12 TODENNÄKÖISYYSJAKAUMIA

ALOITA PERUSTEISTA

493A. a) Vaatekoon mahdollisia havaintoarvoja ovat esimerkiksi S, M, L tai 36, 42, 52. Tällaiset muuttujan arvot ovat diskreettejä.

Vastaus: diskreetti

b) Lämpötila-asteikko kylmä, viileä, lämmin, kuuma on diskreetti.

Vastaus: diskreetti

c) pH-asteikko on jatkuva, koska pH voi saada minkä tahansa arvon tietyltä väliltä.

Vastaus: jatkuva

d) Rasvapitoisuus, kun yksikkönä on grammaa per litra, on jatkuva, koska mittaustulos voi saada minkä tahansa arvon tietyltä väliltä.

Vastaus: jatkuva

e) Kyselyn vastaukset asteikolla 1,2,3,4,5 on diskreetti.

Vastaus: diskreetti

f) Kissan punnitustulos vaa'alla voi saada minkä tahansa arvon tietyltä väliltä, joten se on jatkuva.

Vastaus: jatkuva

494A. Heitetty tulitikkuaski jää raapaisupinta alaspäin todennäköisyydellä $p = 0{,}3$. Kun heitetään askia $n = 10$ kertaa ja halutaan laskea todennäköisyys sille, että aski jää $k = 5$ kertaa ylöspäin, on kysytty todennäköisyys $\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^5\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{10-5}=\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^5\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^5$

Tilanne A ja todennäköisyys I kuuluvat siis yhteen.

Jos laatikossa on 30 valkoista ja 70 mustaa palloa, pallojen kokonaismäärä on 30 + 70 = 100. Todennäköisyys sille, että satunnainen laatikosta otettu pallo on musta, on $p=\frac{7}{10}.$ Todennäköisyys sille, että kymmenestä nostetusta pallosta kaikki ovat mustia, on

$$\binom{10}{10}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^0\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{10-0}=\binom{10}{10}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^0\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{10},$$

kun nostettu pallo palautetaan laatikkoon ennen seuraavan pallon nostamista. Tilanne B ja todennäköisyys III kuuluvat siis yhteen.

Kolme kymmenestä arvasta on voittoarpoja, joten todennäköisyys sille, että arpa on voittoarpa, on $p=\frac{3}{10}.$ Todennäköisyys sille, että kymmenen arvan joukossa on täsmälleen kolme voittoarpaa, on

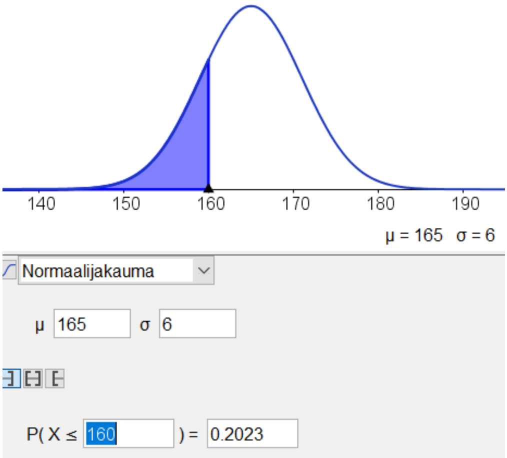
$$\binom{10}{3}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^7$$

Tilanne C ja todennäköisyys II kuuluvat siis yhteen.

Vastaus: A: I, B: III, C: II

495B. Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa N(165, 6).

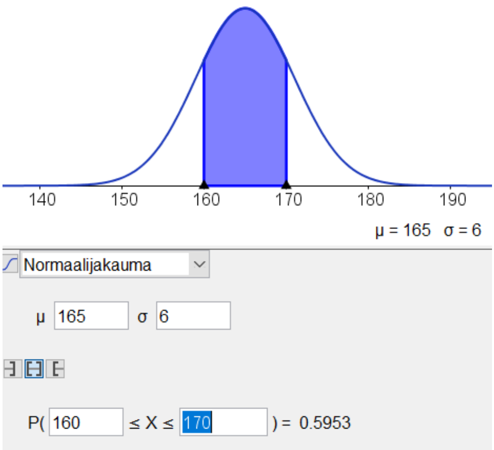
a) Määritetään kysytty todennäköisyys ohjelmalla.



$P(X < 160) = 0{,}2023 \approx 0{,}20$

Vastaus: 0,20

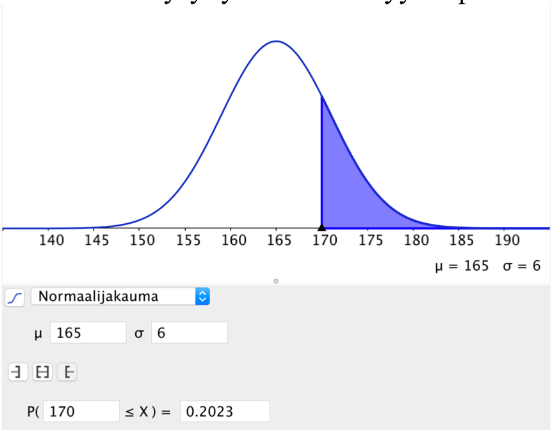
b) Määritetään kysytty todennäköisyys sopivalla ohjelmalla.



$P(160 < X < 170) = 0{,}5953 \approx 0{,}60$

Vastaus: 0,60

c) Määritetään kysytty todennäköisyys sopivalla ohjelmalla.



$\mathrm{P}(X > 170) = 0{,}2023 \approx 0{,}20$

Vastaus: 0,20

496B. a) Lasketaan kertolaskusäännöllä todennäköisyys, että seuraavat viisi joulua ovat valkeita.
$P(\text{seuraavat viisi joulua ovat valkeita}) = 0{,}67^5 = 0{,}135\ldots \approx 0{,}14.$

Vastaus: 0,14

b) Kyseessä on toistokoe, joten käytetään binomijakaumaa,

$$P(\text{tapahtuma } A \text{ tapahtuu täsmälleen } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

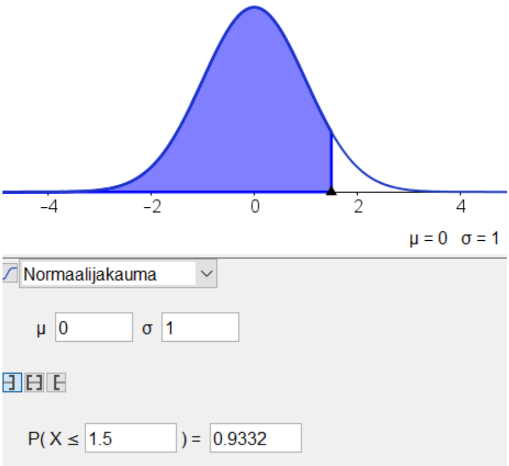
Toistojen lukumäärä on $n = 5$, $k = 3$ ja todennäköisyys $p = 0{,}67$.

$$\begin{aligned} P(\text{viidestä joulusta kolme on valkeita}) &= \binom{5}{3} \cdot (0{,}67)^3 \cdot (1-0{,}67)^{5-3} \\ &= \binom{5}{3} \cdot (0{,}67)^3 \cdot (0{,}33)^2 \\ &= 0{,}327\ldots \\ &\approx 0{,}33 \end{aligned}$$

Vastaus: 0,33

497B. Satunnaismuuttuja Z noudattaa normitettua normaalijakaumaan. Normitetussa normaalijakaumassa keskiarvo on 0 ja keskihajonta 1.

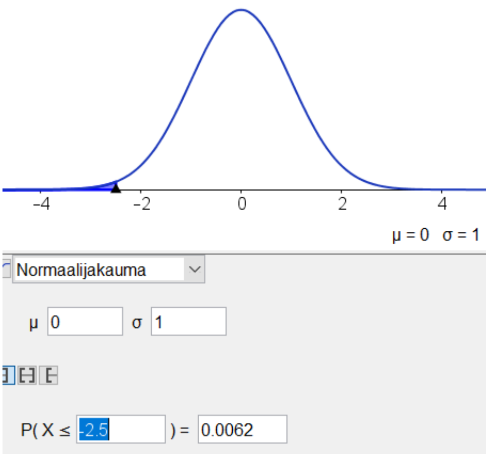
a) Määritetään kysytty todennäköisyys sopivalla ohjelmalla.



$P(Z < 1{,}5) = 0{,}933\ldots \approx 0{,}93$

Vastaus: 0,93

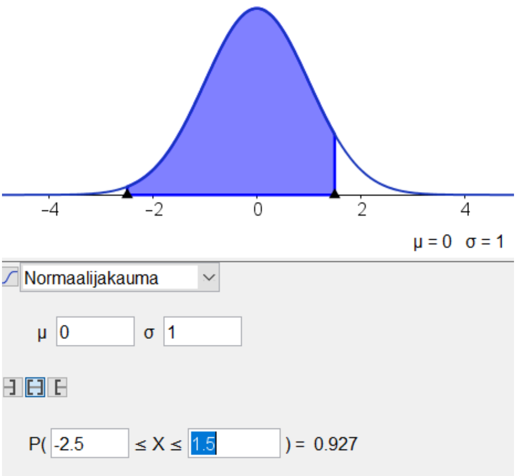
b) Määritetään kysytty todennäköisyys sopivalla ohjelmalla.



$P(Z < -2{,}5) = 0{,}0062 \approx 0{,}006$

Vastaus: 0,006

c) Määritetään kysytty todennäköisyys sopivalla ohjelmalla.



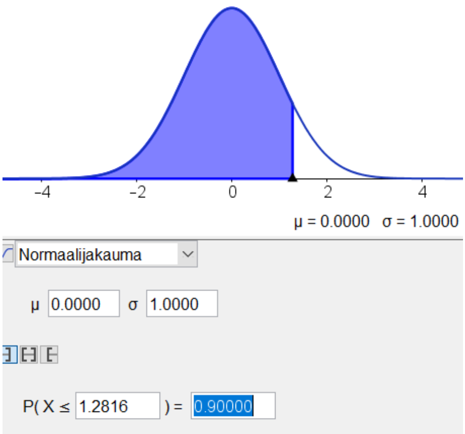
$P(-2{,}5 < Z < 1{,}5) = 0{,}927\ldots \approx 0{,}93$

Vastaus: 0,93

498B. Satunnaismuuttuja noudattaa normitettua normaalijakaumaa $Z \sim N(0, 1)$.

