# 11 MATEMAATTINEN ANALYYSI

## ALOITA PERUSTEISTA

**444A.** **a)** Funktion arvot ovat positiivisia silloin, kun kuvaaja on $x$-akselin yläpuolella. Kuvan perusteella funktion $f$ arvot ovat positiivisia, kun $x < 0$ tai $x > 1$.

Vastaus: $x < 0$ tai $x > 1$

**b)** Epäyhtälön $f(x) < 0$ ratkaisu tarkoittaa, että etsitään ne muuttujan $x$ arvot, joilla funktion $f$ arvot ovat pienempiä kuin 0, eli negatiivisia. Funktion arvot ovat negatiivisia silloin, kun kuvaaja on $x$-akselin alapuolella. Kuvan perusteella funktion $f$ arvot ovat negatiivisia, kun $0 < x < 1$.

Vastaus: $0 < x < 1$

**445B.** **a)** Ratkaistaan epäyhtälö $-3x + 12 \leq 0$. Merkitään epäyhtälön vasen puoli funktioksi $f(x) = -3x + 12$ ja ratkaistaan sen nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -3x + 12 &= 0 \\ -3x &= -12 \quad \| : (-3) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

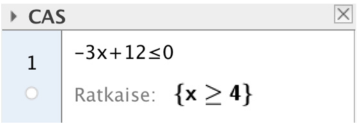
Laaditaan merkkikaavio. Valitaan arvot nollakohdan rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan funktion $f$ arvot niissä.

$f(0) = -3 \cdot 0 + 12 = 12 > 0$
$f(5) = -3 \cdot 5 + 12 = -3 < 0$

| | 4 | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | + | − |

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion $f$ arvo on negatiivinen, kun $x > 4$. Epäyhtälön $-3x + 12 \leq 0$ ratkaisu on siis $x \geq 4$.

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.




Vastaus: $x \geq 4$

**b)** Ratkaistaan epäyhtälö $-x^2 + x + 6 \geq 0$. Merkitään epäyhtälön vasen puoli funktioksi $f(x) = -x^2 + x + 6$ ja ratkaistaan sen nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$.

Sijoitetaan kertoimet $a = -1$, $b = 1$ ja $c = 6$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-2}$$
$$x = \frac{-1 \pm 5}{-2}$$
$$x = \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{-1-5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

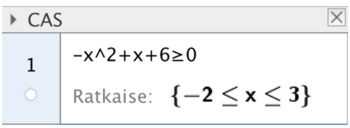
Laaditaan merkkikaavio. Valitaan arvot nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan funktion $f$ arvot niissä.

$f(-3) = -(-3)^2 + (-3) + 6 = -6 < 0$
$f(0) = -0^2 + 0 + 6 = 6 > 0$
$f(4) = -4^2 + 4 + 6 = -6 < 0$

| | $-2$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $+$ | | $-$ |

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion $f$ arvo on positiivinen, kun $-2 < x < 3$. Epäyhtälön $-x^2 + x + 6 \geq 0$ ratkaisu on siis $-2 \leq x \leq 3$.

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.




Vastaus: $-2 \leq x \leq 3$

**446A.** **a)** Derivoidaan lauseke $2x + 1$.

$D(2x + 1) = 2$

Vastaus: 2

**b)** Derivoidaan lauseke $\frac{1}{2}x^2 - x$.

$D\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) = \frac{1}{2} \cdot 2x - 1 = x - 1$

Vastaus: $x - 1$

**c)** Derivoidaan lauseke $x^3 - 4x^2 + 12x - 14$.

$D(x^3 - 4x^2 + 12x - 14) = 3x^2 - 4 \cdot 2x + 12 = 3x^2 - 8x + 12$

Vastaus: $3x^2 - 8x + 12$

**d)** Sievennetään lauseke $x - (x^2 + 3)$.

$x - (x^2 + 3) = x - x^2 - 3 = -x^2 + x - 3$

Derivoidaan lauseke $-x^2 + x - 3$.

$D(-x^2 + x - 3) = -2x + 1$

Vastaus: $-2x + 1$

**447A.** **a)** Sievennetään lauseke $2(x^3 + 4x - 2)$.

$2(x^3 + 4x - 2) = 2x^3 + 8x - 4$

Derivoidaan lauseke $2x^3 + 8x - 4$.
$D(2x^3 + 8x - 4) = 2 \cdot 3x^2 + 8 = 6x^2 + 8$

Vastaus: $6x^2 + 8$

**b)** Sievennetään lauseke $3x(2x^2 - 3x + 5)$.

$3x(2x^2 - 3x + 5) = 6x^3 - 9x^2 + 15x$

Derivoidaan lauseke $6x^3 - 9x^2 + 15x$.
$D(6x^3 - 9x^2 + 15x) = 6 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x + 15 = 18x^2 - 18x + 15$

Vastaus: $18x^2 - 18x + 15$

**c)** Sievennetään lauseke $(x - 1)(3x + 2)$.

$$\begin{aligned}(x - 1)(3x + 2) &= x \cdot 3x + x \cdot 2 - 1 \cdot 3x - 1 \cdot 2 \\ &= 3x^2 + 2x - 3x - 2 \\ &= 3x^2 - x - 2\end{aligned}$$

Derivoidaan lauseke $3x^2 - x - 2$.
$D(3x^2 - x - 2) = 6x - 1$

Vastaus: $6x - 1$

**d)** Sievennetään lauseke $(x^2 + 5x)(4x - 3)$.

$$\begin{aligned}(x^2 + 5x)(4x - 3) &= x^2 \cdot 4x + x^2 \cdot (-3) + 5x \cdot 4x + 5x \cdot (-3) \\ &= 4x^3 - 3x^2 + 20x^2 - 15x \\ &= 4x^3 + 17x^2 - 15x\end{aligned}$$

