole tasossa.

Ratkaisutapa 4:
Käytetään symbolisen laskennan ohjelman komentoa, joka antaa suoraan tason yhtälön, kun syötetään tason piste ja kaksi erisuuntaista suuntavektoria.

Jos ohjelma ei anna tarkkaa tason yhtälö, kun käytetään pistettä

$A = (-\frac{1}{3}, 1, 9)$ ja vektoreita $\overline{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\overline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, vaihdetaan pistettä.

Ohjelmalla saadaan pisteen $P = (-12, 3, 1)$ sisältävän ja vektoreiden $\overline{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\overline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ suuntaisen tason yhtälöksi $-3x - 13y + z + 2 = 0$.

Kun pisteen $A = (-\frac{1}{3}, 1, 9)$ koordinaatit sijoitetaan, tason yhtälön vasemmasta puolesta saadaan
$-3 \cdot (-\frac{1}{3}) - 13 \cdot 1 + 9 + 2 = -1 \neq 0$.

Näin ollen piste A ei toteuta tason yhtälöä eli se ei ole tasossa.
Pisteet A ja P eivät siis ole samassa tasossa, jonka suuntavektorit ovat

$\overline{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\overline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Näin ollen piste P ei ole tehtävänannon tasossa.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

448. Yksi tason suuntavektori on $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1-x \\ x+1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$ ja

Toinen tason suuntavektori on $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1-x \\ 1-1 \\ x+2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x \\ 0 \\ x+1 \end{bmatrix}$.

Koska vektorin $\bar{v}$ y-komponentti on 0, voivat vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ olla yhdensuuntaiset vain, jos myös vektorin $\bar{u}$ y-komponentti on $x = 0$. Mutta tällöin vektoreiden z-komponenttien (0 ja 1) perusteella vektorit eivät ole yhdensuuntaiset.

Tason suuntaiset vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ ovat siis aina keskenään erisuuntaiset. Näin ollen eräs tason normaalivektori on $\bar{u} \times \bar{v}$ Ohjelmalla saadaan

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{bmatrix} x(x+1) \\ -(1-x)(x+1) \\ -x(1-x) \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{s} = \begin{bmatrix} x(x+1) \\ -(1-x)(x+1) \\ -x(1-x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = x(x+1) + 2(1-x)(x+1) - x(1-x).$$

Ohjelmalla sieventäen saadaan $x(x+1) + 2(1-x)(x+1) - x(1-x) = 2$.

Näin ollen $(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{s} \neq 0$ kaikilla x.n arvoilla.

Vektori $\bar{s}$ ei siis ole millään x:n arvolla kohtisuorassa tason normaalivektoria vastaan.
Näin ollen vektori $\bar{s}$ ei ole millään x:n arvolla pisteiden $(x, 1, 1)$, $(1, x+1, 1)$ ja $(1, 1, x+2)$ kautta kulkevan tason suuntainen.

Toinen ratkaisutapa:
Osoitetaan, että yhtälö $\overline{s} = r\overline{u} + t\overline{v}$ ei ole tosi millään *r* ja *t*.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1-x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1-x \\ 0 \\ x+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1-x)+t(1-x) \\ rx \\ t(x+1) \end{bmatrix}$$

Tämä yhtälö on tosi, jos yhtälöryhmällä $\begin{cases} 1 = r(1-x)+t(1-x) \\ -2 = rx \\ 1 = t(x+1) \end{cases}$ on ratkaisu. Ohjelman mukaan yhtälöryhmälle ei kuitenkaan ole ratkaisua.

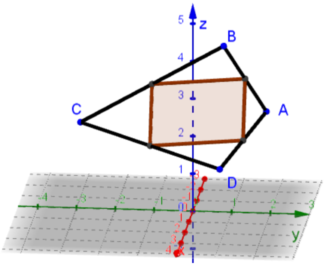
Näin ollen vektori $\overline{s}$ ei ole vektoreiden $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ virittämän tason suuntainen millään *x*:n arvolla.

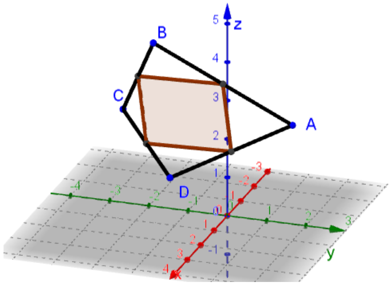
Näin ollen vektori $\overline{s}$ ei ole millään *x*:n arvolla pisteiden (*x*, 1, 1), (1, *x* + 1, 1) ja (1, 1, *x* + 2) kautta kulkevan tason suuntainen.

Huomautus:
Varmistutaan vielä, että ohjelma varmasti ratkaisi yhtälöryhmän oikein.
$\begin{cases} 1 = r(1-x)+t(1-x) \\ -2 = rx \\ 1 = t(x+1) \end{cases}$ on sulkeet avattuna $\begin{cases} 1 = -rx-tx+r+t \\ -2 = rx \\ 1 = tx+t \end{cases}$.

Sijoittamalla $rx = -2$ ylimpään yhtälöön saadaan $1 = 2 - (1 - t) + r + t$ eli $0 = r + 2t$ eli $r = -2t$. Sijoitetaan tämä kahteen alimpaan yhtälöön, jolloin saadaan
$\begin{cases} -2 = -2tx \\ 1 = tx+t \end{cases}$ eli $\begin{cases} 1 = tx \\ 1 = tx+t \end{cases}$ sijoittamalla ylempi yhtälö alempaan saadaan $1 = 1 + t$, josta $t = 0$.
Tällöin ei kuitenkaan yhtälö $1 = tx + t$ ole tosi, koska $tx + t = 0 \cdot x + 0 = 0$.
Näin ollen yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

449. **a)** Hahmotellaan tilannetta kuvien avulla.





Kuvioksi näyttäisi muodostuvan aina suunnikas.

b) Kuvio on suunnikas, jos sen kärjet ovat samassa tasossa ja sen vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

Merkitään avaruuden pisteet seuraavasti:

$A=(x_1,y_1,z_1)$
$B=(x_2,y_2,z_2)$
$C=(x_3,y_3,z_3)$
$D=(x_4,y_4,z_4)$

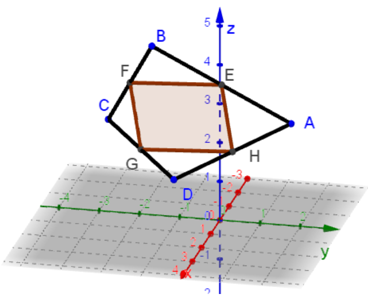
Sivujen keskipisteet voidaan nyt laskea.

Sivun AB keskipiste on $E=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$.

Sivun BC keskipiste on $F=(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2},\frac{z_2+z_3}{2})$.

Sivun CD keskipiste on $G=(\frac{x_3+x_4}{2},\frac{y_3+y_4}{2},\frac{z_3+z_4}{2})$.

Sivun DA keskipiste on $H=(\frac{x_4+x_1}{2},\frac{y_4+y_1}{2},\frac{z_4+z_1}{2})$.



Määritetään vektorit $\overline{EH}$ ja $\overline{FG}$ sekä $\overline{FE}$ ja $\overline{GH}$.

$$\overline{EH}=\begin{bmatrix}\dfrac{x_4+x_1}{2}-\dfrac{x_1+x_2}{2}\\ \dfrac{y_4+y_1}{2}-\dfrac{y_1+y_2}{2}\\ \dfrac{z_4+z_1}{2}-\dfrac{z_1+z_2}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{x_4-x_2}{2}\\ \dfrac{y_4-y_2}{2}\\ \dfrac{z_4-z_2}{2}\end{bmatrix}$$

$$\overline{FG}=\begin{bmatrix}\dfrac{x_3+x_4}{2}-\dfrac{x_2+x_3}{2}\\ \dfrac{y_3+y_4}{2}-\dfrac{y_2+y_3}{2}\\ \dfrac{z_3+z_4}{2}-\dfrac{z_2+z_3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{x_4-x_2}{2}\\ \dfrac{y_4-y_2}{2}\\ \dfrac{z_4-z_2}{2}\end{bmatrix}$$

Saatiin $\overline{EH}=\overline{FG}$.

$$\overline{FE}=\begin{bmatrix}\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{x_2+x_3}{2}\\ \dfrac{y_1+y_2}{2}-\dfrac{y_2+y_3}{2}\\ \dfrac{z_1+z_2}{2}-\dfrac{z_2+z_3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{x_1-x_3}{2}\\ \dfrac{y_1-y_3}{2}\\ \dfrac{z_1-z_3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\overline{GH}=\begin{bmatrix}\dfrac{x_4+x_1}{2}-\dfrac{x_3+x_4}{2}\\ \dfrac{y_4+y_1}{2}-\dfrac{y_3+y_4}{2}\\ \dfrac{z_4+z_1}{2}-\dfrac{z_3+z_4}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{x_1-x_3}{2}\\ \dfrac{y_1-y_3}{2}\\ \dfrac{z_1-z_3}{2}\end{bmatrix}$$

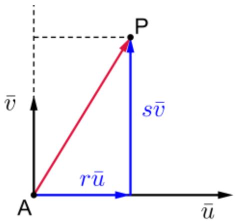
Saatiin $\overline{FE}=\overline{GH}$.

Kolme pistettä *E*, *F* ja *H* ovat samassa tasossa. Valitaan tason suuntavektoreiksi $\overline{EH}$ ja $\overline{EF}$. Piste *G* on samassa tasossa, koska $\overline{EG}=\overline{EH}+\overline{HG}=\overline{EH}+\overline{EF}$.

Pisteet *E*, *F*, *G* ja *H* ovat siis samassa tasossa, jolloin ne muodostavat nelikulmion *EFGH*. Koska $\overline{EH}=\overline{FG}$ ja $\overline{FE}=\overline{GH}$, nelikulmion vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset (ja yhtä pitkät).
Pisteet *E*, *F*, *G* ja *H* ovat siis suunnikkaan kärkiä.

Huomautus: Yhdensuuntaisuuden voi päätellä myös vähemmillä laskuilla. Merkitään $\bar{u} = \overline{CB}$ ja $\bar{v} = \overline{BA}$, jolloin $\overline{CA} = \bar{u} + \bar{v}$ ja $\overline{FE} = \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v} = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v})$. Siis $\overline{CA} \parallel \overline{FE}$. Vastaavasti saadaan $\overline{CA} \parallel \overline{GH}$. Tällöin $\overline{FE} \parallel \overline{GH}$. Toiset sivut saadaan vastaavasti.

450. $\overline{OP} = \overline{OA} + r\bar{u} + s\bar{v}$ ja toisaalta $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$. On siis $\overline{AP} = r\bar{u} + s\bar{v}$. Hahmotellaan kuva.