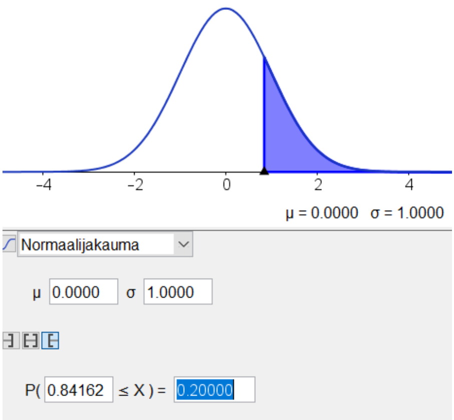
a) $P(Z < z) = 0{,}90$. Etsitään rajaa, jonka alapuolella on 90 % jakaumana pinta-alasta.

Sopivalla ohjelmalla saadaan tällaiseksi rajaksi $1{,}2816 \approx 1{,}28$.



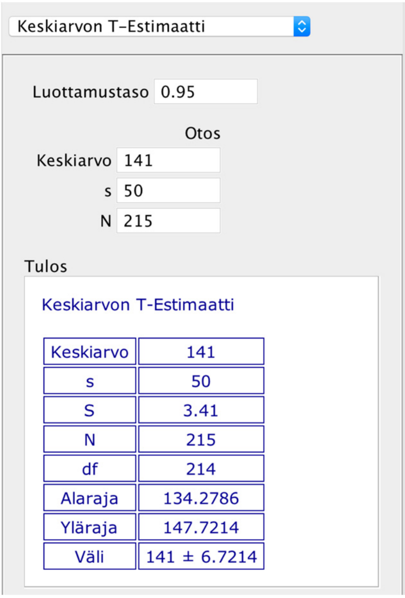
Vastaus: $z = 1{,}28$

b) $P(Z > z) = 0{,}20$. Etsitään rajaa, jonka yläpuolella on 20 % jakaumana pinta-alasta.
Sopivalla ohjelmalla saadaan tällaiseksi rajaksi $0{,}8416 \approx 0{,}84$.



Vastaus: $z = 0{,}84$

499B. **a)** Otoksesta saatu massojen keskiarvo on 141 marjaa neliömetrillä ja keskihajonta 50 marjaa. Otoksen koko on $n = 215$. Määritetään ohjelmalla marjojen määrän keskiarvon 95 %:n luottamusväli. Koska otoskoko on suuri, voidaan käyttää joko normaalijakaumaa tai *t*-jakaumaa. Käytetään tässä *t*-jakaumaa.



Keskiarvon 95 %: luottamusväli on [134,278…; 147,721…].

Pyöristys pitää luottamusvälissä tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on yhden marjan tarkkuudella
[134 marjaa; 148 marjaa].

Vastaus: [134 marjaa, 148 marjaa]

b) Virhemarginaali on luottamusvälin pituus jaettuna kahdella. Luottamusvälin pituus on $148 - 134 = 14$, joten virhemarginaali on $\frac{14}{2} = 7$ marjaa neliömetrillä.

Vastaus: 7 marjaa neliömetrillä

500B. Kyseessä on toistokoe, joten käytetään binomijakaumaa,
$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$.

a) Toistojen lukumäärä on n = 4, k = 2 ja todennäköisyys $p=\frac{1}{2}$.

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}=\frac{6}{16}=0{,}375$$

Vastaus: 0,375

b) Toistojen lukumäärä on n = 20, k = 10 ja todennäköisyys $p=\frac{1}{2}$.

$$P(X=10)=\binom{20}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{20-10}=0{,}1761\ldots\approx 0{,}176$$

Vastaus: 0,176

501B. Kyseessä on toistokoe, joten käytetään binomijakaumaa,
$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$.

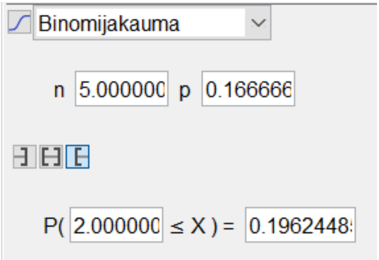
a) Toistojen lukumäärä on n = 5, k = 2 ja todennäköisyys $p=\frac{1}{6}$.

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{5-2}=\frac{625}{3888}=0{,}1607\ldots\approx 0{,}161$$

Vastaus: 0,161

b) Toistojen lukumäärä on $n = 20$, $k = 2,3,4$ tai 5 ja todennäköisyys $p = \frac{1}{2}$.

Ohjelma antaa todennäköisyydeksi $P(X \geq 2) = 0{,}1962... \approx 0{,}196$.



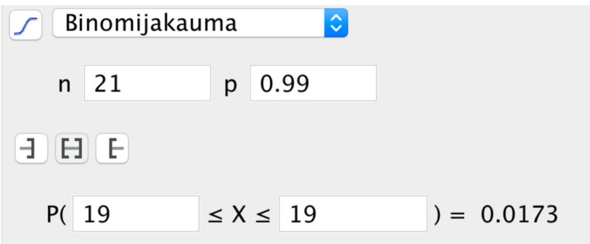
Vastaus: 0,196

502B. Kyseessä on toistokoe, joten käytetään binomijakaumaa, jossa toistojen lukumäärä on $n = 21$. Koska levyerässä on kaksi virheellistä, siinä on 21 – 2 = 19 virheetöntä, joten $k = 19$ ja todennäköisyys $p = 0{,}99$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

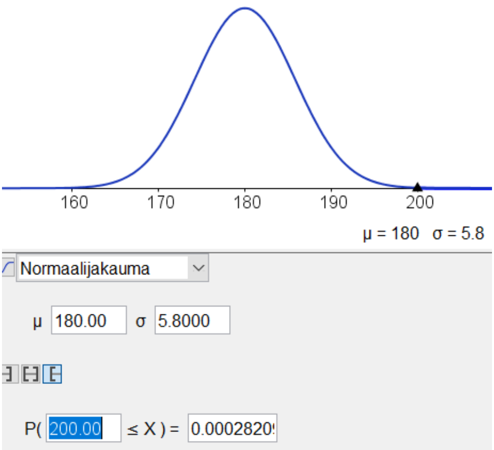
$$P(X = 19) = \binom{21}{19} \cdot 0{,}99^{19} \cdot (1 - 0{,}99)^{21-19} = 0{,}0173... \approx 0{,}017$$

Todennäköisyys voidaan myös määrittää ohjelmalla.



Vastaus: 0,017

503B. Pituus X noudattaa normaalijakaumaa N(180,0; 5,8). Määritetään kysytty todennäköisyys $P(X > 200)$ sopivalla ohjelmalla.



30-vuotiaista miehistä 0,000282… ≈ 0,00028 = 0,028 % on yli kaksi metriä pitkiä.

Vastaus: 0,028 %

504B. Määritetään ohjelmalla puolueen A kannattajien 95 %:n luottamusväli, kun kannattajien osuus otoksesta on 96 ja otoskoko 500.

Suhteen Z–estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 96

N 500

Tulos

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	96
N	500
S	0.0176145394
Alaraja	0.1574761371
Yläraja	0.2265238629
Väli	0.192 ± 0.0345238629

Puolueen A kannattajien osuus on [15,7 %; 22,7 %].

Määritetään ohjelmalla puolueen B kannattajien 95 %:n luottamusväli, kun kannattajien osuus otoksesta on 49 ja otoskoko 500.

Suhteen Z–estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 49

N 500

Tulos

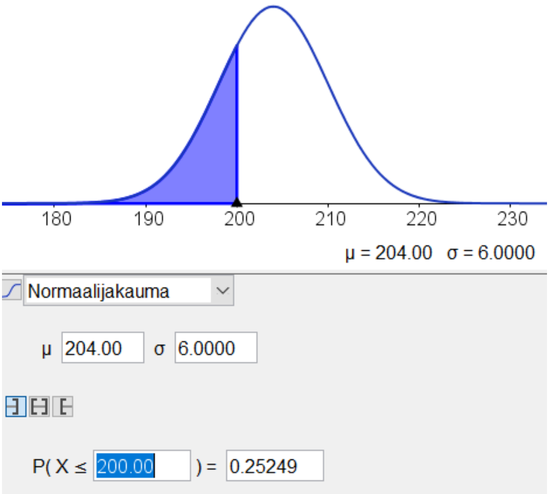
Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	49
N	500
S	0.0132963153
Alaraja	0.0719397009
Yläraja	0.1240602991
Väli	0.098 ± 0.0260602991

Puolueen B kannattajien osuus on [7,1 %; 12,5 %].

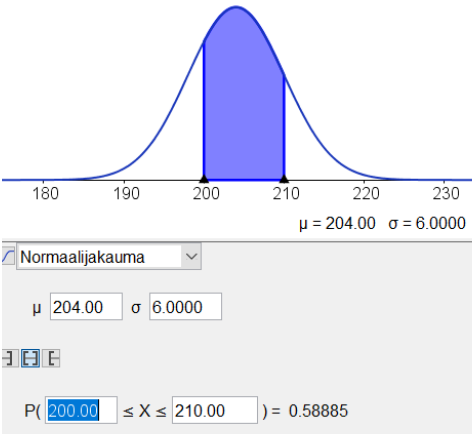
Vastaus: puolue A [15,7 %; 22,7 %], puolue B [7,1 %; 12,5 %]

505B. Massa X noudattaa normaalijakaumaa N(204; 6). Määritetään kysytty todennäköisyys $P(X < 200)$ sopivalla ohjelmalla.



Pakkausten massoista 0,2524… ≈ 0,252 = 25,2 % oli alle 200 g.

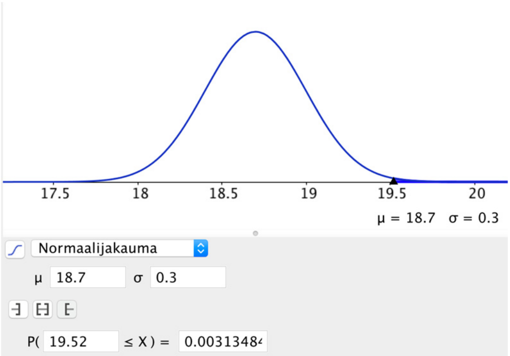
Määritetään kysytty todennäköisyys $P(200 < X < 210)$ sopivalla ohjelmalla.