Derivoidaan lauseke $4x^3 + 17x^2 - 15x$.
$D(4x^3 + 17x^2 - 15x) = 4 \cdot 3x^2 + 17 \cdot 2x - 15 = 12x^2 + 34x - 15$

Vastaus: $12x^2 + 34x - 15$

**448A. a)** Sievennetään lauseke $\frac{1}{3}(3x^2+9x+12)$.

$$\frac{1}{3}(3x^2+9x+12)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2+\frac{1}{3}\cdot 9x+\frac{1}{3}\cdot 12=x^2+3x+4$$

Derivoidaan lauseke $x^2+3x+4$.
$D(x^2+3x+4)=2x+3$

Vastaus: $2x+3$

**b)** Sievennetään lauseke $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2&=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\\&=x\cdot x+x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\\&=x^2-x+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Derivoidaan lauseke $x^2-x+\frac{1}{4}$.

$$D\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=2x-1$$

Vastaus: $2x-1$

**c)** Sievennetään lauseke $\left(\frac{1}{2}x+3\right)(2x-2)$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}x+3\right)(2x-2)&=\frac{1}{2}x\cdot 2x+\frac{1}{2}x\cdot(-2)+3\cdot 2x+3\cdot(-2)\\&=x^2-x+6x-6\\&=x^2+5x-6\end{aligned}$$

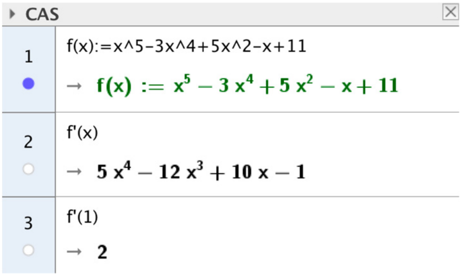
Derivoidaan lauseke $x^2+5x-6$.
$D(x^2+5x-6)=2x+5$

Vastaus: $2x+5$

**449B. a)** Derivoidaan funktio $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^2 - x + 11$.
$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 10x - 1$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 1$.
$f'(1) = 5 \cdot 1^4 - 12 \cdot 1^3 + 10 \cdot 1 - 1 = 5 - 12 + 10 - 1 = 2$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.



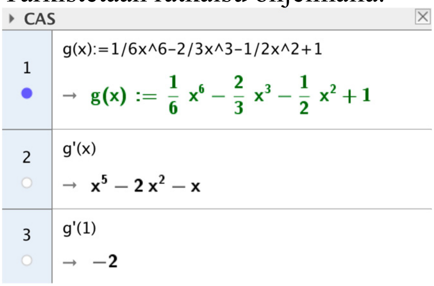

Vastaus: $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 10x - 1$, $f'(1) = 2$

**b)** Derivoidaan funktio $g(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$.

$$g'(x) = \frac{1}{6} \cdot 6x^5 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x + 0 = x^5 - 2x^2 - x$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 1$.
$g'(1) = 1^5 - 2 \cdot 1^2 - 1 = 1 - 2 - 1 = -2$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.




Vastaus: $g'(x) = x^5 - 2x^2 - x$, $g'(1) = -2$

**c)** Sievennetään funktion $h(x) = (2x - 3)^2$ lauseke.

$$\begin{aligned} h(x) = (2x-3)^2 &= (2x-3)(2x-3) \\ &= 2x \cdot 2x + 2x \cdot (-3) - 3 \cdot 2x - 3 \cdot (-3) \\ &= 4x^2 - 6x - 6x + 9 \\ &= 4x^2 - 12x + 9 \end{aligned}$$

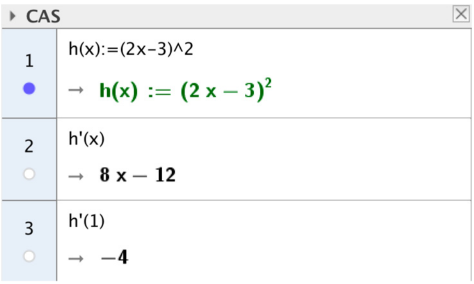
Derivoidaan funktio $h(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

$$h'(x) = 4 \cdot 2x - 12 \cdot 1 + 0 = 8x - 12$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 1$.

$$h'(1) = 8 \cdot 1 - 12 = 8 - 12 = -4$$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.




Vastaus: $h'(x) = 8x - 12$, $h'(1) = -4$

**d)** Sievennetään funktion $i(t)=\dfrac{2x^4-3x^2}{x^2}$ lauseke.

$$i(x)=\frac{2x^4-3x^2}{x^2}=\frac{2x^4}{x^2}-\frac{3x^2}{x^2}=2x^2-3$$

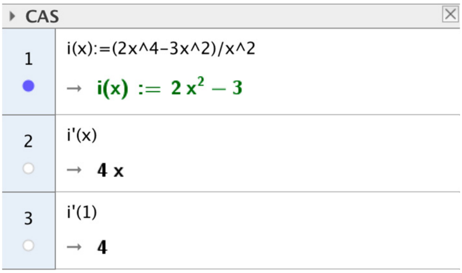
Derivoidaan funktio $i(x) = 2x^2 - 3$.

$i\,'(x) = 4x - 0 = 4x$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 1$.

$i\,'(1) = 4 \cdot 1 = 4$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.