Suorakulmaisen kolmion trigonometrialla saadaan

$$\cos(\overline{AP}, \bar{u}) = \frac{|r\bar{u}|}{|\overline{AP}|} = \frac{r|\bar{u}|}{|\overline{AP}|}.$$

Tätä käyttäen saadaan sievennettyä pistetulo.

$$\overline{AP} \cdot \bar{u} = |\overline{AP}| \cdot |\bar{u}| \cos(\overline{AP}, \bar{u}) = |\overline{AP}| \cdot |\bar{u}| \cdot \frac{r|\bar{u}|}{|\overline{AP}|} = r|\bar{u}|^2$$

On siis $\overline{AP} \cdot \bar{u} = r|\bar{u}|^2$, josta saadaan $r = \dfrac{\overline{AP} \cdot \bar{u}}{|\bar{u}|^2}$.

Vastaavasti suorakulmaisen kolmion trigonometrialla saadaan

$$\cos(\overline{AP}, \bar{v}) = \frac{|s\bar{v}|}{|\overline{AP}|} = \frac{s|\bar{v}|}{|\overline{AP}|}.$$

Tätä käyttäen saadaan sievennettyä pistetulo.

$$\overline{AP} \cdot \bar{v} = |\overline{AP}| \cdot |\bar{v}| \cos(\overline{AP}, \bar{v}) = |\overline{AP}| \cdot |\bar{v}| \cdot \frac{s|\bar{v}|}{|\overline{AP}|} = s|\bar{v}|^2$$

On siis $\overline{AP} \cdot \bar{v} = s|\bar{v}|^2$, josta saadaan $s = \dfrac{\overline{AP} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|^2}$.

4.3 Tasoja koskevia leikkauksia

YDINTEHTÄVÄT

451. Tason $2x - y + z - 2 = 0$ ja suoran $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ yhteiset pisteet ovat ne suoran pisteet, jotka toteuttavat tason yhtälön.

$$\begin{aligned} 2(1 - 2t) - (2 - t) + (3 + t) - 2 &= 0 \\ 2 - 4t - 2 + t + 3 + t - 2 &= 0 \\ -2t &= -1 \\ t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $t = \frac{1}{2}$ suoran yhtälöön.

$$\begin{cases} x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0 \\ y = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \\ z = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \end{cases}$$

Tason ja suoran yhteinen piste on $(0, \frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

452. Pisteiden (−1, 3, 2) ja (2, 1, −3) kautta kulkevan suoran yksi suuntavektori on $\begin{bmatrix} 2-(-1) \\ 1-3 \\ -3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$. Suoran yhtälö on $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 3-2t \\ z = 2-5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Sijoitetaan suoran pisteet tason yhtälöön $-x + 3y - 3z + 4 = 0$ ja ratkaistaan t.

$-(-1 + 3t) + 3(3 - 2t) - 3(2 - 5t) + 4 = 0$, josta $t = -\frac{4}{3}$.

Suoran ja tason leikkauspisteessä $\begin{cases} x = -1 + 3(-\frac{4}{3}) = -5 \\ y = 3 - 2(-\frac{4}{3}) = \frac{17}{3} \\ z = 2 - 5(-\frac{4}{3}) = \frac{26}{3} \end{cases}$.

Suoran ja tason leikkauspiste on $(-5, \frac{17}{3}, \frac{26}{3})$.

Huomautus
GeoGebralla leikkauspiste saadaan myös näin:

yhtälöryhmän $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 3-2t \\ z = 2-5t \\ -x+3y-3z+4=0 \end{cases}$ ratkaisuksi saadaan $\begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{17}{3} \\ z = \frac{26}{3} \\ t = -\frac{4}{3} \end{cases}$,

josta voidaan lukea suoran ja tason leikkauspisteeksi $(-5, \frac{17}{3}, \frac{26}{3})$.

453. Yhteiset pisteet saadaan yhtälöparin $\begin{cases} x+2y=5 \\ x-y+z=5 \end{cases}$ ratkaisuna.

Ylemmästä saadaan $x = 5 - 2y$. Kun tämä sijoitetaan alempaan saadaan $5 - 2y - y + z = 5$, saadaan y-koordinaatti lausuttua z:n avulla: $y = \frac{1}{3}z$.

Kun $y = \frac{1}{3}z$ sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön saadaan myös x-koordinaatti lausuttua z:n avulla: $x = -\frac{2}{3}z + 5$.

Koordinaatille z ei tule ehtoa, koska kaksi muuta koordinaattia esitettiin sen avulla. Koordinaatti z voi olla mikä tahansa eli $z = t$.

Parametrimuotoisena suoran yhtälö on siten

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}t + 5 \\ y = \frac{1}{3}t \qquad (t \in \mathbb{R}). \\ z = t \end{cases}$$

Huomautus:
Saatuja ehtoja $x = -\frac{2}{3}z + 5$ ja $y = \frac{1}{3}z$ käyttäen voidaan laskea kaksi leikkaussuoran pistettä ja muodostaa yhtälö näitä käyttäen.

Olkoon esimerkiksi $z = 3$, jolloin $x = 3$ ja $y = 1$. Olkoon lisäksi $z = 6$, jolloin $x = 1$ ja $y = 2$.

Suora kulkee pisteiden (3, 1, 3) ja (1, 2, 6) kautta. Suoran suuntavektori on $\begin{bmatrix} 1-3 \\ 2-1 \\ 6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ja yhtälö $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \qquad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

Molemmat muodot määräävät saman pistejoukon. Yhtälölle voidaan antaa loputon määrä erilaisia muotoja.

454. *Ensimmäinen todistus:*
Suora on tasossa, jos sen pisteet toteuttavat tason yhtälön kaikilla parametrin *t* arvoilla. Muodostetaan suoran parametrimuotoinen yhtälö.

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1-t \end{cases}$$

Sijoitetaan suoran koordinaatit tason yhtälöön $x + y + 2z - 4 = 0$.

$$\begin{aligned} 2 + t + t + 2(1 - t) - 4 &= 0 \\ 2 + 2t + 2 - 2t - 4 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Suoran pisteet toteuttavat tason yhtälön kaikilla vakion *t* arvoilla, joten suora on tasossa.

Toinen todistus:
Osoitetaan, että suoran piste *A* on tasossa ja suoran suuntavektori on kohtisuorassa tason normaalivektoria vastaan.

Sijoitetaan pisteen $A = (2, 0, 1)$ koordinaatit tason yhtälöön.

$$\begin{aligned} 2 + 0 + 2 \cdot 1 - 4 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Piste *A* on tasossa.

Tason normaalivektori on $\overline{n} = \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$.
$\overline{n} \cdot \overline{s} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 2 - 2 = 0$, joten $\overline{n} \perp \overline{s}$.

Siis suora on tasossa.

455. **a)** Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} -2x - y + 3z = 0 \\ -3x + y + 7z = -5 \end{cases}$

Pyritään esittämään *x*- ja *y*-koordinaatit *z*-koordinaatin avulla.

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -2x - y + 3z = 0 \\ -3x + y + 7z = -5 \end{cases} \\ + & \\ \hline & -5x \quad +10z = -5 \end{array}$$

$$\begin{cases} -2x - y + 3z = 0 & \| \cdot (-3) \\ -3x + y + 7z = -5 & \| \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} 6x + 3y - 9z = 0 \\ -6x + 2y + 14z = -10 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 5y + 5z = -10 \end{array}$$

Näistä saadaan

$$\begin{aligned} -5x + 10z &= -5 \\ -5x &= -5 - 10z \quad \|:(-5) \\ x &= 1 + 2z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5y + 5z &= -10 \\ 5y &= -10 - 5z \quad \|:5 \\ y &= -2 - z \end{aligned}$$

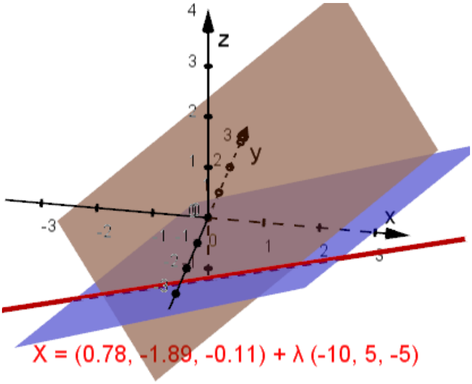
Koordinaatille *z* ei tule ehtoa, koska kaksi muuta koordinaattia esitettiin sen avulla. Koordinaatti *z* voi olla mikä tahansa eli $z = t$.

Tasot leikkaavat siis pitkin suoraa $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$

Symbolisen laskennan ohjelma antaa yhtälöparin $\begin{cases} -2x - y + 3z = 0 \\ -3x + y + 7z = -5 \end{cases}$

ratkaisuksi $x = 2z + 1$, $y = -z - 2$. Tämä on sama ratkaisu, sillä *z* voi olla mikä tahansa luku *t*.

Piirretään tasot yhtälöitä käyttäen ja otetaan tasojen leikkaus.



Leikkaussuoran yhtälö on erimuodossa, mutta suora on sama kuin suora, joka piirretään laskemalla saatua yhtälöä käyttäen.

b) Huomataan, että yhtälöt $6x - 12y + 3z - 9 = 0$ ja $-2x + 4y - z + 3 = 0$ ovat saman tason yhtälöitä, sillä kun jälkimmäinen yhtälö kerrotaan puolittain luvulla -3, saadaan ensimmäinen yhtälö.

Toinen ratkaisutapa:

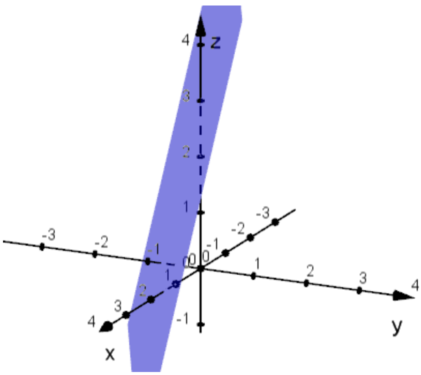
$$\begin{cases} 6x-12y+3z-9=0 \\ -2x+4y-z+3=0 \quad \| \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 6x-12y+3z-9=0 \\ -6x+12y+3z+9=0 \end{cases} \\ \hline 0=0 \end{array}$$

Yhtälöt toteutuvat samoissa pisteissä. Yhtälöt esittävät samaa tasoa. Kaikki tason pisteet ovat leikkauspisteitä.

GeoGebra Classic 6 antaa yhtälöparin $\begin{cases} 6x-12y+3z-9=0 \\ -2x+4y - z+3=0 \end{cases}$

ratkaisuksi { }. Tulkitaan tämä vastaamaan laskettua ratkaisua eli, että yhtälö kuvaavat samaa tasoa. Kuva vahvistaa tämän.



c) Ratkaistaan yhtälöryhmä.