Pakkausten massoista 0,5888… ≈ 0,589 = 58,9 % oli välillä 200 g–210 g.

Vastaus: 25,2 prosentilla, 58,9 prosentilla

506B. Olkoon satunnaismuuttuja X kuulantyöntäjän tulos. Tällöin $X \sim \mathrm{N}(18{,}70;\ 0{,}30)$. Määritetään ohjelmalla todennäköisyys sille, että aiempien kilpailutulosten perusteella kuulantyöntäjän tulos on vähintään yhtä hyvä kuin maailmanmestaruuskilpailuissa eli $P(X \geq 19{,}52)$.



Kuulantyöntäjän tulos on aiempien kilpailutulosten perusteella vähintään yhtä hyvä kuin maailmanmestaruuskilpailussa saavutettu tulos todennäköisyydellä $0{,}00313\ldots \approx 0{,}003$.

Vastaus: 0,003

507B. **a)** Yhdessä nostossa tapahtuman A = ”kortti on hertta” todennäköisyys on $\frac{1}{4}$. Satunnaismuuttuja X = ”nostettujen herttojen lukumäärä” noudattaa binomijakaumaa, jossa toistojen lukumäärä on $n = 4$ ja todennäköisyys $p=\frac{1}{4}$.

Lasketaan satunnaismuuttujan X arvoja $k = 0, 1, 2, 3$ ja 4 vastaavat todennäköisyydet.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-0}=\frac{81}{256}=0,3164\approx 0,316$$

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-1}=\frac{27}{64}=0,4218..\approx 0,422$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-2}=\frac{27}{128}=0,2109...\approx 0,211$$

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-3}=\frac{3}{64}=0,04687...\approx 0,0469$$

$$P(X=4)=\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-4}=\frac{1}{256}=0,003906...\approx 0,00391$$

Vastaus:

X	0	1	2	3	4
Todennäköisyys	0,316	0,422	0,211	0,0469	0,00391

b) Lasketaan odotusarvo sijoittamalla odotusarvon lausekkeeseen $n = 4$ ja $p=\frac{1}{4}$.

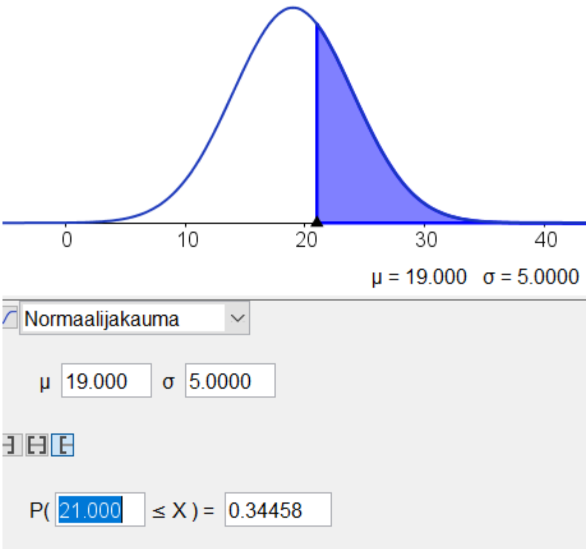
$$\mu=np=4\cdot\frac{1}{4}=1$$

Lasketaan keskihajonta sijoittamalla keskihajonnan lausekkeeseen $n=4$ ja $p=\frac{1}{4}$.

$$s=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)}=0,8660...\approx 0,866$$

Vastaus: $\mu = 1$ ja $s = 0,866$

508B. **a)** Talitiaisen massa noudattaa normaalijakaumaa N(19; 5). Lasketaan todennäköisyys, että tiaisen massa on vähintään 21 g. Sopivalla ohjelmalla todennäköisyydeksi saadaan
0,3445… = 34,45… % ≈ 34 %.



Satunnaisesti valitun tiaisen massa on vähintään 21 g 34 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 34 %

b) Lasketaan 40 tiaisen otoksen keskiarvon keskivirhe.
Otoskoko on $n = 40$ ja keskihajonta $s = 5$, joten keskiarvon keskivirhe on

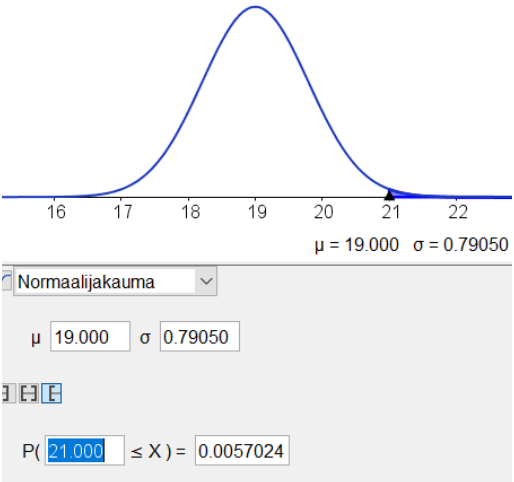
$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{40}} = 0{,}790...$$

Keskiarvon keskivirhe on 0,790… g ≈ 0,79 g.

Vastaus: 0,79 g

c) Otoksen keskiarvo noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvona on perusjoukon keskiarvo 19 g ja keskihajontana keskiarvon keskivirhe 0,790… g.

Lasketaan todennäköisyys, että 40 tiaisen otoksen keskimassa on vähintään 21 g. Sopivalla ohjelmalla todennäköisyydeksi saadaan 0,00570… = 0,570… % ≈ 0,57 %.



Satunnaisesti valitun 40 tiaisen massojen keskiarvo on vähintään 21 g 0,57 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 0,57 %

VAHVISTA OSAAMISTA

509B. Lasketaan Alinan ja Bertan tulosten normitetut arvot.
Lukiossa A keskiarvo oli 72 pistettä ja keskihajonta 9,2 pistettä.

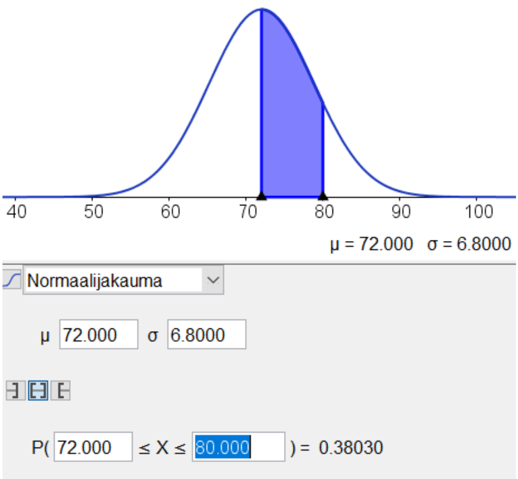
Alinan tuloksen normitettu arvo lukiossa A on $\dfrac{82-72}{9,2}=1,0869....$

Lukiossa B keskiarvo oli 72 pistettä ja keskihajonta 6,8 pistettä.

Bertan tuloksen normitettu arvo lukiossa B on $\dfrac{80-72}{6,8}=1,176....$

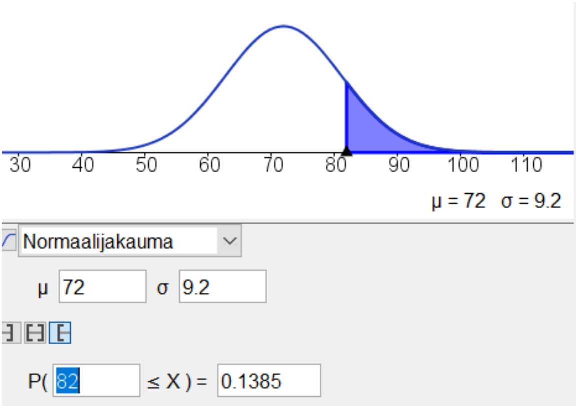
Koska Bertan normitettu arvo 1,176… on suurempi kuin Alinan 1,0869…, Bertta menestyi paremmin oman lukionsa tasoon verrattuna.

Niiden osuus lukion B opiskelijoista, jotka menestyivät kokeessa keskiarvoa paremmin mutta huonommin kuin Bertta, saadaan määrittämällä sopivalla ohjelmalla normaalijakauman avulla todennäköisyys $P(72 \le X \le 80) = 0,380\ldots \approx 0,38 = 38\ \%$



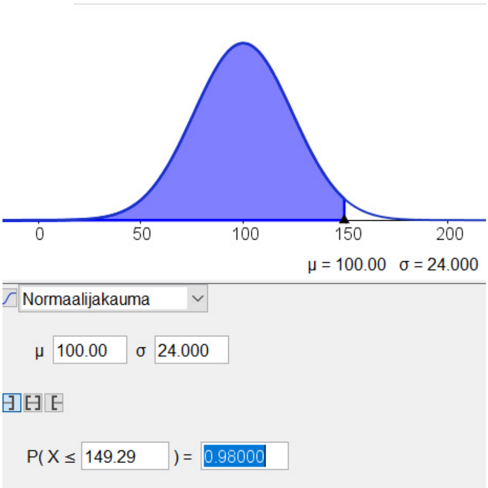
Niiden osuus lukion A opiskelijoista, jotka menestyivät kokeessa paremmin kuin Alina, saadaan määrittämällä sopivalla ohjelmalla normaalijakauman avulla todennäköisyys

$P(X > 82) = 0{,}138\ldots \approx 0{,}14 = 14\ \%$



Vastaus: Bertta, 38 %, 14 %

510B. Etsitään normaalijakaumalta N(100, 24) raja, jonka alapuolella on 98 % jakauman pinta-alasta.

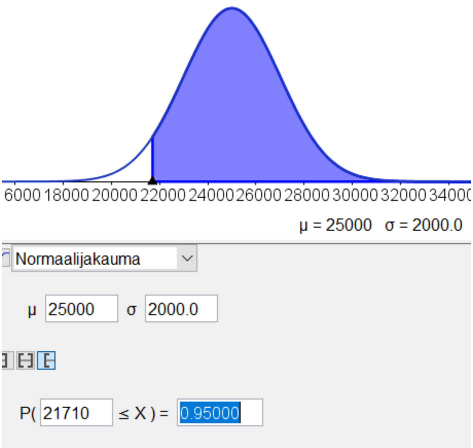


Ohjelmalla saadaan tällaiseksi rajaksi 149,29…. Koska 149 ei riitä, pyöristetään älykkyysosamäärän arvoksi 150.