Vastaus: $i\,'(x) = 4x$, $i\,'(1) = 4$

**450A.** Ratkaistaan ensimmäisen asteen epäyhtälö $4x + 17 > 2 - x$. Siirretään kaikki termit epäyhtälömerkin vasemmalle puolelle.

$$\begin{aligned} 4x + 17 &> 2 - x \\ 5x + 15 &> 0 \end{aligned}$$

Merkitään epäyhtälön vasen puoli funktioksi $f(x) = 5x + 15$ ja ratkaistaan sen nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 5x + 15 &= 0 \\ 5x &= -15 \quad \| :5 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Laaditaan merkkikaavio. Valitaan arvot nollakohdan rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan funktion $f$ arvot niissä.

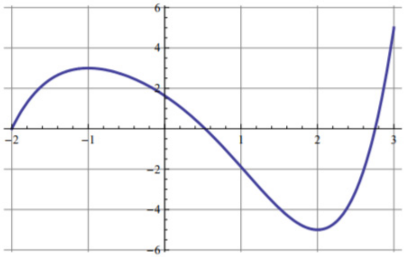
$f(-4) = 5 \cdot (-4) + 15 = -5 < 0$
$f(0) = 5 \cdot 0 + 15 = 15 > 0$

| | $-3$ | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $+$ |

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion $f$ arvo on positiivinen, kun $x > -3$. Koska funktio $f$ on saatu muokkaamalla alkuperäistä epäyhtälöä, niin myös epäyhtälön $4x + 17 > 2 - x$ ratkaisu on $x > -3$.

Vastaus: $x > -3$

## 451A.




**a)** Funktion nollakohdat ovat kuvaajan ja $x$-akselin leikkauspisteiden $x$-koordinaatit.
Kuvion perusteella funktion nollakohdat ovat $x \approx -2$, $x \approx 0{,}5$ ja $x \approx 2{,}8$.

Vastaus: $x \approx -2$, $x \approx 0{,}5$ ja $x \approx 2{,}8$

**b)** Derivaatan nollakohtaan piirretty tangentti on vaakasuora. Kuvion perusteella kohtiin $x \approx -1$ ja $x \approx 2$ voidaan piirtää vaakasuoran tangentit.

Vastaus: $x \approx -1$ ja $x \approx 2$

**c)** Kuvion perusteella funktion suurin arvo välillä $[-2, 3]$ on noin 5.

Vastaus: n. 5

**d)** Kuvion perusteella funktion pienin arvo välillä $[-2, 3]$ on noin $-5$.

Vastaus: n. $-5$

**e)** Funktio on kasvava, kun muuttujan arvon kasvaessa funktion arvot kasvavat. Kuvion perusteella funktio on kasvava likimain, kun $-2 \le x \le -1$ ja $2 \le x \le 3$

Vastaus: likimain, kun $-2 \le x \le -1$ ja $2 \le x \le 3$

**f)** Funktio on vähenevä, kun muuttujan arvojen kasvaessa funktion arvot pienenevät. Kuvion perusteella funktio on vähenevä likimain, kun $-1 \le x \le 2$.

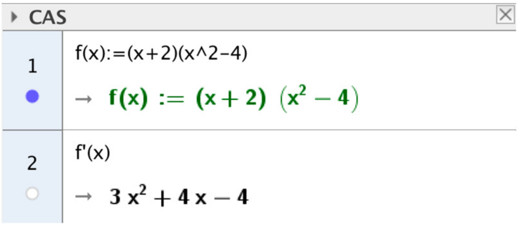
Vastaus: likimain, kun $-1 \le x \le 2$

**452B.** **a)** Sievennetään funktion $f(x) = (x + 2)(x^2 - 4)$ lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 2)(x^2 - 4) \\ &= x \cdot x^2 + x \cdot (-4) + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot (-4) \\ &= x^3 - 4x + 2x^2 - 8 \\ &= x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.
$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.

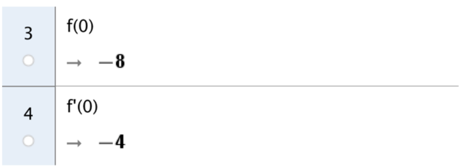



Vastaus: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$

**b)** Lasketaan $f(0)$.
$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 8 = -8$

Lasketaan $f'(0)$.
$f'(x) = 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 4 = -4$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.




Vastaus: $f(0) = -8$, $f'(0) = -4$

**c)** Lasketaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$3x^2 + 4x - 4 = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = 3$, $b = 4$ ja $c = -4$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6}$$
$$x = \frac{-4 \pm 8}{6}$$
$$x = \frac{-4 + 8}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{-4 - 8}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.

5 Ratkaise(f'(x)=0)

$\rightarrow \left\{ \mathbf{x = -2, x = \frac{2}{3}} \right\}$

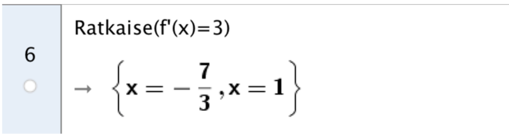
Vastaus: $x = -2$ ja $x = \frac{2}{3}$

**d)** Ratkaistaan yhtälö $3x^2 + 4x - 4 = 3$.
$3x^2 + 4x - 7 = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = 3$, $b = 4$ ja $c = -7$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{6}$$
$$x = \frac{-4 \pm 10}{6}$$
$$x = \frac{-4+10}{6} = \frac{6}{6} = 1 \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{-4-10}{6} = \frac{-14}{6} = -\frac{7}{3}$$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.