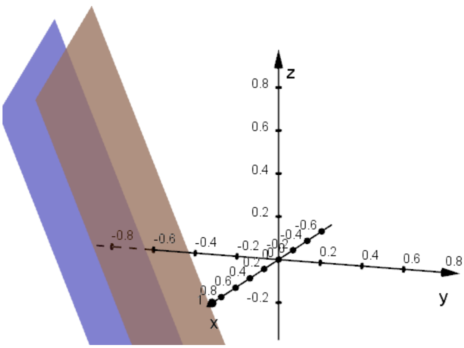
$$\begin{cases} -2x+10y+4z+6=0 \\ x-5y-2z-4=0 \quad \| \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -2x+10y+4z+6=0 \\ 2x-10y-4z-8=0 \end{cases} \\ + & \\ \hline & -2=0 \end{array}$$

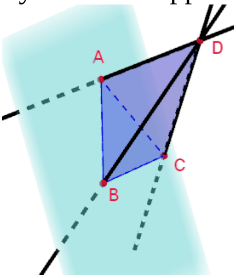
Tasot eivät leikkaa.

GeoGebra Classic 6 antaa yhtälöparin $\begin{cases} -2x+10y+4z+6=0 \\ x-5y-2z-4=0 \end{cases}$

ratkaisuksi { }. Tulkitaan tämä vastaamaan laskettua ratkaisua eli, että yhtälöparilla ei ole ratkaisua. Kuva vahvistaa tämän, sillä tasot ovat yhdensuuntaiset eri tasot.



456. Pyramidin pohjan kärjet ovat suorien ja tason leikkauspisteet.
Pyramidin huippu on suorien yhteinen piste.



Suorien yhtälöistä nähdään, että kaikki suorat sisältävät pisteen (1, 1, 3).

Lasketaan ensimmäisen suoran ja tason leikkauspiste.
$-3(1-t)-(1-2t)-(3-3t)+2=0$, josta $t=\frac{5}{8}$.
Leikkauspiste on $(1-\frac{5}{8}, 1-2\times\frac{5}{8}, 3-3\times\frac{5}{8})=(\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{9}{8})$.

Lasketaan toisen suoran ja tason leikkauspiste.
$-3(1-2r)-(1-r)-(3-r)+2=0$, josta $r=\frac{5}{8}$.
Leikkauspiste on $(1-2\times\frac{5}{8}, 1-\frac{5}{8}, 3-\frac{5}{8})=(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{19}{8})$.

Lasketaan kolmannen suoran ja tason leikkauspiste.
$-3(1-2s)-(1+s)-(3-3s)+2=0$, josta $s=\frac{5}{8}$.
Leikkauspiste on $(1-2\cdot\frac{5}{8}, 1+\frac{5}{8}, 3-3\cdot\frac{5}{8})=(-\frac{1}{4}, \frac{13}{8}, \frac{9}{8})$.

Pyramidin kärjet ovat (1, 1, 3), $(\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{9}{8})$, $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{19}{8})$ ja $(-\frac{1}{4}, \frac{13}{8}, \frac{9}{8})$.

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

457. Sijoitetaan suoran koordinaatit tason yhtälöön $-x + 5y + 2z - 1 = 0$.

$$-(3 + 4t) + 5(2 + 2t) + 2(2 - 3t) - 1 = 0$$
$$10 = 0$$

Yksikään suoran piste ei toteuta tason yhtälöä.
Suoralla ja tasolla ei ole yhtään yhteistä pistettä.

458. Vektorin $\bar{u}$ suuntaisen suoran yhtälö on $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Sijoitetaan suoran pisteet yhtälöön $3x + y - 5z + 7 = 0$ ja ratkaistaan t.

$$3(-1 + t) + (-2 + t) - 5(-2 + 2t) + 7 = 0$$
$$-3 + 3t - 2 + t + 10 - 10t + 7 = 0$$
$$-6t + 12 = 0$$
$$-6t = -12$$
$$t = 2$$

Kun $t = 2$, saadaan koordinaatit

$$\begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = -2 + 2 = 0 \\ z = -2 + 2 \cdot 2 = 2 \end{cases}$$

joten suoran ja tason leikkauspiste on (1, 0, 2).

Vektorin $\bar{v}$ suuntaisen suoran yhtälö on $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Sijoitetaan suoran pisteet yhtälöön $3x + y - 5z + 7 = 0$ ja ratkaistaan t.

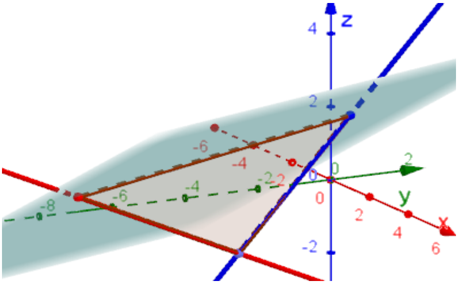
$$3(-1 + t) + (-2 - 2t) - 5(-2 + t) + 7 = 0$$
$$-3 + 3t - 2 - 2t + 10 - 5t + 7 = 0$$
$$-4t + 12 = 0$$
$$-4t = -12$$
$$t = 3$$

Kun t = 3, saadaan koordinaatit

$$\begin{cases} x = -1 + 3 = 2 \\ y = -2 - 2 \cdot 3 = -8\text{, joten} \\ z = -2 + 3 = 1 \end{cases}$$

suoran ja tason leikkauspiste on (2, −8, 1).

Kolmion kärjet ovat A = (−1, −2, −2), (1, 0, 2) ja (2, −8, 1).



459. Tason eräs normaalivektori on $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Taso kulkee pisteen A = (−2, 2, 1) kautta, joten tason yhtälö on
$4(x - (-2)) + 3(y - 2) - 5(z - 1) = 0$
$4x + 3y - 5z + 7 = 0$.

Lasketaan tason ja suoran leikkauspisteet.

$$\begin{aligned} 4 \cdot (2 + t) + 3 \cdot 2t - 5(3 + 2t) + 7 &= 0 \\ 8 + 4t + 6t - 15 - 10t + 7 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälö on aina tosi, riippumatta t:n arvosta eli suoran yhtälö toteuttaa tason yhtälön kaikilla t:n arvoilla. Tämä tarkoittaa että taso sisältää suoran kaikki pisteet.

460. **a)** Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} 3x-4y+7z-2=0 \\ -2x+3y+2z=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x-4y+7z-2=0 & \| \cdot 2 \\ -2x+3y+2z\quad=0 & \| \cdot 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-4y+7z-2=0 & \| \cdot 3 \\ -2x+3y+2z\quad=0 & \| \cdot 4 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 6x-8y+14z-4=0 \\ -6x+9y+\ 6z\quad=0 \end{cases} \qquad +\begin{cases} 9x-12y+21z-6=0 \\ -8x+12y+\ 8z\quad=0 \end{cases}$$

$$y+20z-4=0 \qquad\qquad x\ +\ 29z-6=0$$

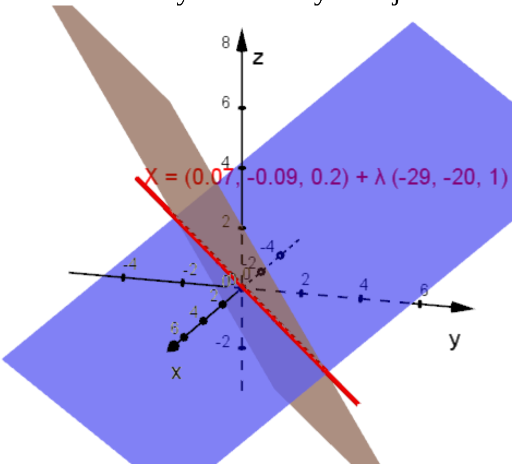
Näistä saadaan

$$y=4-20z \qquad\qquad x=6-29z$$

Tasot leikkaavat siis pitkin suoraa $\begin{cases} x=6-29t \\ y=4-20t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z=t \end{cases}$

Symbolisen laskennan ohjelma antaa yhtälöryhmän ratkaisuksi $x = -29z + 6$, $y = -20z + 4$ eli esittää x- ja y-koordinaatit z-koordinaatin avulla. Tämä on sama ratkaisu kuin mitä saatiin aiemmin.

Piirretään tasot yhtälöitä käyttäen ja otetaan tasojen leikkaus.



Leikkaussuoran yhtälö on erimuodossa, mutta suora on sama kuin suora, joka piirretään laskemalla saatua yhtälöä käyttäen.

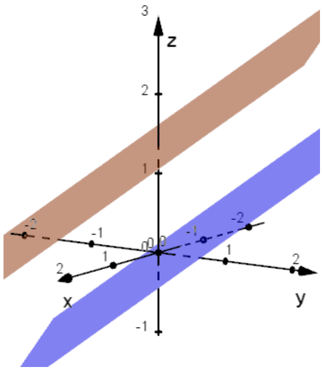
b) Ratkaistaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} -x+2y-3z+4=0 & \| \cdot 2 \\ 2x-4y+6z+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -2x+4y-6z+8=0 \\ 2x-4y+6z+1=0 \end{cases} \\ + \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline 9=0 \end{array}$$

Tasot eivät leikkaa.

Symbolisen laskennan ohjelma antaa yhtälöryhmän ratkaisuksi { }. Tulkitaan tämä vastaamaan laskettua ratkaisua eli, että yhtälöparilla ei ole ratkaisua. Kuva vahvistaa tämän, sillä tasot ovat yhdensuuntaiset eri tasot.



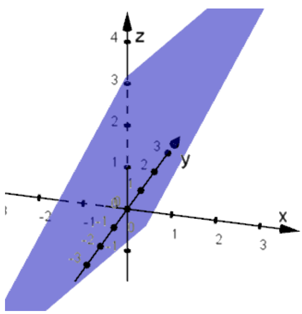
c) Ratkaistaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} -2x+\frac{1}{3}y+z-1=0 & \| \cdot 3 \\ 6x-y-3z+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -6x+y+3z-3=0 \\ 6x-y-3z+3=0 \end{cases} \\ + \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline 0=0 \end{array}$$

Yhtälöt toteutuvat samoissa pisteissä. Yhtälöt esittävät samaa tasoa. Kaikki tason pisteet ovat leikkauspisteitä.

Symbolisen laskennan ohjelma antaa yhtälöryhmän ratkaisuksi { }. Tulkitaan tämä vastaamaan laskettua ratkaisua eli, että yhtälö kuvaavat samaa tasoa. Kuva vahvistaa tämän.