Vastaus: vähintään 150

511B. Mitä enemmän tulee ajokilometrejä, sitä pienemmäksi todennäköisyys muuttuu, että sytytystulppa kestää. Etsitään normaalijakaumalta N(25 000 km, 2000 km) raja, jonka yläpuolella on 95 % jakauman pinta-alasta.

Sopivalla ohjelmalla saadaan tällaiseksi rajaksi 21 710 km ≈ 21 700 km. Joten 21 700 kilometrin jälkeen tulpan toimintavarmuus laskee alle 95 prosentin.



Vastaus: 21 700 km:n jälkeen

512B. Sopivalla ohjelmalla saadaan kurssin A keskiarvoksi 7,147… ja keskihajonnaksi 1,893….

n	34
Keskiarvo	7.1471
σ	1.865
s	1.8931
Σx	243
Σx²	1855
Min	4
Q1	6
Mediaani	7
Q3	8
Max	10

Kurssin A arvosana 6 on normitettuna $\frac{6-7,147...}{1,893...}=-0,605...$

Ohjelmalla saadaan kurssin B keskiarvoksi 8,684… ja keskihajonnaksi 1,335….

n	19
Keskiarvo	8.6842
σ	1.2999
s	1.3355
Σx	165
Σx²	1465
Min	6
Q1	8
Mediaani	9
Q3	10
Max	10

Kurssin B arvosana 7 on normitettuna $\frac{7-8,684...}{1,335...}=-1,261...$

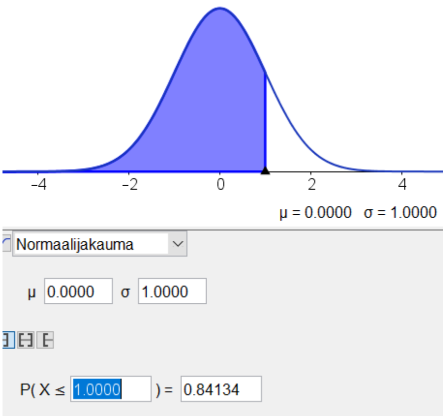
Koska kurssin A normitettu arvo pienemmän etäisyyden päässä keskiarvosta sen alapuolella, opiskelija menestyi kurssilla A paremmin suhteessa kurssitovereihinsa.

Vastaus: kurssissa A

513B. Kohdan A aika 2 h 15 min = 135 min on normitettuna $\frac{135-125}{10}=1.$

Todennäköisyys P(korkeintaan 2 tuntia 15 minuuttia) = $P(Z \leq 1)$, joten A ja IV kuuluvat yhteen.

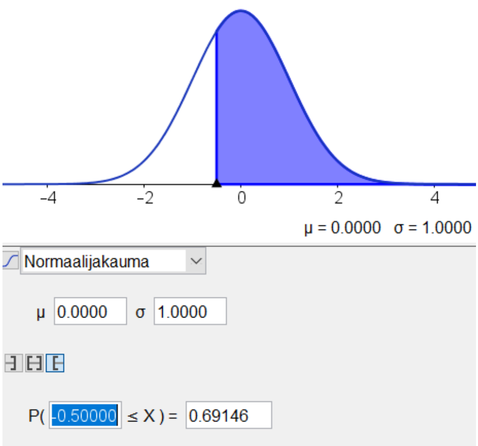
Ohjelmalla saadaan $P(Z \leq 1) = 0{,}841\ldots \approx 0{,}84$.



Kohdan B aika 2 h = 120 min on normitettuna $\frac{120-125}{10}=-0{,}5.$

Todennäköisyys P(vähintään kaksi tuntia) = $P(Z \geq -0{,}5)$, joten B ja II kuuluvat yhteen.

Ohjelmalla saadaan $P(Z \geq -0{,}5) = 0{,}691\ldots \approx 0{,}69$.

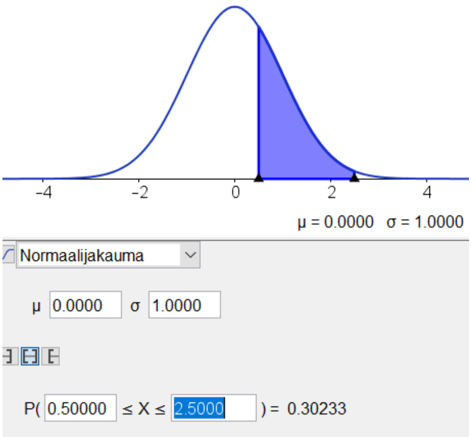


Kohdan C aika 2 h 10 min = 130 min on normitettuna $\frac{130-125}{10}=0,5.$

Aika 2 h 30 min = 150 min on normitettuna $\frac{150-125}{10}=2,5.$

Todennäköisyys P(2 h 10 min − 2 h 30 min) = $P(0,5 \leq Z \leq 2,5)$, joten C ja I kuuluvat yhteen.

Ohjelmalla saadaan $P(0,5 \leq Z \leq 2,5) = 0,302\ldots \approx 0,30$.

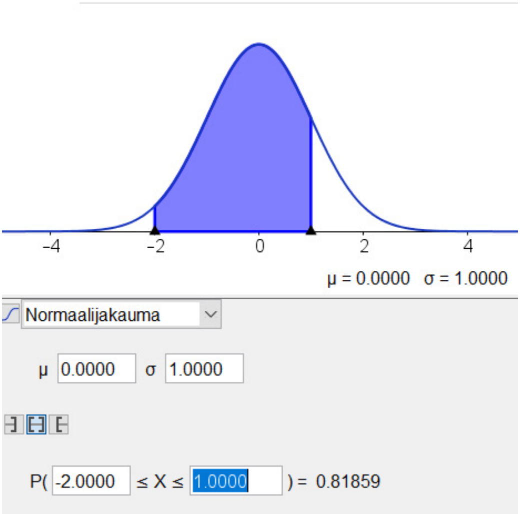


Kohdan D aika 1 h 45 min = 105 min on normitettuna $\frac{105-125}{10}=-2.$

Aika 2 h 15 min = 135 min on normitettuna $\frac{135-125}{10}=1.$

Todennäköisyys P(1 h 45 min − 2 h 15 min) = $P(-2 \leq Z \leq 1)$, joten D ja III kuuluvat yhteen.

Ohjelmalla saadaan $P(-2 \leq Z \leq 1) = 0,818\ldots \approx 0,82$.



Vastaus: A: IV ja 0,84, B: II ja 0,69, C: I ja 0,30, D: III ja 0,82

514B. Merkitään tapahtuma A = ainakin yhdellä heitolla tulee ykkönen, tällöin A:n vastatapahtuma on $\overline{A}$ = yhdelläkään heitolla ei tule ykköstä.

Yhdessä heitossa ykkösen todennäköisyys on $\frac{1}{6}$ ja todennäköisyys, että ei tule ykköstä on $\frac{5}{6}$.

$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0{,}161...,$ joten $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0{,}838...$

Olkoon satunnaismuuttuja X pelissä yhdessä kierroksella saatu voitto. Muodostetaan satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma.

Saatu voitto (mk)	Todennäköisyys
−2000	0,838…
10 000	0,161…

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

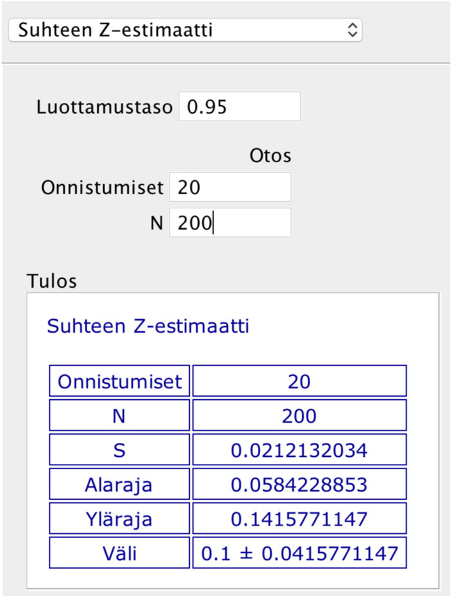
$\mu = 0{,}838\ldots \cdot (-2000 \text{ mk}) + 0{,}161 \cdot 10\,000 \text{ mk}$

$= -61{,}933 \text{ mk}$

$\approx -61{,}93 \text{ mk}.$

Vastaus: –61,93 markkaa

515B. Lasketaan ohjelmalla 95 %:n luottamusväli virheellisten tuotteiden suhteelliselle osuudelle, kun virheellisten tuotteiden määrä on 20 ja otoskoko on 200.



Onnistumiset	20
N	200
S	0.0212132034
Alaraja	0.0584228853
Yläraja	0.1415771147
Väli	0.1 ± 0.0415771147

Luottamusväli on [0,058422…; 0,141577…].

Lasketaan, kuinka monta virheellistä tuotetta on 10 000 kappaleen tuote-erässä 95 %:n todennäköisyydellä.

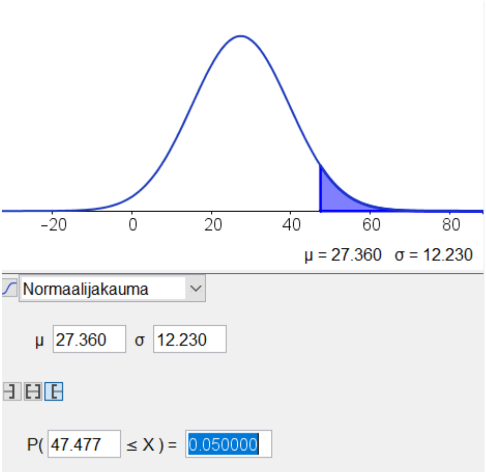
$[0{,}058422\ldots \cdot 10\,000;\ 0{,}141577\ldots \cdot 10\,000] = [584{,}22\ldots;\ 1415{,}77\ldots]$

Pyöristys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on [584, 1416].

Vastaus: [584, 1416]

516B. Olkoon satunnaismuuttuja X pistemäärä. Tällöin $X\sim$ N(27,36; 12,33).