Vastaus: $x = 1$ ja $x = -\frac{7}{3}$

**453A.** Määritetään funktion $f(x) = x^2 + 4x - 5$ suurin ja pienin arvo välillä $[-6, 3]$.

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan funktio $f$.

$f'(x) = 2x + 4$

Lasketaan derivaatan nollakohta yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
2x + 4 &= 0 \\
2x &= -4 \quad \|: 2 \\
x &= -2
\end{aligned}
$$

Derivaatan nollakohta kuuluu välille $[-6, 3]$.
Lasketaan funktion arvot derivaatan nollakohdassa ja välin päätepisteissä.

$$
\begin{aligned}
&f(-6) = (-6)^2 + 4 \cdot (-6) - 5 = 7 \\
&f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 = -9 \\
&f(3) = 3^2 + 4 \cdot 3 - 5 = 16
\end{aligned}
$$

Funktion $f$ suurin arvo välillä $[-6, 3]$ on 16 ja pienin arvo $-9$.

Vastaus: suurin arvo: 16, pienin arvo: $-9$

**454A.** **a)** Funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä 1940−1980 on funktion kuvaajalle tälle välille piirretyn sekantin kulmakerroin.

Sekantin kulmakerroin on

$$k = \frac{1\,472\,190 - 1\,121\,939}{1980 - 1940} = \frac{350\,251}{40} = 8756{,}275.$$

Funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä 1940–1980 on 8756 asukasta/vuosi.

Vastaus: 8756 asukasta/vuosi

**b)** Funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x$ = 2010 on kohtaan $x$ = 2010 piirretyn tangentin kulmakerroin.

Tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{1\,333\,290 - 1\,600\,000}{2010 - 1940} = \frac{-266\,710}{70} = -3810{,}142...$$

Funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x$ = 2010 on −3810 asukasta/vuosi.

Vastaus: −3810 asukasta/vuosi

**c)** Kohdan a tulos tarkoittaa käytännössä sitä, että aikavälillä 1940−1980 Viron asukasluku kasvoi keskimäärin 8756 asukkaalla vuodessa.

Kohdan b tulos tarkoittaa käytännössä sitä, että vuonna 2010 Viron asukasluku väheni 3810 asukkaalla.

Vastaus: a-kohta: välillä 1940–1980 asukasluku kasvoi keskimäärin 8756 asukkaalla vuodessa, b-kohta: vuonna 2010 asukasluku väheni 3810 asukkaalla

**455A. a)** Derivoidaan funktio $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4$.

$f'(x) = x^2 - 4x$

Vastaus: $f'(x) = x^2 - 4x$

**b)** Funktion kuvaajalle piirretty tangentti on $x$-akselin suuntainen, kun tangentin kulmakerroin on 0. Tangentin kulmakerroin saadaan funktion derivaatan avulla. Määritetään kohdat, joissa derivaatta on 0. Ratkaistaan yhtälö $x^2 - 4x = 0$.

Sijoitetaan kertoimet $a = 1$, $b = -4$ ja $c = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{4+4}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{4-4}{2} = 0$$

Funktion kuvaajan tangentti on $x$-akselin suuntainen, kun $x = 0$ tai $x = 4$.

Vastaus: $x = 0$ ja $x = 4$

**c)** Kohdan b mukaan derivaatan nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 4$. Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan $f'$ arvot niissä. Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

$f'(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5 > 0$

$f'(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$

$f'(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 = 5 > 0$

| | 0 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | − | + | |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ | |

Kulkukaavion perusteella funktio $f$ on vähenevä, kun $0 \le x \le 4$.

Vastaus: välillä [0, 4]

**456A.** **a)** $f(x) = 1{,}5$, kun $x \approx 1{,}2$ $x \approx 3{,}3$ ja $x \approx 4{,}9$.

Vastaus: $x \approx 1{,}2$, $x \approx 3{,}3$ ja $x \approx 4{,}9$

**b)** Funktio $f$ on vähenevä likimain, kun $2{,}1 \leq x \leq 4{,}2$ ja $8{,}3 \leq x \leq 10$.

Vastaus: likimain, kun $2{,}1 \leq x \leq 4{,}2$ ja $8{,}3 \leq x \leq 10$

**c)** Funktion $f$ suurin arvo välillä $2 \leq x \leq 7$ on noin 4,2 ja pienin arvo noin 1,2.

Vastaus: suurin arvo: n. 4,2, pienin arvo: n. 1,2

**457.** Vaihe A: Kirjoitetaan suorakulmion pinta-alan lauseke.

Vaihe B: Merkitään suorakulmion toista sivua kirjaimella $x$.

Vaihe C: Muodostetaan lauseke suorakulmion toisen sivun pituudelle. Toisen sivun pituus saadaan, kun luvusta 26 vähennetään $2x$.

Vaihe D: Piirretään kuva tilanteesta.

Vaihe E: Muodostetaan pinta-alan lauseke sivujen pituuksien lausekkeiden avulla.

Vaihe F: Määritellään väli, jolla muuttuja $x$ on.

Vaihe G: Derivoidaan pinta-alan lauseke

Vaihe H: Lasketaan derivaatan nollakohdat.

Vaihe I: Laaditaan kulkukaavio.

Vaihe J: Pinta-alafunktion maksimikohta on $x = 6{,}5$.

Vaihe K: Lasketaan suorakulmion toisen sivun pituus.

Vaihe L: Lasketaan pinta-alafunktion arvo, kun $x = 6{,}5$.

Sanallinen vastaus: Aitauksen suurin pinta-ala on 84,5 $\text{m}^2$ ja mitat 6,5 m ja 13 m.