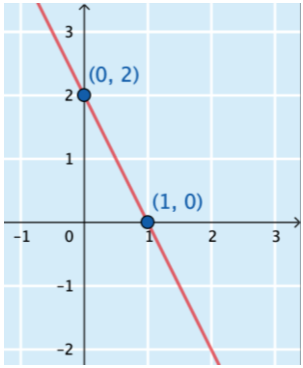
461. Tason pisteet $A = (1, 0, 0)$ ja $B = (0, 2, 0)$ ovat xy-tasossa, sillä pisteiden z-koordinaatti on nolla

Tason ja xy-tason leikkaussuora kulkee siis pisteiden $A = (1, 0, 0)$ ja $B = (0, 2, 0)$ kautta.

Vastaava xy-tason suora kulkee xy-tason pisteiden $(1, 0)$ ja $(0, 2)$ kautta.

Tämän suoran kulmakerroin on $\dfrac{2-0}{0-1} = -2$

ja suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 2)$, joten suoran yhtälö on $y = -2x + 2$ eli $2x + y - 2 = 0$.



Huomautus: Tehtävän voi ratkaista myös pidemmillä laskuilla laatimalla pisteiden A, B ja C kautta kulkevan tason normaalivektorin laskemalla ristitulon $\overline{AB} \times \overline{AC}$ determinanttia käyttäen. Tästä saa tason yhtälön. Sijoittamalla yhtälöön $z = 0$, saadaan tason ja xy-tason leikkaussuoran yhtälö.

462. Tason suuntavektorit ovat

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 0-2 \\ 5-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ja } \overline{AC} = \begin{bmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 4-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Tason eräs normaalivektori on

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \overline{i} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \overline{j} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \overline{k} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \overline{i} \cdot (5 \cdot 4 - 0 \cdot 0) - \overline{j} \cdot (-2 \cdot 4 - 0 \cdot (-2)) + \overline{k} \cdot (-2 \cdot 0 - 5 \cdot (-2))$$

$$= 20\overline{i} + 8\overline{j} + 10\overline{k} = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Valitaan pienempien lukujen vuoksi normaalivektoriksi

$$\tfrac{1}{2}(\overline{AB} \times \overline{AC}) = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Taso kulkee pisteen $A = (2, 0, 0)$ kautta, joten tason yhtälö on
$10(x - 2) + 4(y - 0) + 5(z - 0) = 0$
$10x + 4y + 5z - 20 = 0.$

Normaali kulkee pisteen (0, 0, 1) kautta.
Normaalin yhtälö on:

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 4t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

Lasketaan tason ja normaalin leikkauspiste.
$10 \cdot 10t + 4 \cdot 4t + 5(1 + 5t) - 20 = 0$

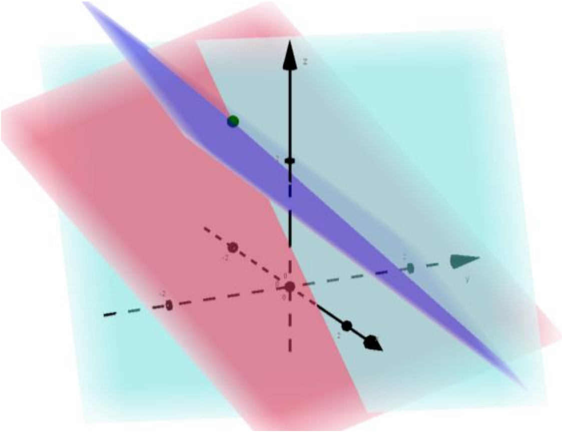
$$141t = 15 \quad \| :3$$

$$47t = 5$$

$$t = \frac{5}{47}$$

Leikkauspiste on $(10 \cdot \frac{5}{47}, 4 \cdot \frac{5}{47}, 1 + 5 \cdot \frac{5}{47}) = (\frac{50}{47}, \frac{20}{47}, \frac{72}{47}).$

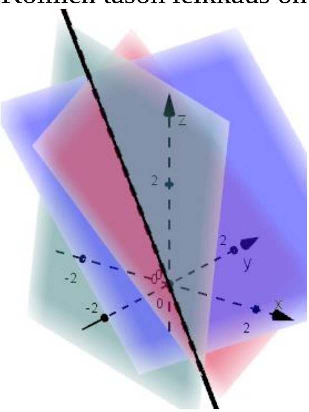
463. **a)** Ohjelmalla saadaan suoraan yhtälöryhmän ratkaisu $x = -2$, $y = 0$, $z = 2$. Kukin yhtälöistä kuvaa tasoa. Yhtälöryhmän ratkaisu toteuttaa kaikki yhtälöt eli on piste $(-2, 0, 2)$ on kaikissa kolmessa tasossa. Se on kolmen tason leikkaus.



b) Ohjelmalla saadaan yhtälöryhmän ratkaisu
$x = -z + 2$, $y = \frac{1}{2}z - 2$, $z = z$.

Ratkaisu on suora $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Kolmen tason leikkaus on suora.



Huomautus:
Yhtälöryhmä voidaan ratkaista ilman B-osan ohjelmia kirjassa Juuri 4 käsitellyllä tavalla. Ratkaistaan esimerkiksi a-kohdan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -2x - y - 3z + 2 = 0 \\ x + 5y + 6z - 10 = 0 \\ 6x - 2y + 9z - 6 = 0 \end{cases}.$$

Eliminoidaan *x* kahdesta parista yhtälöitä.

$$\begin{cases} -2x - y - 3z + 2 = 0 \\ x + 5y + 6z - 10 = 0 \quad \|\cdot 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 5y + 6z - 10 = 0 \quad \|\cdot(-6) \\ 6x - 2y + 9z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -2x - y - 3z + 2 = 0 \\ 2x + 10y + 12z - 20 = 0 \end{cases} \qquad +\begin{cases} -6x - 30y - 36z + 60 = 0 \\ 6x - 2y + 9z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$9y + 9z - 18 = 0 \quad \|:9 \qquad -32y - 27z - 54 = 0$$

$$y + z - 2 = 0$$

Yhdistetään saadut yhtälöt yhtälöpariksi ja ratkaistaan se.

$$\begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ -32y - 27z - 54 = 0 \end{cases}$$

Ylemmästä saadaan $z = 2 - y$. Sijoitetaan se alempaan ja ratkaistaan *y*.
$-32y - 27(2 - y) - 54 = 0$
$-32y - 54 + 27y - 54 = 0$
$-5y = 0$
$y = 0$

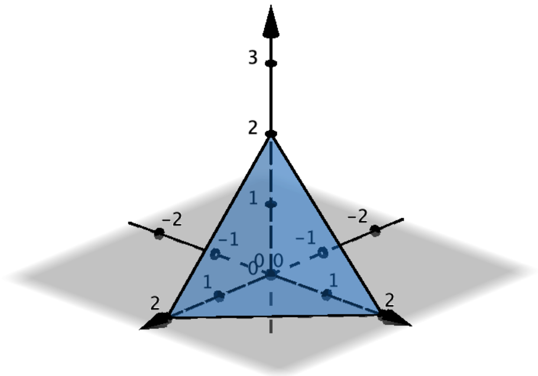
Tällöin $z = 2 - y = 2 - 0 = 2$.

Sijoitetaan $y = 0$ ja $z = 2$ yhteen alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön ja ratkaistaan *x*.
$x + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 2 - 10 = 0$
$x + 2 = 0$
$x = -2$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $x = -2$, $y = 0$ ja $z = 2$.

464. Etsitään pallon $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ja akseleiden leikkauspisteet. Kullakin akselilla kaksi muuta koordinaattia ovat nollia, joten leikkauspisteet ovat
x-akselilla (2, 0, 0) ja (−2, 0, 0),
y-akselilla (0, 2, 0) ja (0, −2, 0) ja
z-akselilla (0, 0, 2) ja (0, 0, −2).

Taso kulkee pisteiden (2, 0, 0), (0, 2, 0) ja (0, 0, 2) kautta. Koska pyramidia rajaa myös tasot $x = 0$, $y = 0$ ja $z = 0$, ovat kyseiset pisteet yhdessä origon kanssa pyramidin kärkipisteet.

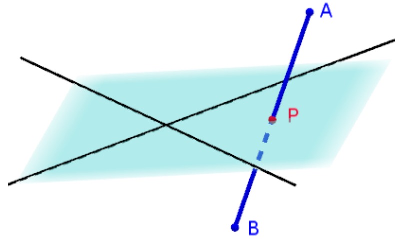


Pyramidin tilavuus on $\frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 2}{2}\cdot 2 = \frac{4}{3}$.

Pallon tilavuus on $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32\pi}{3}$.

Todennäköisyys, että pallon sisältä umpimähkään valittu piste ei ole pyramidin sisässä on $\dfrac{\frac{32\pi}{3}-\frac{4}{3}}{\frac{32\pi}{3}} = 1-\frac{\pi}{8} = 0{,}960... \approx 0{,}96.$

465. Jos piste P jakaa janan AB suhteessa 1:1, piste P on janan AB keskipiste. Riittää osoittaa, että janan AB keskipiste P on suorien määräämässä tasossa ja että P on ainoa janan AB ja tason leikkauspiste.



$$P = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (2,\ 2,\ 3)$$

Muodostetaan suorien määräämän tason yhtälö. Ensin mainitulla suoralla on piste (3, 0, 2).

Suorien suuntavektorit ovat $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Tason eräs normaalivektori on

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i} \cdot (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) - \bar{j} \cdot (2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)) + \bar{k} \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1))$$

$$= 3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Tason yhtälö on $3(x - 3) - (y - 0) + 5(z - 2) = 0$ eli $3x - y + 5z - 19 = 0$.

Piste P on tasossa, koska se toteuttaa tason yhtälön:

$$3 \cdot 3 - 0 + 5 \cdot 2 - 19 = 0$$
$$9 + 10 - 19 = 0$$
$$0 = 0$$

Koko jana AB ei ole tasossa, koska piste B ei toteuta tason yhtälöä eikä näin ollen ole tasossa:

$$3 \cdot 1 - 1 + 5 \cdot 0 - 19 = 0$$
$$-17 = 0$$

Piste P on siis janan AB ja tason leikkauspiste.
Koska piste P on janan AB keskipiste, se jakaa janan AB suhteessa 1:1.

Ratkaisutapa 2:
Muodostetaan tason yhtälö. Ensin mainitulla suoralla on piste (3, 0, 2).

Suorien suuntavektorit ovat $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Tason eräs normaalivektori on

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i} \cdot (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) - \bar{j} \cdot (2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)) + \bar{k} \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1))$$

$$= 3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Tason yhtälö on $3(x - 3) - (y - 0) + 5(z - 2) = 0$ eli $3x - y + 5z - 19 = 0$.

Muodostetaan seuraavaksi pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran yhtälö.