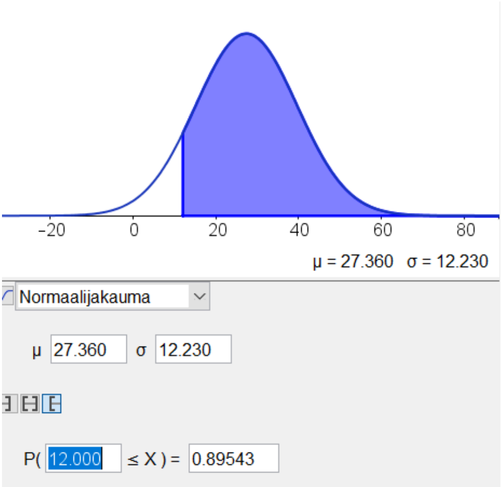
a) Etsitään ohjelmalla raja, jonka yläpuolella on 5 % jakauman pinta-alasta.



Ohjelmalla saadaan tällaiseksi rajaksi 47,477…. Koska rajan yläpuolella pitää olla enintään 5 %, pyöristetään laudaturin rajaksi 48 pistettä.

Vastaus: 48 pistettä

b) Lasketaan ohjelmalla, millä todennäköisyydellä muuttujan arvo on vähintään 12.



Ohjelmalla saadaan $P(X > 12) = 0{,}8954\ldots \approx 0{,}895 = 89{,}5\ \%$.

Vastaus: 89,5 %

517B. **a)** Määritetään luottamusväli Niinistön kannatukselle, kun suhteellinen osuus otoksessa on $p = 0{,}72$, otoskoko $n = 1363$ ja 95 %:n luottamusvälin kriittinen arvo on 1,96.

$$\left[p - \text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\, p + \text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

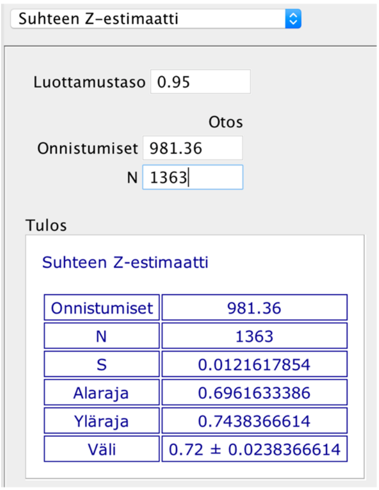
$$\left[0{,}72 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}72 \cdot (1-0{,}72)}{1363}};\, 0{,}72 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}72 \cdot (1-0{,}72)}{1363}}\right]$$

$$= [0{,}72 - 0{,}0238...;\ 0{,}72 + 0{,}0238...]$$

$$= [0{,}6961...;\ 0{,}7438...]$$

$$\approx [69{,}6\,\%;\ 74{,}4\,\%]$$

Luottamusvälin voi määrittää myös ohjelmalla.



Vastaus: [69,6 %; 74,4 %]

b) Määritetään luottamusväli Haaviston kannatukselle, kun suhteellinen osuus otoksessa on $p = 0{,}11$, otoskoko $n = 1363$ ja 95 %:n luottamusvälin kriittinen arvo on 1,96.

$$\left[p - \text{kriittinen arvo } \cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + \text{kriittinen arvo } \cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

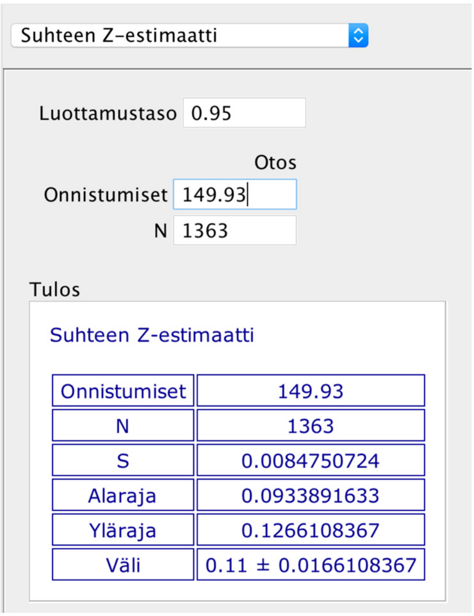
$$\left[0{,}11 - 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}11\cdot(1-0{,}11)}{1363}}; 0{,}72 + 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}11\cdot(1-0{,}11)}{1363}}\right]$$

$$= [0{,}11 - 0{,}01661...;\ 0{,}72 + 0{,}01661...]$$

$$= [0{,}0933...;\ 0{,}1266...]$$

$$\approx [9{,}3\%;\ 12{,}7\ \%]$$

Luottamusvälin voi määrittää myös ohjelmalla.



Vastaus: [9,3 %; 12,7 %]

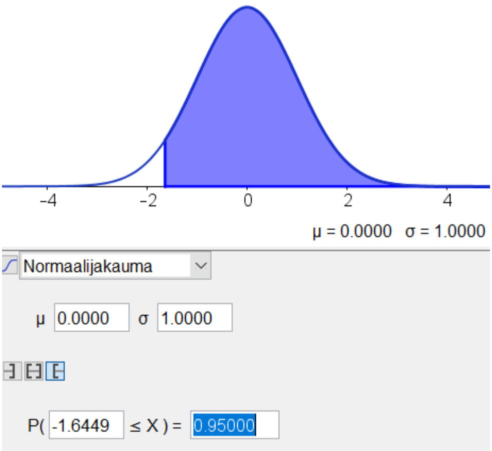
c) Tutkimuksessa on ilmoitettu virhemarginaaliksi $\pm 1{,}9$ prosenttiyksikköä, joten Niinistön kannatuksen alaraja olisi silloin 72 % – 1,9 % = 70,1 % ja yläraja 72 % + 1,9 % = 73,9 %.

Haaviston kannatuksen alaraja olisi 11 % − 1,9 % = 9,1 % ja yläraja 11 % + 1,9 % = 12,9 %.

Rajat ovat prosenttiyksikön tarkkuudella samat kuin a-kohdassa.

Vastaus: Ne ovat prosenttiyksikön tarkkuudella samat.

518B. Sopivalla ohjelmalla nähdään, että normitetussa normaalijakaumassa muuttujan arvon $z = -1{,}644\ldots$ yläpuolella on 95 % pinta-alasta.



Muodostetaan arvon $z = -1{,}644\ldots$, keskihajonnan $s = 8{,}0$ ja sokeripussin painon $x = 1000$ avulla yhtälö, josta ratkaistaan koneelle asetettava keskiarvo $\overline{x}$.

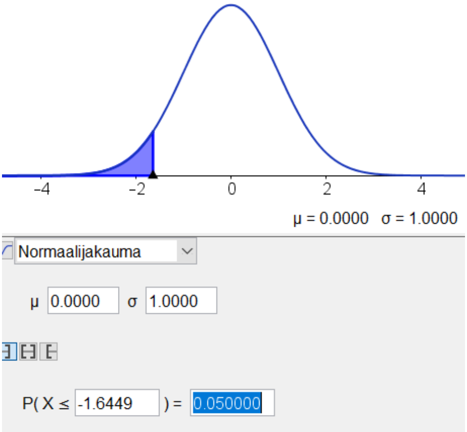
$$\frac{1000 - \overline{x}}{8{,}0} = -1{,}644\ldots.$$

Yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan $\overline{x} = 10013{,}159\ldots \approx 1013$.

Sokeripussin painoksi tulee asettaa koneeseen 1013 g.

Vastaus: 1013 g

519B. Sopivalla ohjelmalla nähdään, että normitetussa normaalijakaumassa muuttujan arvon $z = -1,644\ldots$ alapuolella on alle 5 % pinta-alasta.



Muodostetaan arvon $z = -1,644\ldots$, keskiarvon $\bar{x} = 80$ ja muuttujan arvon $x = 75$ avulla yhtälö, josta ratkaistaan keskihajonta s.

$$\frac{75-80}{s} = -1,644....$$

Yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan $s = 3,039\ldots \approx 3,04$.

Hajonta saa pintapainossa olla enintään 3,04 g/m^2.

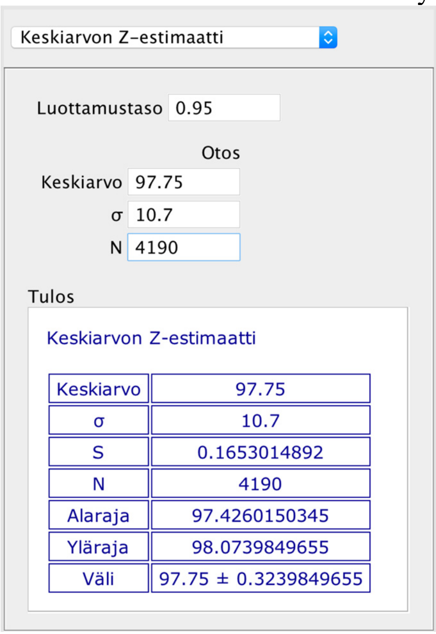
Vastaus: 3,04 g/m^2

520B. a) Lasketaan 95 %:n luottamusväli autojen nopeuksien keskiarvolle, kun nopeuksien keskiarvo oli $\bar{x} = 97,75$ km/h, keskihajonta s = 10,70 km/h ja otoksen koko n = 4190. 95 %:n luottamusvälin kriittinen arvo on 1,96.

$$\left[\bar{x} - \text{kriittinen arvo } \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \text{kriittinen arvo } \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[97,75 - 1,96 \cdot \frac{10,70}{\sqrt{4190}}; 97,75 + 1,96 \cdot \frac{10,70}{\sqrt{4190}}\right]$$
$$= [97,75 - 0,323...; 97,75 + 0,323...]$$
$$= [97,426...; 98,073...].$$

Pyöristys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on kahden desimaalin tarkkuudella [97,42 km/h; 98,08 km/h].

Luottamusväli voidaan määrittää myös ohjelmalla.