Vastaus: A: Kirjoitetaan suorakulmion pinta-alan lauseke. B: Merkitään toista sivua kirjaimella $x$. C: Toisen sivun pituus saadaan, kun luvusta 26 vähennetään $2x$. D: Piirretään kuva tilanteesta. E: Muodostetaan pinta-alan lauseke sivujen pituuksien lausekkeiden avulla. F: Määritellään väli, jolla muuttuja $x$ on. G: Derivoidaan pinta-alan lauseke. H: Lasketaan derivaatan nollakohdat. I: Laaditaan kulkukaavio. J: Pinta-alafunktion maksimikohta on $x = 6{,}5$. K: Lasketaan suorakulmion toisen sivun pituus. L: Lasketaan pinta-alafunktion arvo, kun $x = 6{,}5$. Vastaus: Aitauksen suurin pinta-ala on 84,5 $\text{m}^2$ ja mitat 6,5 m ja 13 m.

**458B.** **a)** Koska aitamateriaalia on 7,0 metriä ja toisen aidattavan sivun pituus on $x$, toisen sivun pituus on $7{,}0 - x$.

Vastaus: $7{,}0 - x$

**b)** Suorakulmion pinta-ala lasketaan kertomalla pituus leveydellä, joten pinta-alafunktio on

$A(x) = x(7{,}0 - x) = 7{,}0x - x^2$.

Vastaus: $A(x) = 7{,}0x - x^2$

**c)** Derivoidaan funktio $A(x) = 7{,}0x - x^2$.
$A'(x) = 7{,}0 - 2x$

Lasketaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $A'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 7{,}0 - 2x &= 0 \\ -2x &= -7{,}0 \quad \| : (-2) \\ x &= 3{,}5 \end{aligned}$$

Valitaan kohdat nollakohdan rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan $A'$ arvot niissä. Laaditaan funktion $A$ kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.
$A'(0) = 7{,}0 - 2 \cdot 0 = 7{,}0 > 0$
$A'(4) = 7{,}0 - 2 \cdot 4 = -1{,}0 < 0$

| | 3,5 | |
|---|---|---|
| $A'(x)$ | + | − |
| $A(x)$ | ↗ | ↘ |
| | max | |

Kulkukaavion perusteella pinta-alan suurin arvo saavutetaan kohdassa $x = 3{,}5$.
Sivun $x$ pituus on siis 3,5 m ja toisen sivun pituus on
7,0 m− 3,5 m = 3,5 m.

Aitauksen suurin pinta-ala on 3,5 m · 3,5 m = 12,25 m$^2$.

Vastaus: 3,5 m ja 3,5 m, 12,25 m$^2$

## VAHVISTA OSAAMISTA

**459A.** **a)** Funktion hetkellinen muutosnopeus on funktion kuvaajalle tietylle välille piirretyn sekantin kulmakerroin, kun taas funktion hetkellinen muutosnopeus on funktion kuvaajalle tiettyyn kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin.

Vastaus: Funktion hetkellinen muutosnopeus on funktion kuvaajalle tietylle välille piirretyn sekantin kulmakerroin, kun taas funktion hetkellinen muutosnopeus on funktion kuvaajalle tiettyyn kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin.

**b)** Hetkellinen muutosnopeus määritetään esimerkiksi, kun halutaan tietään automatkan keskinopeus.

Hetkellinen muutosnopeus määritetään esimerkiksi, kun halutaan tietää auton nopeus tietyllä ajanhetkellä.

Vastaus: keskimääräinen muutosnopeus: esim. automatkan keskinopeus, hetkellinen muutosnopeus: esim. auton nopeus tietyllä ajanhetkellä

**460A.** Polynomi $3x^2 + 8x - 3$ on toisen asteen polynomi, jonka toisen asteen termin kerroin on positiivinen. Polynomia vastaavan funktion

$f(x) = 3x^2 + 8x - 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa negatiivisia arvoja nollakohtiensa välissä.

Ratkaistaan nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$.

$3x^2 + 8x - 3 = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = 3$, $b = 8$ ja $c = -3$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3}$$
$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{6}$$
$$x = \frac{-8 \pm 10}{6}$$
$$x = \frac{-8+10}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{-8-10}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

Polynomi $3x^2 + 8x - 3$ saa negatiivisia arvoja, kun $-3 < x < \frac{1}{3}$.

Vastaus: $-3 < x < \frac{1}{3}$

**461A.** **a)** $f(x) = 1$, kun $x \approx -1$ ja $x \approx 3$.

Vastaus: $x \approx -1$ ja $x \approx 3$

**b)** $f(x) \leq 0$, kun funktion kuvaaja on $x$-akselin alapuolella. Tämä toteutuu likimain, kun $0 \leq x \leq 2$.

Vastaus: likimain, kun $0 \leq x \leq 2$

**c)** $f'(x) \leq 0$, kun funktio $f$ on vähenevä. Kuvion perustella funktio $f$ on vähenevä välillä $-2 \leq x \leq 4$ likimain, kun $-2 \leq x \leq 1$

Vastaus: likimain, kun $-2 \leq x \leq 1$

**462A.** Kuva A: Funktion ääriarvokohdat ovat likimain kohdissa $x = -1{,}3$ ja $x = 0$. Kuvan A funktiota vastaavan derivaattafunktion nollakohdat on oltava siis $x = -1{,}3$ ja $x = 0$. Kuvat A ja III vastaavat siis toisiaan.