Suoran suuntavektori on $\overline{AB} = \begin{bmatrix} 1 - 3 \\ 1 - 3 \\ 0 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$ ja koska suora kulkee

pisteen $B = (1, 1, 0)$ kautta, on sen yhtälö $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Etsitään suoran ja tason leikkauspiste.

$$\begin{aligned} 3(1 - 2t) - (1 - 2t) + 5(-6t) - 19 &= 0 \\ 3 - 6t - 1 + 2t - 30t - 19 &= 0 \\ -34t &= 17 \\ t &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Leikkauspiste on siis

$P = (1 - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) , 1 - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) , -6 \cdot (-\frac{1}{2})) = (2, 2, 3)$.

Koska $AP = \sqrt{(3 - 2)^2 + (3 - 2)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{11}$ ja

$BP = \sqrt{(1 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{11}$, ovat janat AP ja PB yhtä pitkät eli suorat sisältävän tason ja janan AB yhteinen piste P jakaa janan AB suhteessa 1:1.

466. Kaksi eri tasoa voivat sijaita toisiinsa nähden kahdella tavalla.
1. Kaksi eri tasoa leikkaavat toisensa pitkin suoraa s.
2. Kaksi eri tasoa ovat yhdensuuntaiset.

Mietitään kolmannen tason lisäämistä edellä mainituissa kahdessa tapauksessa.

Tapauksessa 1 kolmas taso voi sijaita leikkaussuoraan s nähden kolmella tavalla.
a) Kolmas taso voi leikata leikkaussuoran s yhdessä pisteessä P. Tällöin kolmella tasolla on yksi yhteinen piste (P).
b) Kolmas taso voi olla yhdensuuntainen leikkaussuoran s kanssa niin, että s tason ulkopuolella. Tällöin kolmella tasolla ei ole yhteisiä pisteitä.
c) Kolmas taso voi sisältää leikkaussuoran s. Tällöin kolmella tasolla on äärettömän monta yhteistä pistettä (suora s).

Tapauksessa 2 kahdellakaan tasolla ei ole leikkauspisteitä, joten sijaitsipa kolmas taso miten tahansa, ei tasoilla ole yhteisiä pisteitä.

Kolmella tasolla voi siis olla nolla, yksi tai äärettömän monta yhteistä pistettä.

Annetaan esimerkit kustakin tapauksesta.

Esimerkiksi tasolla $z = 0$, tasolla $z = 1$ ja tasolla $7x + 9y + 5z + 13 = 0$ ei ole yhteisiä pisteitä, koska $z = 0$ ja $z = 1$ ovat yhdensuuntaiset.

Esimerkiksi xy-tasolla, yz-tasolla ja xz-tasolla on yksi yhteinen piste, origo. Näiden tason yhtälöt ovat $z = 0$, $x = 0$ ja $y = 0$.

Esimerkiksi tasolla $x = 0$, tasolla $y = 0$ ja tasolla $y = x$ on äärettömän monta yhteistä pistettä, sillä kaikki nämä tasot sisältävät z-akselin.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

467. **a)** Suorat ovat samassa tasossa esimerkiksi, jos suorat leikkaavat (leikkauspiste ja suorien suuntavektorit määräävät tason).

Koska yhtälöparilla $\begin{cases} 1 = 2r \\ 2 - 2t = 3 - 4r \\ 3 - 2t = 1 + 2r \end{cases}$ on ratkaisu $r = \frac{1}{2}$ ja $t = \frac{1}{2}$, suorat leikkaavat eli ne ovat samassa tasossa.

Leikkauspiste saadaan sijoittamalla toinen ratkaisuista vastaavan suoran yhtälöön. Leikkauspiste on (1, 1, 2).

b) Pistejoukon ehtona on, että *x*- ja *z*-koordinaatit ovat molemmat 2, mutta *y*-koordinaatti voi olla mikä tahansa. Pistejoukko on siis *xyz*-koordinaatiston suora $\begin{cases} x = 2 \\ y = t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 2 \end{cases}$

Suora kulkee *y*-akselin suuntaisesti pisteen (2, 0, 2) kautta.

Muodostetaan a-kohdan tason yhtälö. Suorien suuntavektorit ovat $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Tason eräs normaalivektori on $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Taso sisältää pisteen (1, 1, 2), joten sen yhtälö on
$-12(x-1) - 4(y-1) + 4(z-2) = 0$.
Yhtälö sievenee edelleen muotoon $3x + y - z - 2 = 0$.

Sijoitetaan tason yhtälöön suoran koordinaatit ($x = z = 2$).
$3 \cdot 2 + y - 2 - 2 = 0$, josta saadaan $y = -2$.

Suora $x = z = 2$ ja a-kohdan taso leikkaavat siis pisteessä $(2, -2, 2)$.

468. Pyramidin huippu toteuttaa kaikkien tasojen yhtälöt. Kuitenkin jo kolme yhtälöä riittää eli huippupiste on yhtälöryhmän $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=3 \\ x+y-z=-3 \end{cases}$ ratkaisu $x = 0$, $y = 0$, $z = 3$ eli piste $H = (0, 0, 3)$.

Pyramidin pohjatahkon kärjet ovat xy-tason pisteitä, jotka toteuttavat kahden tason yhtälöt ja $z = 0$.

Neljästä tason yhtälöstä voidaan valita kaksi $\binom{4}{2} = 6$ eri tavalla.

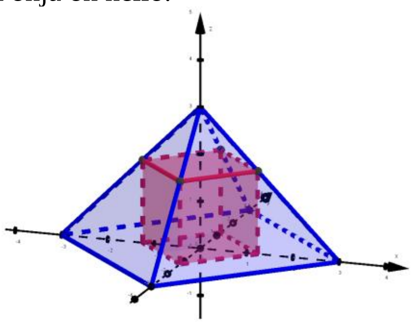
Ratkaistaan yhtälöryhmät

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=3 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y-z=-3 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z=3 \\ x+y-z=-3 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+z=3 \\ x-y-z=-3 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \\ z=0 \end{cases}$$

Yhtälöryhmillä $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=-3 \\ z=0 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x-y+z=3 \\ x-y-z=-3 \\ z=0 \end{cases}$ ei ole ratkaisua.

Pyramidin pohjan kärjet ovat siis (3, 0, 0), (0, 3, 0), (−3, 0, 0) ja (0, −3, 0). Pohja on neliö.

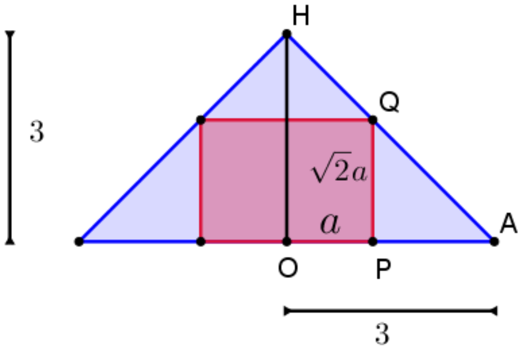


On selvää, että kuutio sivuaa kaikkia pyramidin tahkoja ja kuution pohjan sivut pyramidin pohjaneliön suuntaiset. Näin ollen kuution pohjan kärjet ovat $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(-a, 0, 0)$ ja $(0, -a, 0)$.

Tästä eteenpäin näytetään kaksi ratkaisutapaa.

Ratkaisutapa 1:
Pyramidin korkeus on 3 ja pohjaneliön lävistäjän puolikkaan pituus on 3.
Kuution pohjaneliön lävistäjän puolikkaan pituus on a.
Kuution sivun pituus on $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,a$.

Olkoon O origo, A yksi pyramidin kärki,
Q pyramidein sivulla AH oleva kuution kärki ja
P janalla OA oleva kuution kärki.



Kolmiot OAH ja PAQ ovat yhdenmuotoiset (kk).

Näin ollen $\dfrac{OH}{OA}=\dfrac{PQ}{PA}$. Sijoitetaan tähän mitat ja ratkaistaan a.

$$\frac{3}{3}=\frac{\sqrt{2}\,a}{3-a}$$

$$a=3\sqrt{2}-3$$

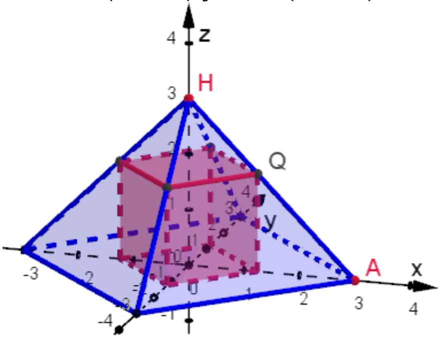
Kuution sivun pituus on siis $\sqrt{2}\,a=6-3\sqrt{2}$.

Kuution tilavuus on $a^3=540-378\sqrt{2}$.

Ratkaisutapa 2:

Kuution sivun pituus on $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,a$. Kuution muiden kärkien z koordinaatti on kuution sivun pituus. Muut kärjet ovat siis $(a, 0, \sqrt{2}\,a)$, $(0, a, \sqrt{2}\,a)$, $(-a, 0, \sqrt{2}\,a)$ ja $(0, -a, \sqrt{2}\,a)$.

Kuution kärki $Q = (a, 0, \sqrt{2}\,a)$ on pyramidin sivusärmällä AB, kun $A = (3, 0, 0)$ ja $H = (0, 0, 3)$.



Suoran AH suuntavektori on $\overline{AH}=\begin{bmatrix}-3\\0\\3\end{bmatrix}$ ja yhtälö $\begin{cases}x=3-3t\\y=0\\z=3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Piste Q on suoralla AH, joten $\begin{cases}a=3-3t\\0=0\\\sqrt{2}\,a=3t\end{cases}$, josta $a=3\sqrt{2}-3$.

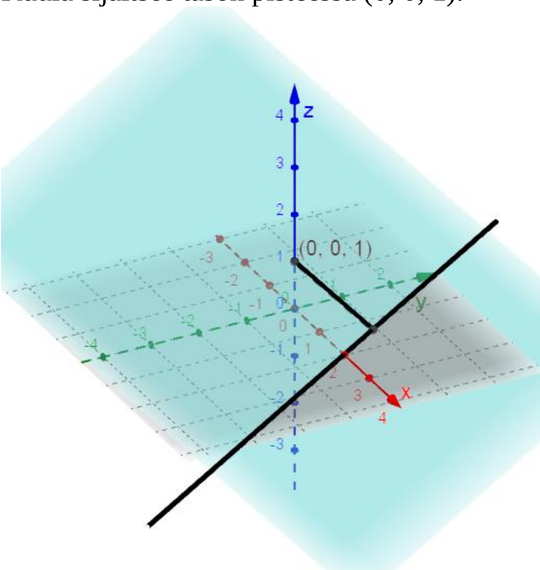
Kuution sivun pituus on siis $\sqrt{2}\,a=6-3\sqrt{2}$.

Kuution tilavuus on $a^3=540-378\sqrt{2}$.

469. z-akselilla x- ja y-koordinaatti ovat nollia. Selvitetään tason ja z-akselin leikkauspiste.