Keskiarvon Z-estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 97.75

σ 10.7

N 4190

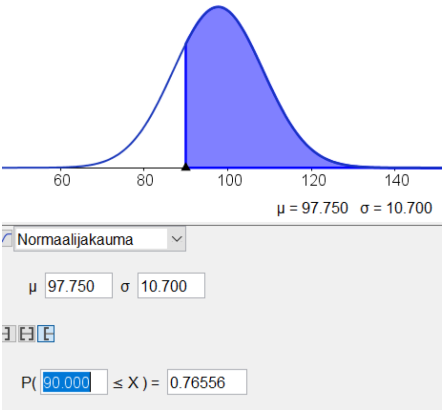
Tulos

Keskiarvon Z-estimaatti

Keskiarvo	97.75
σ	10.7
S	0.1653014892
N	4190
Alaraja	97.4260150345
Yläraja	98.0739849655
Väli	97.75 ± 0.3239849655

Vastaus: [97,42 km/h; 98,08 km/h]

b) Lasketaan sopivalla ohjelmalla kuinka monta prosenttia mittauskohdan ohittavista ajoneuvosta ylittää nopeuden 90 km/h. Todennäköisyys on $P(X \geq 90) = 0{,}765\ldots$, joten 1000 ajoneuvosta
$0{,}765\ldots \cdot 1000 = 765{,}56\ldots \approx 766$ ylittää nopeuden 90 km/h.



Vastaus: 766 ajoneuvoa

521B. Tapahtuma ”tekee ainakin yhden maalin” on tapahtuman ”ei tee yhtäkään maalia” vastatapahtuma. Todennäköisyys, että rangaistuspotku ei mene maaliin on $1 - 0{,}80 = 0{,}20$. Todennäköisyys, että n:ssä rangaistuspotkussa ei tule yhtään maalia, on $0{,}20^n$, joten
$P(\text{tekee ainakin yhden maalin}) = 1 - 0{,}20^n$. Koska todennäköisyys pitää olla yli 99 %, saadaan epäyhtälö $1 - 0{,}20^n > 0{,}99$.

Yhtälön ratkaisutoiminnolla saadaan ratkaisuksi $n > 2{,}861\ldots$

Joten hänen on suoritettava rangaistuspotku vähintään 3 kertaa.

Vastaus: vähintään 3 kertaa

522B. Sopivalla ohjelmalla saadaan havaintoarvojen keskiarvoksi 99 ja keskihajonnaksi 0,653…≈ 0,65.

n	10
Keskiarvo	99
σ	0.6197
s	0.6532
Σx	990
Σx²	98013.84
Min	98.4
Q1	98.5
Mediaani	98.75
Q3	99.2
Max	100.2

Koska otoskoko on pieni, määritetään luottamusväli *t*-jakaumalla.

Määritetään ohjelmalla 95 %:n luottamusväli ruuvien pituuksien keskiarvolle, kun pituuksien keskiarvo oli $\overline{x} = 99$, keskihajonta $s = 0{,}653\ldots$ ja otoksen koko $n = 10$.

Keskiarvon T-Estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 99

s 0.6532

N 10

Tulos

Keskiarvon T-Estimaatti

Keskiarvo	99
s	0.6532
S	0.2065599768
N	10
df	9
Alaraja	98.532728869
Yläraja	99.467271131
Väli	99 ± 0.467271131

95 %:n luottamusväli on [98,532…; 99,467…].

Koska ilmoitettu pituus 100,0 mm ei kuulu 95 %:n luottamusvälille, on syytä epäillä tehtaan ilmoitusta.

Vastaus: On syytä epäillä tehtaan ilmoituksen luotettavuutta.

523B. **a)** Sopivalla ohjelmalla saadaan havaintoarvojen keskiarvoksi 5,226…°C ≈ 5,2 °C ja keskihajonnaksi 0,983…°C ≈ 0,98 °C. Pienin arvo on 3,7 °C ja suurin 6,9 °C.

n	83
Keskiarvo	5.2265
σ	0.9777
s	0.9837
Σx	433.8
Σx²	2346.6
Min	3.7
Q1	4.3
Mediaani	5.2
Q3	6
Max	6.9

Vastaus: $\overline{x} = 5,2$ °C, $s = 0,98$ °C, pienin 3,7 °C, suurin 6,9 °C

b) Määritetään ohjelmalla 95 %:n luottamusväli käyttämällä *t*-jakaumaa, kun otoksen keskiarvo oli $\overline{x} = 5,226...$, keskihajonta $s = 0,983...$ ja otoksen koko $n = 83$.

Keskiarvon T–Estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo	5.2265
s	0.9837
N	83

Tulos

Keskiarvon T-Estimaatti

Keskiarvo	5.2265
s	0.9837
S	0.1079751026
N	83
df	82
Alaraja	5.0117031248
Yläraja	5.4412968752
Väli	5.2265 ± 0.2147968752

95 %:n luottamusväli on [5,011…; 5,441…]

Huomataan, että havaintoaineiston pienin arvo 3,7 astetta ja suurin arvo 6,9 astetta eivät kuulu luottamusvälille, joten kaikki havaintoarvot eivät kuulu 95 %:n luottamusvälille.

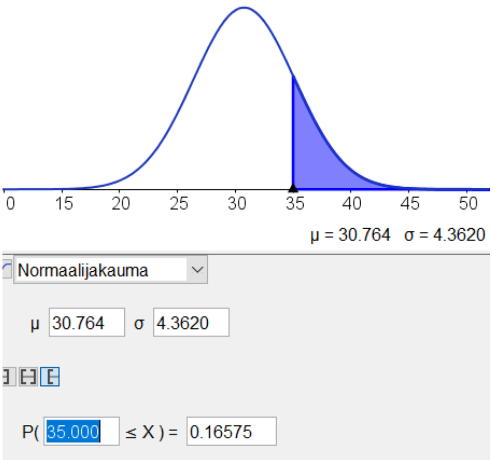
Vastaus: eivät kuulu

524B. **a)** Määritetään ohjelman avulla otoksen keskiarvo ja keskihajonta.

n	34
Keskiarvo	30.7647
σ	4.2981
s	4.3628
Σx	1046
Σx²	32808
Min	19
Q1	29
Mediaani	32
Q3	34
Max	37

Otoksen keskiarvoksi saadaan $\overline{x} = 30,764...$ vuotta ja keskihajonnaksi s = 4,362… vuotta.

Otoksen perusteella ensimmäistä kertaa isäksi tulemisen ikä noudattaa normaalijakaumaa N(30,764…; 4,362…). Lasketaan todennäköisyys, että ikä on yli 35 vuotta.



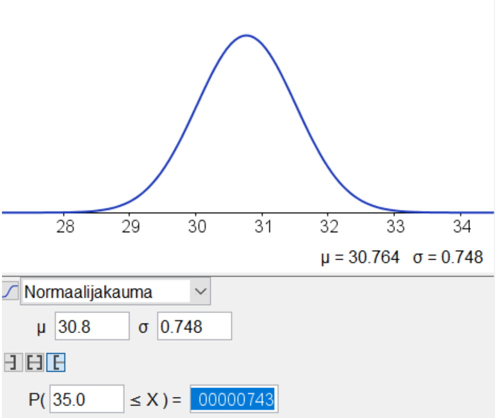
Ohjelmalla todennäköisyydeksi saadaan 0,165… = 16,5… % ≈ 17 %.

Todennäköisyys, että satunnainen suomalaisisä on tullut ensimmäistä kertaa isäksi yli 35 vuotiaana, on 17 %.

Vastaus: 17 %

b) Otoksen keskiarvo noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvona on perusjoukon keskiarvo 30,764… ja keskihajontana keskiarvon keskivirhe $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4,362...}{\sqrt{34}} = 0,748...$.

Lasketaan ohjelmalla todennäköisyys, että 20 isän otoksen ensimmäistä kertaa isäksituloikien keskiarvo on yli 35 vuotta.

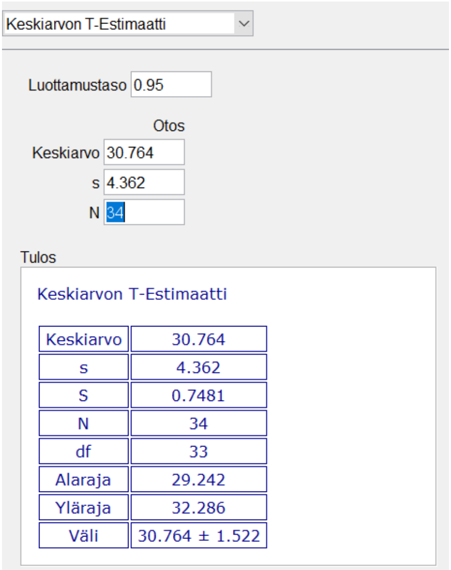


Sopivalla ohjelmalla todennäköisyydeksi saadaan 0,00000000743 ≈ 0,000000007.

Satunnaisesti valitun 20 isän ensimmäistä kertaa isäksituloikien keskiarvo on yli 35 vuotta todennäköisyydellä 0,000000007.

Vastaus: 0,000000007

c) Määritetään ohjelmalla 95 %:n luottamusväli käyttämällä *t*-jakaumaa, kun otoksen keskiarvo on $\overline{x} = 30{,}764...$ vuotta, keskihajonta $s = 4{,}362\ldots$ vuotta ja otoskoko $n = 34$.



95 %:n luottamusväli on [29,242… vuotta; 32,286… vuotta].

Pyöristys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on [29 vuotta; 33 vuotta].

Vastaus: [29 vuotta; 33 vuotta]

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

525B. Tapahtuma ”ainakin kaksi itää” on tapahtuman ”yksi tai ei yhtään idä” vastatapahtuma. Todennäköisyys, että sipuli ei idä on 1 – 0,7 = 0,3. Todennäköisyys, että *n*:stä sipulista ei yksikään idä, on $0{,}30^n$. Todennäköisyys, että *n*:stä sipulista täsmälleen yksi itää, on

$$P(X=1)=\binom{n}{1}\cdot 0{,}7^1\cdot(1-0{,}3)^{n-1}=n\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3^{n-1},\text{ joten}$$

$$P(\text{ainakin kaksi itää})=1-\left[0{,}3^n+n\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3^{n-1}\right].$$

Taulukoidaan todennäköisyyksiä *n*:n eri arvoilla:

	A	B	C
1	n	P(ainakin kaksi itää)	
2	2	0,49	
3	3	0,784	
4	4	0,9163	
5	5	0,96922	
6	6	0,989065	
7	7	0,9962092	

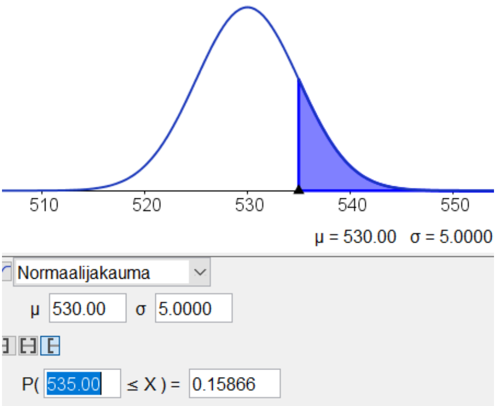
Taulukosta huomataan, että on istutettava 7 sipulia, jotta niistä ainakin kaksi itäisi yli 99 % todennäköisyydellä.