Kuva B: Funktion kuvaajan huippu on kohdassa $x = 0$, huipun vasemmalla puolella funktio on vähenevä ja oikealla puolella kasvava. Kuvan B funktiota vastaavan derivaattafunktion nollakohdan on oltava siis $x = 0$ ja sen vasemmalla puolella derivaatan arvon on oltava negatiivinen ja oikealla puolella positiivinen. Kuvat B ja I vastaavat siis toisiaan.

Kuva C: Funktion kuvaajan huippu on kohdassa $x = 0$, huipun vasemmalla puolella funktio on kasvava ja oikealla puolella vähenevä. Kuvan C funktiota vastaavan derivaattafunktion nollakohdan on oltava siis $x = 0$ ja sen vasemmalla puolella derivaatan arvon on oltava positiivinen ja oikealla puolella negatiivinen. Kuvat C ja II vastaavat siis toisiaan.

Vastaus: A: III, B: I ja C: II

**463A.** **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = tx^3 - 3t^2x^2 + x + 5$ muuttujansa $x$ suhteen.
$f'(x) = 3tx^2 - 6t^2x + 1$

Vastaus: $f'(x) = 3tx^2 - 6t^2x + 1$

**b)** Derivoidaan $f(t) = tx^3 - 3t^2x^2 + x + 5$ muuttujansa $t$ suhteen.
$f'(t) = x^3 - 6x^2t$

Vastaus: $f'(t) = x^3 - 6x^2t$

**464A.** **a)** Funktiolla on derivaatan nollakohdassa paikallinen ääriarvokohta. Lintupopulaation koko kääntyy ensimmäisessä kohdassa kasvuun ja toisessa kohdassa laskuun.

Vastaus: Funktiolla on derivaatan nollakohdassa paikallinen ääriarvokohta. Lintupopulaation koko kääntyy ensimmäisessä kohdassa kasvuun ja toisessa kohdassa laskuun.

**b)** Yhden vuoden kuluttua seurannan aloituksesta lintupopulaation koko väheni noin 87 lintua / vuosi.

Vastaus: Yhden vuoden kuluttua seurannan aloituksesta lintupopulaation koko väheni noin 87 lintua / vuosi.

**465A.** Derivoidaan funktio $f(x) = ax^3 + 4bx^2$.
$f'(x) = 3ax^2 + 8bx$

On oltava $f'(x) = 6x^2 + 4x$, joten saadaan yhtälöpari $\begin{cases} 3a = 6 \\ 8b = 4 \end{cases}$.

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 3a &= 6 \quad \|: 3 \\ a &= 2. \end{aligned}$$

Toisesta yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 8b &= 4 \qquad \| : 8 \\ b &= \frac{4}{8} \\ b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vastaus: $a = 2,\ b = \dfrac{1}{2}$

**466A. a)** Funktio $f(x) = 3x^3 - 9x + 9$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin [0, 2] päätepisteissä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan funktio $f(x) = 3x^3 - 9x + 9$
$f'(x) = 9x^2 - 9$

Lasketaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 9x^2 - 9 &= 0 \quad \| :9 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm\sqrt{1} \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = -1$. Derivaatan nollakohdista $x = 1$ kuuluu välille [0, 2].

Lasketaan funktion $f$ arvot derivaatan nollakohdassa $x = 1$ ja tarkasteltavan välin päätepisteissä.

$f(0) = 3 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0 + 9 = 9$
$f(1) = 3 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1 + 9 = 3 - 9 + 9 = 3$
$f(2) = 3 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2 + 9 = 3 \cdot 8 - 18 + 9 = 24 - 18 + 9 = 15$

Funktion suurin arvo välillä [0, 2] on 15 ja pienin arvo 3.

Vastaus: 15, 3

**b)** Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan $f'$ arvot niissä. Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.

$f'(-2) = 9 \cdot (-2)^2 - 9 = 27 > 0$
$f'(0) = 9 \cdot 0^2 - 9 = -9 < 0$
$f'(2) = 9 \cdot 2^2 - 9 = 27 > 0$

| | $-1$ | $1$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | − | + |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ |
| | max | min | |

Funktiolla $f$ on paikallinen maksimikohta $x = -1$. Paikallinen maksimiarvo on $f(-1) = 3 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1) + 9 = 15$.

Funktiolla $f$ on paikallinen minimikohta $x = 1$. Paikallinen minimiarvo on $f(1) = 3 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1 + 9 = 3$.

Vastaus: paikallinen maksimiarvo 15, paikallinen minimiarvo 3

**467A.** Sievennetään lauseketta $(x-3)^2+(x-9)^2$.

$$\begin{aligned}(x-3)^2+(x-9)^2 &= x^2-6x+9+x^2-18x+81\\ &= 2x^2-24x+90\end{aligned}$$

Merkitään lauseke funktioksi $f(x)=2x^2-24x+90$.

Funktion toisen asteen termin kerroin on positiivinen, joten sen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ja funktion pienin arvo on paraabelin huipussa. Määritetään, missä kohdassa paraabelin huippu on. Paraabelin huippuun piirretty tangentti on $x$-akselin suuntainen, joten sen kulmakerroin on nolla. Määritetään, missä kohdassa funktion $f$ derivaatta saa arvon 0.

Derivoidaan funktio $f$.

$$f'(x)=4x-24$$

Lasketaan derivaatan nollakohta yhtälöstä $f'(x)=0$.

$$\begin{aligned}4x-24&=0\\ 4x&=24 \quad \|:4\\ x&=6\end{aligned}$$

Paraabelin huippu on kohdassa $x=6$, joten muuttujan arvolla $x=6$ summa $(x-3)^2+(x-9)^2$ on mahdollisimman pieni.