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6z = 6$$
$$z = 1$$

Kuula sijaitsee tason pisteessä (0, 0, 1).



Kun kuula vierii tasoa pitkin kohti xy-tasoa, se vierii suuntaan, joka on kohtisuorassa tason ja xy-akselin leikkaussuoraa vastaan.

xy-tasolla $z = 0$. Näin ollen tason ja xy-tason leikkaussuora on $3x + 2y = 6$, josta $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

Piste, joka on tällä suoralla, on muotoa $(x, -\frac{3}{2}x + 3, 0)$.

Ratkaistaan tuntematon x, kun tiedetään, että suora, jota pitkin kuula vierii ja tason leikkaussuora ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tällöin niiden suuntavektorien pistetulo on nolla.

Leikkaussuoralla on pisteet (0, 3, 0) ja (2, 0, 0).

Leikkaussuoran suuntavektori on $\begin{bmatrix} 0-2 \\ 3-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Suoralla, jota pitkin kuula vierii, on piste (0, 0, 1) ja jokin muotoa $(x,\ -\frac{3}{2}x + 3,\ 0)$ oleva leikkaussuoran piste.

Suoran suuntavektori on $\begin{bmatrix} x-0 \\ -\frac{3}{2}x+3-0 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{3}{2}x+3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Lasketaan suuntavektorien pistetulo, jonka tulee olla nolla.

$$\begin{aligned} x(-2)+(-\frac{3}{2}x+3)\cdot 3-1\cdot 0 &= 0 \\ -2x-\frac{9}{2}x+9 &= 0 \\ -\frac{13}{2}x &= -9 \quad \|:(-\frac{13}{2}) \\ x &= \frac{18}{13} \end{aligned}$$

Ratkaistaan pisteen y-koordinaatti suoran yhtälöstä $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

$$y = -\frac{3}{2}\cdot\frac{18}{13}+3 = \frac{12}{13}$$

Kuula kohtaa maanpinnan pisteessä $(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}, 0)$.

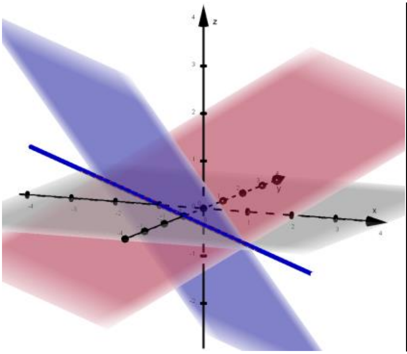
470. xy-tason suora $a_1x + b_1y + d_1 = 0$ on tason $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ja xy-tason ($z = 0$) leikkaussuora.
Vastaavasti xy-tason suora $a_2x + b_2y + d_2 = 0$ on tason $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ ja xy-tason leikkaussuora.

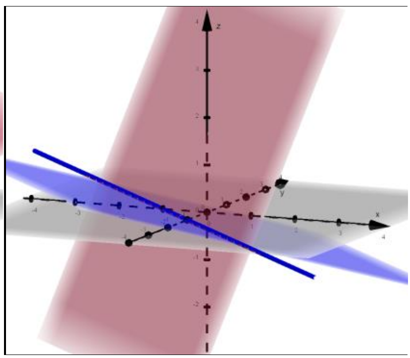
Tasot $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ja $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ voivat leikata xy-tason suoraa pitkin, jolloin xy-tason suorat $a_1x + b_1y + d_1 = 0$ ja $a_2x + b_2y + d_2 = 0$ ovat sama suora.

Esimerkiksi tasot $x + y + z = 0$ ja $x + y + 2z = 0$ ovat eri tasot ja leikkaavat pitkin xy-tason suoraa $x + y = 0$. Suorat $x + y = 0$ ja $x + y = 0$ ovat sama suora, joten suorat eivät leikkaa yhdessä pisteessä.
Tasot eivät leikkaa pitkin samaa suoraa.

Huomautus:
Tasot $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ja $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ voidaan piirtää ohjelmalla niin, että kertoimien a_1, b_1, c_1, d_1 ja a_2, b_2, c_2, d_2 arvoja voidaan vaihtaa.

Ohjelmalla tutkien väite vaikuttaa monessa tilanteessa pätevältä. Väite ei kuitenkaan ole tosi. Ohjelmalla huomataan, että tasojen yhtälöissä kertoimien c_1 ja c_2 arvo ei vaikuta suorien yhtälöihin. Tasojen yhtälöt voivat siis erota kertoimien c_1 ja c_2 osalta ja suorat ovat silti samat.





4.4 Kulmien ja etäisyyksien laskentaa tasoille

YDINTEHTÄVÄT

471. Jos suoran suuntavektorin ja tason normaalivektorin välinen kulma α ei ole tylppä, on suoran ja tason välinen kulma 90° − α. Muussa tapauksessa se on α − 90°.

a) Kulma on 90° − 30° = 60°.
b) Kulma on 130° − 90° = 40°.
c) Kulma on 90° − 90° = 0° (eli suora on tason suuntainen).
d) Kulma on 90° − 0° = 90° (eli suora on tason normaali).

472. **a)** Lasketaan suoran suuntavektorin $\overline{s}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ ja tason normaalivektorin

$\overline{n}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ välinen kulma.

$$\cos(\overline{n},\overline{s})=\frac{\overline{n}\cdot\overline{s}}{|\overline{n}||\overline{s}|}=\frac{1\cdot1+1\cdot2+(-1)\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}$$
$$\sphericalangle(\overline{n},\overline{s})=61{,}87...°\approx 61{,}9°$$

Suoran ja tason välinen kulma on 90° − 61,9° = 28,1°.

b) Lasketaan suoran suuntavektorin ja tason normaalivektorin $\overline{n}=\begin{bmatrix}-3\\1\\5\end{bmatrix}$

välinen kulma.

$$\cos(\overline{n},\overline{s})=\frac{\overline{n}\cdot\overline{s}}{|\overline{n}||\overline{s}|}=\frac{1\cdot(-3)+1\cdot1+(-1)\cdot5}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2+5^2}}=\frac{-7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{35}}$$
$$\sphericalangle(\overline{n},\overline{s})=133{,}08...°\approx 133{,}1°$$

Suoran ja tason välinen kulma on 133,1° − 90° = 43,1°.

c) *xy*-tason normaalivektori on $\overline{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lasketaan suoran suuntavektorin ja *xy*-tason normaalivektorin välinen kulma.

$$\cos(\overline{s}, \overline{n}) = \frac{\overline{s} \cdot \overline{n}}{|\overline{s}||\overline{n}|} = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$
$$\sphericalangle(\overline{s}, \overline{n}) = 125{,}3°$$

Suoran ja *xy*-tason välinen kulma on 125,3° − 90° = 35,3°.

473. Suoran suuntavektorin $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja tason normaalivektorin $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ pistetulo on $3 \cdot 5 - 7 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) = 15 - 7 - 8 = 0,$ joten suoran suuntavektori ja tason normaalivektori ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Suora on tason suuntainen.

474. Jos normaalivektoreiden välinen kulma α ei ole tylppä, on tasojen välinen kulma normaalivektoreiden välinen kulma α. Muussa tapauksessa tasojen välinen kulma on normaalivektoreiden suplementtikulma $180° - \alpha$.

a) Kulma on 40°.
b) Kulma on 180° − 160° = 20°.
c) Kulma on 90° (eli tasot ovat kohtisuorassa).
d) Kulma on 0° (eli tasot ovat yhdensuuntaiset).

475. **a)** Tasojen normaalivektorit ovat $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lasketaan normaalivektoreiden välinen kulma α.

$$\cos\alpha = \frac{3\cdot 0 - 1\cdot 1 + 2\cdot 1}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}}$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}}$$
$$\alpha = 79{,}10...^\circ \approx 79^\circ$$

Tasojen välinen kulma 79°.

b) Koska tasojen normaalivektoreiden $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ pistetulo on

$3\cdot 2 + 1\cdot 4 - 5\cdot 2 = 6 + 4 - 10 = 0,$ ovat normaalivektorit ja siten myös tasot toisian vastaan kohtisuorassa.

476. **a)** Tosi. Tasojen välinen kulma määräytyy normaalivektoreiden välisestä kulmasta.

b) Epätosi. Jos tasojen normaalivektorit ja siten myös tasot ovat erisuuntaiset, ne välttämättä leikkaavat eli niillä on yhteisiä pisteitä. Ellei yhteisiä pisteitä olisi, olisivat tasot yhdensuuntaiset.

c) Tosi. Jos normaalivektorit ovat yhdensuuntaiset ovat tasot yhdensuuntaiset, joten myös kulma, jossa suora tasot leikkaavat, on sama.

477. Muodostetaan pisteen P kautta kulkevan tason normaalin yhtälö. Pisteen P projektio P' tasolla on tämän normaalin ja tason leikkauspiste. Pisteen P etäisyys tasosta on janan PP' pituus.

Tason $x - 4y + 8z - 9 = 0$ eräs normaalivektori eli normaalin suuntavektori on $\overline{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Normaali kulkee pisteen $P = (6, -20, 41)$ kautta, joten sen parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 6 + t \\ y = -20 - 4t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 41 + 8t \end{cases}$$

Lasketaan tason ja normaalin leikkauspiste P' sijoittamalla normaalin mielivaltainen piste $(6 + t, -20 - 4t, 41 + 8t)$ tason $x - 4y + 8z - 9 = 0$ yhtälöön.

$$\begin{aligned} (6 + t) - 4(-20 - 4t) + 8(41 + 8t) - 9 &= 0 \\ 6 + t + 80 + 16t + 328 + 64t - 9 &= 0 \\ t &= -5 \end{aligned}$$

Projektiopiste P' on siten
$(6 + (-5), -20 - 4 \cdot (-5), 41 + 8 \cdot (-5)) = (1, 0, 1)$.

Pisteiden $P = (6, -20, 41)$ ja $P' = (1, 0, 1)$ välinen etäisyys on sama kuin vektorin $\overline{PP'}$ pituus.

$$\overline{PP'} = \begin{bmatrix} 1-6 \\ 0+20 \\ 1-41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 20 \\ -40 \end{bmatrix}$$

$$|\overline{PP'}| = \sqrt{(-5)^2 + 20^2 + (-40)^2} = 45$$

Pisteen P etäisyys tasosta on 45.

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

478. **a)** *xy*-tasolla $z = 0$. Tällöin $6 - 2t = 0$, eli $t = 3$.
Tätä vastaava piste eli *xy*-tason ja suoran leikkauspiste on $(-4, -4, 0)$.