Vastaus: vähintään 7 sipulia

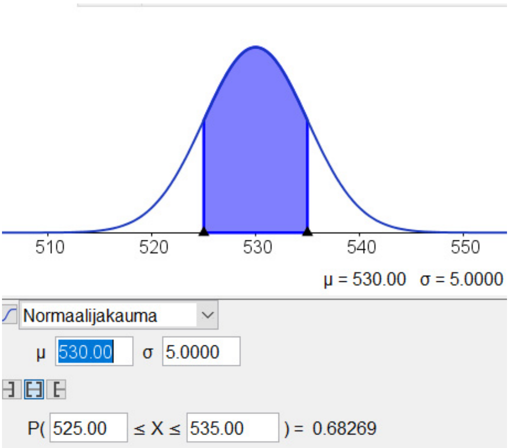
526B. Merkitään A = saapuu pysäköintialueelle klo 8.55 jälkeen ja B = saapuu pysäköintialueelle aikavälillä]8.45; 8.55]. Muutetaan kellonajat minuuteiksi vuorokauden alusta lähtien.

klo 8.45 vastaa 525 minuuttia
klo 8.50 vastaa 530 minuuttia
klo 8.55 vastaa 535 minuuttia

Ohjelmasta saadaan $P(A) = 0{,}158\ldots$.



Ohjelmasta saadaan $P(B) = 0{,}682\ldots$.



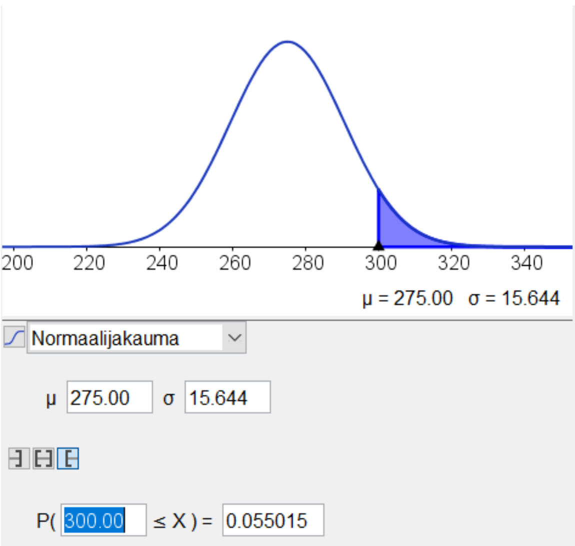
Henkilö saapuu työpaikalleen klo 9.00 jälkeen, jos hän saapuu pysäköintialueelle klo 8.55 jälkeen tai hän saapuu pysäköintialueelle välillä]8.45; 8.55] silloin, kun kaikki pysäköintipaikat ovat varattuja. Paikat ovat varattuja todennäköisyydellä 1 – 0,65 = 0,35, joten

P(saapuu työpaikalleen klo 9.00 jälkeen)
$= P(A) + 0{,}35 \cdot P(B)$
$= 0{,}158\ldots + 0{,}35 \cdot 0{,}682\ldots$
$= 0{,}397\ldots$
$= 0{,}40$

Vastaus: 0,40

527B. Kyseessä on binomitodennäköisyys, jossa $n = 2500$ ja $p = 0{,}11$
Määritetään kysytty todennäköisyys normaalijakaumalla, jonka keskiarvo on $\overline{x} = np = 2500 \cdot +{,}11 = 275$ ja keskihajonta

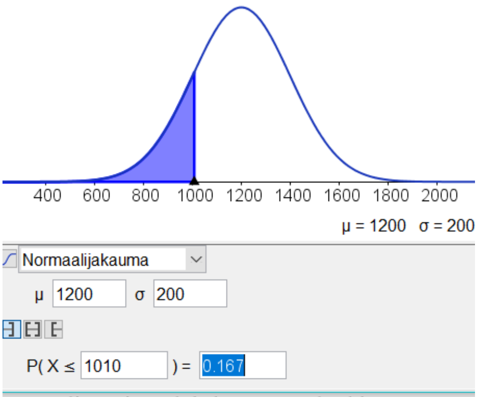
$$s = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2500 \cdot 0{,}11 \cdot (1-0{,}11)} = 15{,}644\ldots.$$



Todennäköisyys, että postimyyntiliikkeen 2 500 asiakkaasta vähintään 300 palauttaa tilaamansa tuotteen, on 0,0550…≈ 0,055

Vastaus: 0,055

528B. Määritetään sopivalla ohjelmalla aikaraja, johon mennessä $\frac{50}{300} = 0{,}166...$ lampuista on sammunut. Rajaksi saadaan 1010 tuntia.



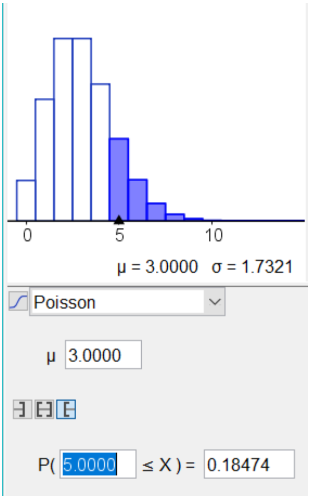
Koska lamput palavat 55 h viikossa, on vaihto tehtävä

$$\frac{1010}{55} = 18{,}353... \approx 18 \text{ viikon välein.}$$

Vastaus: 18 viikon välein

529B. Sovelletaan Poissonin jakaumaa $P(X=k)=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$ odotusarvolla $\mu = 3$.

Määritetään tapahtuman ”ainakin 5 puhelua” todennäköisyys $P(X \geq 5)$ sopivalla ohjelmalla.



$P(X \geq 5) = 0{,}184\ldots \approx 0{,}18$

Vastaus: 0,18

530B. Havainnollistetaan heittotuloksia ja satunnaismuuttujan $|x-y|$ arvoja taulukon avulla.
Merkitään kaikki alkeistapaukset taulukkoon.

Pisteluku x

Pisteluku y	1	2	3	4	5	6
1	|1–1| = 0	|2–1| = 1	|3–1| = 2	|4–1| = 3	|5–1| = 4	|6–1| = 5
2	|1–2| = 1	|2–2| = 0	|3–2| = 1	|4–2| = 2	|5–2| = 3	|6–2| = 4
3	|1–3| = 2	|2–3| = 1	|3–3| = 0	|4–3| = 1	|5–3| = 2	|6–3| = 3
4	|1–4| = 3	|2–4| = 2	|3–4| = 1	|4–4| = 0	|5–4| = 1	|6–4| = 2
5	|1–5| = 4	|2–5| = 3	|3–5| = 2	|4–5| = 1	|5–5| = 0	|6–5| = 1
6	|1–6| = 5	|2–6| = 4	|3–6| = 3	|4–6| = 2	|5–6| = 1	|6–6| = 0

Lasketaan kaikkien alkeistapausten todennäköisyydet ja muodostetaan satunnaismuuttujan $|x-y|$ todennäköisyysjakauma.

$\|x-y\|$	0	1	2	3	4	5
Todennäköisyys p	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$	$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$	$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

Odotusarvo μ saadaan kertomalla jokainen satunnaismuuttujan $|x-y|$ arvo todennäköisyydellään p ja laskemalla tulot yhteen.

$$\begin{aligned}\mu &= 0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{5}{18}+2\cdot\frac{2}{9}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{9}+5\cdot\frac{1}{18}\\ &= 0+\frac{5}{18}+\frac{4}{9}+\frac{3}{6}+\frac{4}{9}+\frac{5}{18}\\ &= \frac{35}{18}\end{aligned}$$

Vastaus:

$\|x-y\|$	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

$\mu=\frac{35}{18}$

531B. Jos isompi jalokivi hiotaan ja se säilyy ehjänä, on kultasepän voitto $0{,}3 \cdot 12\,000 \text{ mk} - 1000 \text{ mk} = 2600 \text{ mk}$. Jos jalokivi tuhoutuu, kultaseppä menettää $12\,000 \text{ mk} + 1000 \text{ mk} = 13\,000 \text{ mk}$.

Muodostetaan todennäköisyysjakauma.

Saatu voitto (mk)	Todennäköisyys
2600	0,9
–13 000	0,1

Hionnan jälkeinen varallisuuden odotusarvo on
$\mu = 2600 \text{ mk} \cdot 0{,}9 + (-13\,000 \text{ mk}) \cdot 0{,}1 = 1040 \text{ mk}$.

Jos pienempi jalokivi hiotaan ja se säilyy ehjänä, on kultasepän voitto $0{,}3 \cdot 6\,000 \text{ mk} - 800 \text{ mk} = 1000 \text{ mk}$. Jos jalokivi tuhoutuu, kultaseppä menettää $6000 \text{ mk} + 800 \text{ mk} = 6800 \text{ mk}$.

Muodostetaan todennäköisyysjakauma.

Saatu voitto (mk)	Todennäköisyys
1000	0,92
–6800	0,08

Hionnan jälkeinen kahden pienemmän jalokiven yhteenlasketun varallisuuden odotusarvo on
$\mu = 2 \cdot [1000 \text{ mk} \cdot 0{,}92 + (-6800 \text{ mk}) \cdot 0{,}08] = 752 \text{ mk}$.

Yhden suuren jalokiven varallisuuden odotusarvo on suurempi kuin kahden pienen, joten kultasepällä kannattaa hioa yksi suuri jalokivi.