Vastaus: $x=6$

**468A.** Paraabeli $y = x^2 - 5x - 14$ on funktion $f(x) = x^2 - 5x - 14$ kuvaaja. Paraabelin huippuun piirretty tangentti on $x$-akselin suuntainen, eli sen kulmakerroin on 0. Koska derivaatta on tangentin kulmakerroin, huippu löytyy kohdasta, jossa funktion derivaatta saa arvon 0.

Derivoidaan funktio $f$.

$f'(x) = 2x - 5$

Lasketaan derivaatan nollakohta yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 0 \\ 2x &= 5 \qquad \| :2 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Lasketaan huipun $y$-koordinaatti.

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} - 14 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} - 14 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} - \frac{56}{4} = -\frac{81}{4}$$

Paraabelin huippu on pisteessä $\left(\frac{5}{2}, -\frac{81}{4}\right)$.

Toinen tapa määrittää paraabelin huipun $x$-koordinaatti on laskea ensin funktion $f(x) = x^2 - 5x - 14$ nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$. Huipun $x$-koordinaatti on nollakohtien puolivälissä. Huipun $y$-koordinaatti saadaan samalla tavalla kuin derivaatan avullakin määritettäessä.

Vastaus: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{81}{4}\right)$ esim. huipun $x$-koordinaatti saadaan laskemalla funktion nollakohtien puoliväli ja $y$-koordinaatti laskemalla funktion arvo kyseisessä kohdassa.

**469A.** Määritetään funktion $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+1$ derivaatan suurin ja pienin arvo.

Derivoidaan funktio $f$.

$f'(x) = -x^2 - 2x + 3.$

Derivaattafunktio on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termi −1 on negatiivinen. Derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten sillä on suurin arvo, mutta ei pienintä arvoa.

Määritetään paraabelin huipun $y$-koordinaatti.
Lasketaan derivaattafunktion nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$-x^2 - 2x + 3 = 0$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)}\\ &= \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{-2}\\ &= \frac{2\pm\sqrt{16}}{-2}\\ &= \frac{2\pm 4}{-2}\end{aligned}$$

$$x=\frac{2+4}{-2}=\frac{6}{-2}=-3 \quad \text{tai} \quad x=\frac{2-4}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

Nollakohdat ovat $x = -3$ ja $x = 1$.

Huipun $x$-koordinaatti on nollakohtien puolivälissä kohdassa
$x=\frac{-3+1}{2}=-1.$

Huipun $y$-koordinaatti on $y = f'(-1) = -(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 3 = 4.$

Funktion $f$ derivaatta voi saada luvun 4 ja kaikki sitä pienemmät arvot.

Vastaus: luku 4 ja kaikki sitä pienemmät arvot

**470A.** Paraabelin $y = x^2 + 2x - 1$ $x$-koordinaattia vastaava $y$-koordinaatti on $y = x^2 + 2x - 1$.

Koordinaattien summa on $x + y = x + x^2 + 2x - 1 = x^2 + 3x - 1$.
Merkitään lauseke funktioksi $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saavuttaa pienimmän arvonsa paraabelin huipussa. Etsitään huipun $y$-koordinaatti derivaatan avulla.

$f'(x) = 2x + 3$

Paraabelin huippuun piirretty tangentti on $x$-akselin suuntainen. Etsitään derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} 2x+3&=0 \\ 2x&=-3 \qquad \| :2 \\ x&=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Huipun $y$-koordinaatti on $y=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-1=-\frac{7}{4}$.

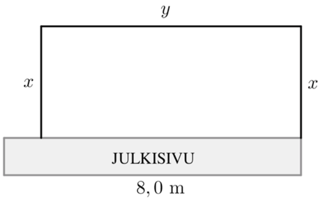
Paraabelin $y = x^2 + 2x - 1$ pisteen $\left(-\frac{3}{2},-\frac{7}{4}\right)$ koordinaattien summa on mahdollisimman pieni.

Vastaus: $\left(-\frac{3}{2},-\frac{7}{4}\right)$

**471A.** Vastaus:

| Välivaiheen järjestysnumero | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Välivaihe | D | H | I | B | J | E | F | A | C | G |

**472B.** Piirretään mallikuva terassin pohjapiirroksesta.




Koska aitaa on käytettävissä 20 m, voidaan muodostaa yhtälö $2x + y = 20$.
Ratkaistaan yhtälöstä julkisivun suuntainen sivu $y$.

$$2x + y = 20$$
$$y = 20 - 2x$$

Terassin pinta-ala noudattaa funktiota $A(x) = xy = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$.

Päätellään suurin ja pienin arvo, jonka sivu $x$ voi saada.
Sivun $x$ suurin mahdollinen arvo saadaan, kun julkisivun suuntainen sivu $y$ on 0 metriä. Ratkaistaan sivun $x$ suurin mahdollinen arvo ohjelman avulla yhtälöstä $20 - 2x = 0$. Ratkaisuksi saadaan $x = 10$.

Sivu $y$ voi olla korkeintaan julkisivun 8 metriä. Ratkaistaan sivun $x$ pienin mahdollinen arvo ohjelman avulla yhtälöstä $20 - 2x = 8$. Ratkaisuksi saadaan $x = 6$.

Koska funktio $A$ on polynomifunktio, se saa pienimmän ja suurimman arvonsa suljetulla välillä [6, 10] olevassa derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteessä.
Funktion $A$ derivaatta on $A'(x) = 20 - 4x$.

Määritetään derivaatan nollakohdat ohjelmalla yhtälöstä $A'(x) = 0$.
Ratkaisuksi saadaan $x = 5$.