Suoran suuntavektori on $\bar{s} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

xy-tason normaalivektori on $\bar{n} = \bar{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lasketaan suoran suuntavektorin ja *xy*-tason normaalivektorin välinen kulma.

$$\cos(\bar{s},\bar{n}) = \frac{\bar{s}\cdot\bar{n}}{|\bar{s}||\bar{n}|} = \frac{-3\cdot 0 - 1\cdot 0 - 2\cdot 1}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{14}}$$
$$\sphericalangle(\bar{s},\bar{n}) = 122{,}31...^\circ \approx 122{,}3^\circ$$

Suoran ja *xy*-tason välinen kulma on $122{,}3^\circ - 90^\circ = 32{,}3^\circ$.

Lasketaan suoran ja tason $2x + 3z = 0$ leikkauspiste.

$2(5 - 3t) + 3(6 - 2t) = 0$, josta $t = \frac{7}{3}$.

Tätä arvoa vastaa piste $(-2, -\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$.

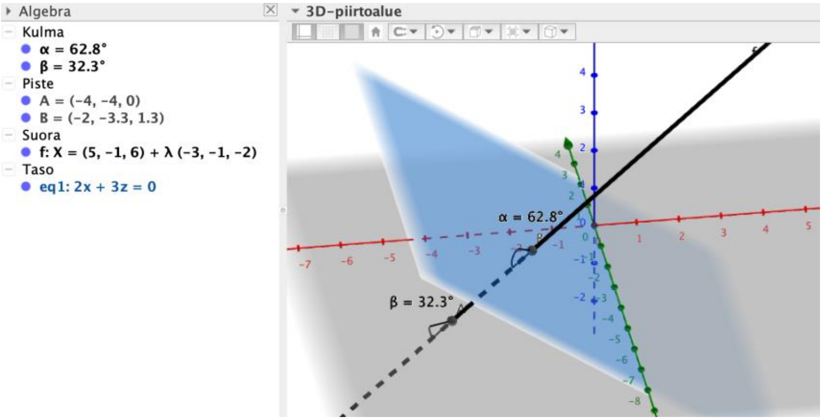
Tason normaalivektori on $\bar{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Lasketaan suoran suuntavektorin ja tason normaalivektorin välinen kulma.

$$\cos(\bar{s},\bar{n}) = \frac{\bar{s}\cdot\bar{n}}{|\bar{s}||\bar{n}|} = \frac{-3\cdot 2 - 1\cdot 0 - 2\cdot 3}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+9^2}} = \frac{-12}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{13}}$$
$$\sphericalangle(\bar{s},\bar{n}) = 152{,}81...^\circ \approx 151{,}8^\circ$$

Suoran ja tason välinen kulma on $152,\ 8^\circ - 90^\circ = 62{,}8^\circ$.

b) Tulokset varmistuvat GeoGebralla tehdystä kuvasta.



479. *xy*-tasossa $z = 0$. Kun tämän sijoittaa tasojen yhtälöihin ne saavat muodot $x + 2y = 3$ ja $2x + 4y = 6$. Jälkimmäinen sievenee muotoon $x + 2y = 3$, joten molemmat tasot leikkaavat *xy*-tason pitkin samaa suoraa.

Tasojen normaalivektorit ovat $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix}2\\4\\-5\end{bmatrix}$.

Lasketaan normaalivektoreiden välinen kulma α.

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-5)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+(-5)^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{-5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{45}}$$

$$\alpha = 101{,}49...^\circ \approx 101{,}5^\circ$$

Tasojen välinen kulma on $180° - 101{,}5° = 78{,}5°$.

480. **a)** Pisteen (1, 2, 3) projektiossa xy-tasolla $z = 0$ eli projektiopiste on (1, 2, 0).

b) Pisteen (1, 2, 3) projektiossa x-akselilla $y = 0$ ja $z = 0$ eli projektiopiste on (1, 0, 0).

c) Muodostetaan pisteen P kautta kulkevan tason normaalin yhtälö. Pisteen P projektio P' on tämän normaalin ja tason leikkauspiste.

Tason normaalivektori eli normaalin suuntavektori on $\overline{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Normaali kulkee pisteen $P = (1, 2, 3)$ kautta. Normaalin yhtälö on

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - t \end{cases}.$$

Lasketaan tason ja normaalin leikkauspiste P' sijoittamalla normaalin mielivaltainen piste $(1 + 2t, 2 + 3t, 3 - t)$ tason $2x + 3y - z + 1 = 0$ yhtälöön.

$$\begin{aligned} 2(1 + 2t) + 3(2 + 3t) - (3 - t) + 1 &= 0 \\ 2 + 4t + 6 + 9t - 3 + t + 1 &= 0 \\ 14t + 6 &= 0 \\ t &= -\frac{6}{14} = -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

Projektiopiste P' on siten

$$\left(1 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right), 2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right), 3 - \left(-\frac{3}{7}\right)\right) = \left(\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, 3\frac{3}{7}\right).$$

481. Suoralla ja tasolla ei ole yhteisiä pisteitä, jos suoran pisteet eivät toteuta tason yhtälöä millään parametrin *t* arvoilla.

Sijoitetaan suoran pisteet tason yhtälöön.

$$2(-1+2t)-(2+t)+1-3t+2=0$$
$$-2+4t-2-t+1-3t+2=0$$
$$-1=0$$

Yhtälö ei toteudu millään parametrin *t* arvolla, joten suoralla ja tasolla ei ole yhteisiä pisteitä.

Koska suora on tason suuntainen on sen jokaisen pisteen etäisyys tasosta sama. Riittää laskea jonkin suoran pisteen etäisyys tasosta.

Arvoa $t = 0$ vastaa piste $(-1, 2, 1)$. Tämän pisteen etäisyys tasosta $2x - y + z + 2 = 0$ on $\frac{|2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+1\cdot 1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Suora kulkee tasosta etäisyydellä $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

482. Tasot ovat yhdensuuntaiset, sillä niillä on sama normaalivektori $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Valitaan jokin tason $2x + 2y + z + 4 = 0$ piste, esimerkiksi x-akselin leikkauspiste ja lasketaan sen etäisyys tasosta $2x + 2y + z + 1 = 0$.

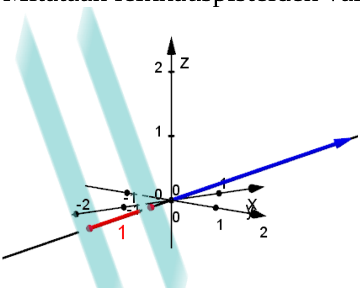
x-akselilla $y = 0$ ja $z = 0$.
$2x + 2 \cdot 0 + 0 + 4 = 0$
$x = -2$

Tason ja $2x + 2y + z + 4 = 0x$-akselin leikkauspiste on $A = (-2, 0, 0)$.
Tämän pisteen etäisyys tasosta $2x + 2y + z + 1 = 0$ on

$$\frac{|2 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{9}} = 1.$$

Tasojen välinen etäisyys on 1.

Tarkistetaan vielä piirtämällä ja mittaamalla.
Piirretään tasot.
Piirretään origon kautta kulkeva tasojen normaalivektorin suuntainen suora.
Otetaan suoran ja tasojen leikkauspisteet.
Mitataan leikkauspisteiden välinen etäisyys. Saadaan 1.



483. Kyseiset pisteet muodostavat tason, joka kulkee janan *AB* keskipisteen kautta ja jonka eräs normaalivektori on $\overline{AB} = \begin{bmatrix} 8-0 \\ 0-2 \\ -5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$.

Janan *AB* keskipiste on $(\frac{0+8}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{1+(-5)}{2}) = (4, 1, -2)$.

Tason yhtälö on $8(x-4)-2(y-1)-6(z-(-2))=0$ eli
$8x-2y-6z-42=0$. Tämä sievenee muotoon $4x-y-3z-21=0$.

Muodostetaan pisteen *C* kautta kulkevan tason normaalin yhtälö. Pistettä *C* lähinnä oleva tason piste on pisteen *C* projektiopiste *C′* tasolla.

Tason normaalivektori eli normaalin suuntavektori on $\bar{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Pisteen $C = (-6, 3, 10)$ kautta kulkevan normaalin yhtälö on

$$\begin{cases} x = -6+4t \\ y = 3-t \qquad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 10-3t \end{cases}$$

Normaalin ja tason leikkauspistettä vastaava parametrin *t* arvo on yhtälön $4(-6+4t)-(3-t)-3(10-3t)-21=0$ ratkaisu $t=3$.

Projektiopiste *C′* on siten $(-6+4\cdot 3, 3-3, 10-3\cdot 3) = (6, 0, 1)$.

Huomautus
Tason yhtälön saa myös ehdosta, että piste (x, y, z) on yhtä kaukana pisteistä *A* ja *B*.

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2+(z-1)^2} = \sqrt{(x-8)^2+(y-0)^2+(z+5)^2}$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4y+\cancel{z^2}-2z+5 = \cancel{x^2}-16x+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}+10z+89$$

$$16x-4y-12z-84=0 \quad ||:4$$

$$4x-y-3z-21=0$$

484. Paikkavektorin päätepiste $(t, 1 - t, 3)$ on tasossa kun se toteuttaa tason yhtälön. Yhtälön $3t - (1 - t) + 4 \cdot 3 - 7 = 0$ ratkaisu on $t = -1$, jolloin

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-(-1) \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Suoran ja tason välinen kulma saadaan suoran suuntavektorin $\bar{u}$ ja tason normaalivektorin $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ välisestä kulmasta. Lasketaan tämä kulma α.

$$\cos\alpha = \frac{-1\cdot 3 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}\cdot\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}}$$

$$\alpha = 68{,}47...^\circ \approx 68{,}5^\circ$$

Suoran ja tason välinen kulma on $90^\circ - 68{,}5^\circ = 21{,}5^\circ$.

485. Tason yhtälö on muotoa $2x - y + cz = 3$. Kun $x = 0$, $y = 0$ ja $z = 3$, saadaan $3c = 3$, joten $c = 1$. Tason T yhtälö on $2x - y + z = 3$ eli $2x - y + z - 3 = 0$.

Pallon keskipisteen $(5, 0, 5)$ etäisyys tasosta $2x - y + z - 3 = 0$ on

$$\frac{|2\cdot 5 - 1\cdot 0 + 1\cdot 5 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|12|}{\sqrt{6}} = 4{,}89... > 4.$$

Koska tason etäisyys pallon keskipisteestä on suurempi kuin säde, ei pallolla ja tasolla ole yhteisiä pisteitä.

Lähin piste on pallon keskipisteen kautta kulkevan tason normaalin ja tason leikkauspiste. Pisteen $(5, 0, 5)$ kautta kulkevan tason normaalin suuntavektori on $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, joten normaalin yhtälö on $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -t \\ z = 5 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Suoran ja tason leikkauspisteitä vastaava parametrin t arvo on yhtälön $2(5 + 2t) - (-t) + (5 + t) - 3 = 0$ ratkaisu $t = -2$. Tätä parametrin arvoa vastaa suoran piste $(1, 2, 3)$, joka on siis palloa lähin tason piste.