Vastaus: yksi suuri

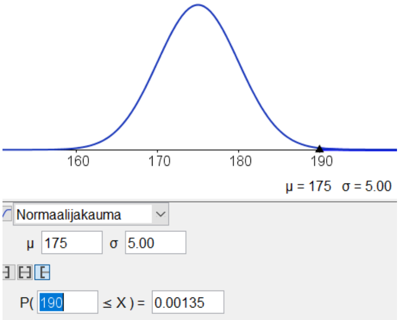
532B. Muodostetaan taulukko, jossa on syvyysluokkien todelliset alarajat, todelliset yläraja, luokkakeskukset ja niitä vastaavaat veden löytymisen todennäköisyydet. Tehtävässä ilmoitetaan, että laskutetaan jokaiselta alkavalta metriltä. Tällöin ensimmäinen todellinen alaraja laskutettavissa metrimäärissä on 5 m (jos poraus menee vähänkin yli 4 metrin, laskutetaan 5 metristä) ja todellinen yläraja 10 m (tasan 10 metristä laskutetaan 10 m). Seuraava todellinen alaraja laskutettavissa metreissä on 11 m (jos menee vähänkin yli 10 m, laskutetaan 11 metristä) jne. Viimeiseen sarakkeeseen muodostetaan luokkakeskusten ja todennäköisyyksien tulo kerrottuna porauksen metrihinnalla 200 mk.

	A	B	C	D	E
1	Alkavan metrimäärän todellinen alaraja (m)	Alkavan metrimäärän todellinen yläraja (m)	Luokkakeskus *h* (m)	*p*	200 · p · luokkakeskus
2	5	10	7,5	0,04	60
3	11	20	15,5	0,06	186
4	21	30	25,5	0,1	510
5	31	40	35,5	0,15	1065
6	41	50	45,5	0,2	1820
7	51	60	55,5	0,3	3330
8	61	70	65,5	0,1	1310
9	71	80	75,5	0,05	755
10				Summa	9036

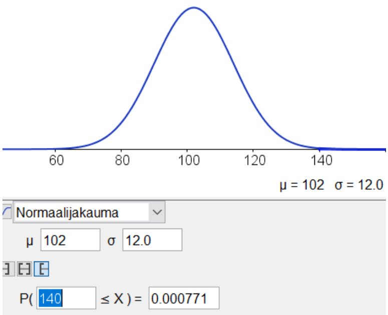
Viimeisen sarakkeen summasta nähdään, että onnistuneen porauksen hinnan odotusarvo on 9036 mk.

Vastaus: 9036 mk

533B. Sopivalla ohjelmalla saadaan P(pituus on yli 190 cm) = 0,00135…



Sopivalla ohjelmalla saadaan P(älykkyysosamäärä yli 140) = 0,000771…



P(pituus on yli 190 cm ja älykkyysosamäärä yli 140)
$= 0{,}00135\ldots \cdot 0{,}000771\ldots = 0{,}00000104\ldots$

P(16 500 ihmisestä ainakin yhden on yli 190 cm ja älykkyysosamäärä yli 140)
$= 1 - P(\text{ei yhdenkään})$
$= 1 - (1 - 0{,}00000104\ldots)^{16\,500}$
$= 0{,}0170\ldots$
$\approx 0{,}017$

Samalla päättelyllä kuin yllä ei voida laskea todennäköisyyttä, että ryhmässä on ainakin yksi henkilö, jonka pituus on yli 190 cm ja kengännumero vähintään 45, koska pituus ja kengännumero ovat toisistaan riippuvia.

Vastaus: 0,017, ei voida

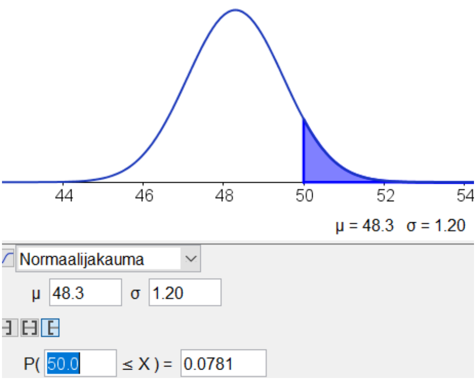
534B. Makeisten yhteispaino koostuu 23 makeisen painosta, jotka noudattavat normaalijakaumaa.

Yhteispainon keskiarvo on $23 \cdot 2{,}1 = 48{,}3$.

Yhteispainon keskihajonnan neliö $s^2 = 23 \cdot 0{,}25^2 = 1{,}4375$.

Yhteispainon keskihajonta on $s = \sqrt{1{,}4375} = 1{,}198...$

Määritetään todennäköisyys $P(X > 50)$ sopivalla ohjelmalla.



Todennäköisyys, että pussissa olevat makeiset yhteensä painavat yli 50 g, on $0{,}0781\ldots \approx 0{,}078$.

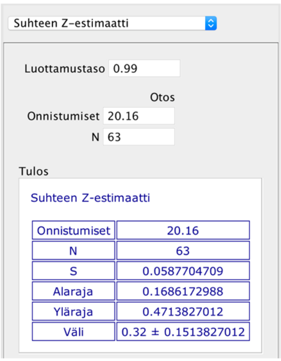
Vastaus: 0,078

535B. **a)** Määritetään ohjelmalla 99 %:n luottamusväli alkoholia käyttämättömien lukiolaisten osuudelle, kun suhteellinen osuus otoksessa on p = 0,32, otoskoko n = 63 ja 99 %:n luottamusvälin kriittinen arvo on 2,58.

$$\left[p - \text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + \text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}32 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}32 \cdot (1-0{,}32)}{63}}; 0{,}32 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}32 \cdot (1-0{,}32)}{63}}\right]$$
$$= [0{,}32 - 0{,}151...; 0{,}32 + 0{,}151...]$$
$$= [0{,}168...; 0{,}471...]$$
$$= [16{,}8...\%; 47{,}1\ \%]$$

Pyöristys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten alkoholia käyttämättömien lukiolaisten 99 %:n luottamusväli on [16 %, 48 %].

Luottamusväli voidaan määrittää myös ohjelmalla.



Vastaus: [16 %, 48 %]

b) Koska aiemmassa tutkimuksessa alkoholia käyttämättömien lukiolaisten osuus 27 % kuuluu a-kohdassa saadulle luottamusvälille, voidaan todeta, että uuden tutkimuksen tuloksen poikkeama aiemmasta ei ole merkitsevästi poikkeava.

Vastaus: ei ole

c) Virhemarginaali on puolet luottamusvälin pituudesta eli

$$\text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,32 \cdot (1-0,32)}{n}}.$$

Muodostetaan virhemarginaalin avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä otoskoko n.

$$0,02 = 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,32 \cdot (1-0,32)}{n}}$$

Yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan $n = 3621,081\ldots$

Otoskoko pitää pyöristää ylöspäin, jotta virhemarginaali on 2 prosenttiyksikköä. Otoskoon pitäisi olla siis 3622.

Vastaus: 3622

536B. **a)** Havaintoarvojen keskiarvoksi saadaan $\bar{x} = 33{,}8$ cl ja keskihajonnaksi 0,912…cl.

n	25
Keskiarvo	33.8
σ	0.8944
s	0.9129
Σx	845
Σx²	28581
Min	32
Q1	33
Mediaani	34
Q3	34
Max	36

Määritetään ohjelmalla 99,9 %:n luottamusväli käyttämällä *t*-jakaumaa, kun otoksen keskiarvo oli $\bar{x} = 33{,}8$ cl, keskihajonta $s = 0{,}912\ldots$ cl ja otoksen koko $n = 25$.

Keskiarvon T–Estimaatti

Luottamustaso 0.999

Otos

Keskiarvo 33.8

s 0.9129

N 25

Tulos

Keskiarvon T-Estimaatti

Keskiarvo	33.8
s	0.9129
S	0.18258
N	25
df	24
Alaraja	33.1161651201
Yläraja	34.4838348799
Väli	33.8 ± 0.6838348799

99,9 %:n luottamusväli on [33,116… cl; 34,483… cl].

Pyöristys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on [33,1 cl; 34,5 cl].

Vastaus: [33,1 cl; 34,5 cl]

b) a-kohdan perusteella kone täyttää tölkkeihin keskimäärin 33,8 cl, joten jokaista täyttöä kohti tulee 33,8 cl – 33 cl = 0,8 cl ylimääräistä. Kone täyttää vuodessa miljoona tölkkiä, joten täyttövirhettä tulee yhteensä 1 000 000 · 0,8 cl = 800 000 cl = 8000 l. Koneen epätarkkuuden aiheuttama kustannus vuodessa on keskimäärin
8000 · 1,00 € = 8 000 €.

Vastaus: 8000 €

537B. a) Havaintoarvojen keskiarvoksi saadaan $\overline{x} = 58{,}666\ldots$ mg/l ja keskihajonnaksi $s = 5{,}033\ldots$ mg/l.

n	3
Keskiarvo	58.6667
σ	4.1096
s	5.0332
Σx	176
Σx^2	10376
Min	54
Q1	54
Mediaani	58
Q3	64
Max	64

Määritetään ohjelmalla 95 %:n luottamusväli käyttämällä *t*-jakaumaa, kun otoksen keskiarvo oli $\overline{x} = 58{,}666\ldots$ mg/l, keskihajonta $s = 5{,}033\ldots$ mg/l ja otoksen koko $n = 3$.

Keskiarvon T-Estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 58.6667

s 5.0332

N 3

Tulos

Keskiarvon T-Estimaatti

Keskiarvo	58.6667
s	5.0332
S	2.9059193749
N	3
df	2
Alaraja	46.1635380694
Yläraja	71.1698619306
Väli	58.6667 ± 12.5031619306

Pyöristys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on [46 mg/l; 72 mg/l].

Vastaus: [46 mg/l, 72 mg/l]

b) Koska perusjoukon keskihajonta $s = 4$ mg/l tunnetaan, käytetään normaalijakaumaa.

Määritetään ohjelmalla 95 %:n luottamusväli käyttämällä normaalijakaumaa, kun otoksen keskiarvo oli $\overline{x} = 58{,}666\ldots$ mg/l, keskihajonta $s = 4$ mg/l ja otoksen koko $n = 3$.

Pyöristys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on [54 mg/l; 64 mg/l].

Vastaus: [54 mg/l; 64 mg/l]