486. Muodostetaan pohjatahkon kärkipisteet *A*, *B* ja *C* sisältävän tason yhtälö.

Tason suuntavektorit ovat

$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 2-0 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ja $\overline{AC} = \begin{bmatrix} -2-1 \\ 1-0 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, joiden ristitulovektoti

$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$ on tason eräs normaalivektori. Lasketaan kärjestä *B* lähtevän särmävektorin $\overline{BD} = \begin{bmatrix} 0-2 \\ 4-2 \\ 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ja normaalivektorin $\begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$ välinen kulma α.

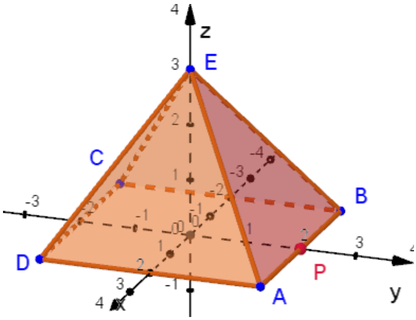
$$\cos\alpha = \frac{-2\cdot(-2)+2\cdot 8+4\cdot 7}{\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+8^2+7^2}}$$

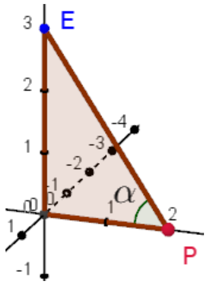
$$\cos\alpha = \frac{48}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{117}}$$

$$\alpha = 25,06...^\circ \approx 25,1^\circ$$

Särmän ja pohjatahkon välinen kulma on $90^\circ - 25,1^\circ = 64,9^\circ$.

487. **a)** Pyramidin pohjan huomataan olevan neliö, jonka keskipiste on origossa. Koska huippu *z*-akselilla, pyramidi on suora. Tällaisessa tilanteessa trigonometrian käyttäminen on helppoa. Merkitään janan *AB* keskipisteeksi *P*. Nyt kysytty kulma on suorakulmaisen kolmion *OPE* kulma *P*.





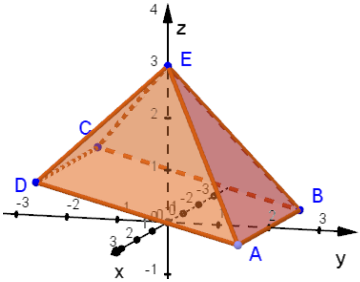
$$\tan\alpha = \frac{3}{2}$$

$$\alpha = 56,309...°$$

$$\alpha \approx 56,3°$$

Sivutahkon ja pohjan välinen kulma on 56,3°.

b) Nyt pyramidi ei ole suora, joten ei saada yhtä helposti muodostettua suorakulmaista kolmiota kuin a-kohdassa.



Käytetään vektoreita. Kysytty kulma on tasojen *ABCD* ja *ABE* välinen kulma.

Pisteiden *ABE* kautta kulkevan tason yhtälöksi saadaan symbolisen laskimen ohjelmalla $12y + 8z = 24$.

Pisteiden *ABC* kautta kulkevan tason yhtälöksi saadaan symbolisen laskimen ohjelmalla $4y + 16z = 8$.

Tasojen normaalivektorit ovat $\begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}$.

Lasketaan näiden välinen kulma α.

$$\cos\alpha = \frac{0\cdot 0 + 12\cdot 4 + 8\cdot 16}{\sqrt{0^2+12^2+8^2}\cdot\sqrt{0^2+4^2+16^2}}$$

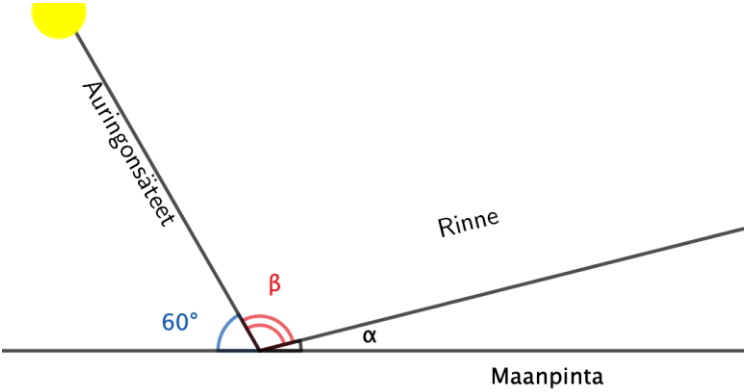
$$\cos\alpha = \frac{176}{16\sqrt{221}}$$

$$\alpha = 42{,}273...° \approx 42{,}3°$$

Sivutahkon ja pohjan välinen kulma on sama kuin tasojen normaalivektoreiden välinen kulma 42,3°.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

488. Olkoon α rinteen ja maanpinnan välinen kulma ja β ylärinteen ja auringonsäteiden välinen kulma oheisen kuvan mukaisesti.



Kuvion mukaan $60° + \beta + \alpha = 180°$, josta $\beta = 120° - \alpha$.

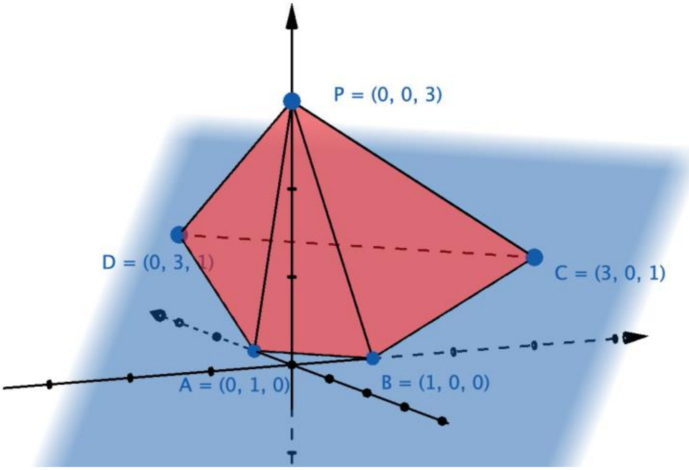
Ratkaistaan α eli tason $x - 2y + 8z - 8 = 0$ ja xy-tason välinen kulma.

Näiden tasojen normaalivektorit ovat $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$ ja $\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\cos(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 8 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 8^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}$$
$$\cos(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{8}{\sqrt{69}}$$
$$\measuredangle(\bar{u}, \bar{v}) = 15{,}616...°$$

Näin ollen $\beta = 120° - 15{,}616...° \approx 104°$.
Koska tason ja suoran välinen kulma on terävä, on kysytty kulma $180° - 104° = 76°$.

489.



Muodostetaan pisteet A, B ja C sisältävän tason yhtälö.

Tason suuntavektorit ovat

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ja } \overline{AC} = \begin{bmatrix} 3-0 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tason eräs normaalivektori on $\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Taso sisältää pisteen $A = (0, 1, 0)$, joten sen yhtälö on
$-1(x - 0) - 1(y - 1) + 2(z - 0) = 0$ eli $-x - y + 2z + 1 = 0$.

Pyramidin korkeus on pisteen (0, 0, 3) etäisyys pohjatahkon määräämästä tasosta $-x - y + 2z + 1 = 0$.

Korkeus on $\dfrac{|-1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 3 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{|7|}{\sqrt{6}} = \dfrac{7\sqrt{6}}{6}$.

Pyramidin pohja on nelikulmio $ABCD$, jonka pinta-ala saadaan kolmioiden ABC ja ACD pinta-alojen summana. Kolmioiden pinta-alat taas saadaan ristitulon avulla.

Kolmion *ABC* pinta-ala on $\frac{1}{2}|\overline{AB}´\ \overline{AC}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\overline{AD} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 3-1 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, joten $\overline{AC} \times \overline{AD} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$.

Kolmion *ACD* pinta-ala on $\frac{1}{2}|\overline{AB}´\ \overline{AC}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{3^2 + 3^2 + (-6)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Pyramidin tilavuus on siten
$\frac{1}{3} \times A \times h = \frac{1}{3} \times (\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}) \times \frac{7\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{4\sqrt{6}}{2} \times \frac{7\sqrt{6}}{6} = \frac{14}{3}$.

Ratkaisutapa 2:
Kysytty pyramidin tilavuus on pyramidien *ABCP* ja *ACDP* yhteenlaskettu tilavuus. Näiden tilavuudet saadaan skalaarikolmituloa hyödyntäen.

Lasketaan pyramidin *ABCP* tilavuus V_1.
$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overline{AC} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $\overline{AP} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$$V_1 = \frac{1}{6}\left|(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AP}\right| = \frac{7}{6}$$

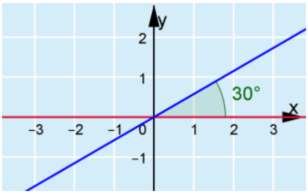
Lasketaan pyramidin *ACDP* tilavuus V_2.
$\overline{AC} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $\overline{AD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$V_2 = \frac{1}{6}\left|(\overline{AC} \times \overline{AD}) \cdot \overline{AP}\right| = \frac{7}{2}$$

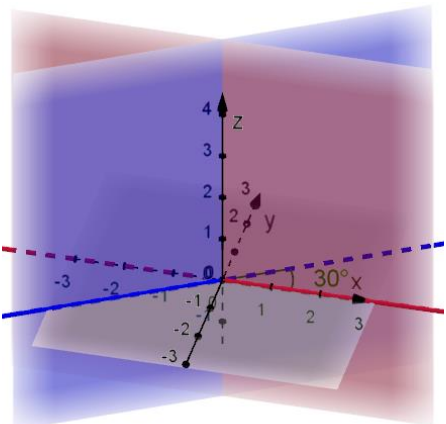
Näin pyramidin *ABCDP* tilavuus on $\frac{7}{6} + \frac{7}{2} = \frac{14}{3}$.

490. Koska $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(= \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, kulma 30° on suorakulmaisen kolmion kulma, jonka vastaisen kateetin pituus on 1 ja viereisen $\sqrt{3}$. Myös suoran kulmakerroin voi olla $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (vertaa kulmakertoimen apukolmioon).

xy-tasossa suoran $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ kulmakerroin on $\frac{1}{\sqrt{3}}$, joten suoran ja *x*-akselin välinen kulma on 30°. *x*-akselin yhtälö on $y = 0$



Suorista saadaan *xyz*-avaruuden tasot, kun lisätään *z*-koordinaatti, joka voi olla mikä tahansa luku. Näin ollen tasojen $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ ja $y = 0$ välinen kulma on 30°.



Huomautus: 30 asteen kulman voi muodostaa myös laatimalla esimerkiksi kolmion (0, 0), ($\sqrt{3}$, 0) ja ($\sqrt{3}$, 1). Kolmion kateetti on suora $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.