Derivaatan nollakohta ei kuulu tarkasteltavalle välille [6, 10]. Lasketaan ohjelman avulla funktion $A$ arvot välin päätepisteissä.

$A(6) = 48$
$A(10) = 0$

Terassin suurin pinta-ala on 48 $m^2$, kun sivun pituus on 6 m ja julkisivun suuntaisen sivun pituus on $20 - 2 \cdot 6$ m $= 8$ m.

Vastaus: 48 $m^2$, 8 m ja 6 m

**473B.** $A = 12\ \text{m}^2$
Merkitään pohjaneliön sivun pituutta kirjaimella $x$ ja suojan korkeutta kirjaimella $y$.
Suojapeitteen pinta-alan lauseke on $3xy + x^2$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä korkeuden $y$ lauseke.

$$\begin{aligned} 3xy + x^2 &= 12 \\ 3xy &= 12 - x^2 \qquad \| :3x \\ y &= \frac{12 - x^2}{3x} \\ y &= \frac{12}{3x} - \frac{x^2}{3x} \\ y &= \frac{4}{x} - \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

Suojan tilavuus on $V = x \cdot x \cdot y = x^2 \cdot \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{3}x\right) = \frac{4x^2}{x} - \frac{1}{3}x^3 = 4x - \frac{1}{3}x^3$.
Määritetään, milloin tilavuus on suurimmillaan.
Derivoidaan funktio $V$.
$V'(x) = 4 - x^2$

Lasketaan derivaatan nollakohdat ohjelman avulla yhtälöstä $V'(x) = 0$.
Nollakohdat ovat $x = 2$ ja $x = -2$. Hylätään negatiivinen vastaus.

Laaditaan funktion $V$ kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.
$V'(-3) = -5 < 0$
$V'(0) = 4 > 0$
$V'(3) = -5 > 0$

| | $-2$ | $2$ | |
|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $V(x)$ | ↘ | ↗ | ↘ |
| | min | max | |

Suojan pohjan mitat ovat 2 m ja 2 m ja korkeus on
$y = \frac{4}{2} - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$ metriä.

Vastaus: 2 m, 2 m ja 1,33 m

**474B.** Merkitään korotusten määrää kirjaimella $x$.
Muodostetaan lauseke myynnistä saadulle voitolle. Yhden tuotteen kustannukset on 3 €, jolloin voittoa saadaan 5 € − 3 € = 2 €.

| Euron hinnankorotusten määrä | Voiton määrä (€) | Viikossa myytyjen tuotteiden määrä | Myyntivoitto |
|---|---|---|---|
| 0 | $5-3$ | 1000 | $(5-3)\cdot 1000$ |
| 1 | $5+1-3$ | $1000-200\cdot 1$ | $(5+1-3)\cdot(1000-200\cdot 1)$ |
| 2 | $5+2-3$ | $1000-200\cdot 2$ | $(5+2-3)\cdot(1000-200\cdot 2)$ |
| 3 | $5+3-3$ | $1000-200\cdot 3$ | $(5+3-3)\cdot(1000-200\cdot 3)$ |
| $x$ | $5+x-3$ | $1000-200x$ | $(5+x-3)\cdot(1000-200x)$ |

Kun hinnan korotuksia tehdään $x$ kappaletta, myyntivoitto on
$M(x) = (5 + x - 3)\cdot(1000 - 200x) = (2 + x)\cdot(1000 - 200x)$.

Derivoidaan myyntitulon lauseke $M$ sopivalla ohjelmalla.
$M'(x) = -400x + 600$

Määritetään derivaatan nollakohta sopivalla ohjelmalla yhtälöstä
$M'(x) = 0$.

Nollakohdaksi saadaan $x = 1{,}5$.

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan $M'$ arvot niissä. Laaditaan funktion $M$ kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.
$M'(0) = -400\cdot 0 + 600 = 600 > 0$
$M'(2) = -400\cdot 2 + 600 = -200 < 0$

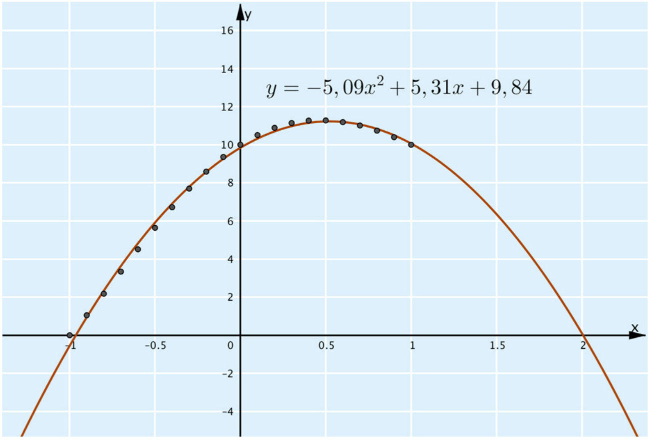
| | | 1,5 | |
|---|---|---|---|
| $M'(x)$ | + | | − |
| $M(x)$ | ↗ | | ↘ |
| | | max | |

Hinnan korotuksia tulee tehdä siis 1,5. Tuotteen hinnaksi kannattaa asettaa 5 € + 1,5 € = 6,50 €.

Voittoa saadaan tällöin $M(1{,}5) = (2 + 1{,}5)\cdot(1000 - 200\cdot 1{,}5) = 2450$ €.

Vastaus: 6,50 €, 2450 €

**475B.** Sovitetaan aineistoon toisen asteen polynomifunktio sopivalla ohjelmalla.




Määritetään ohjelman avulla funktion $f(x) = -5{,}09x^2 + 5{,}31x + 9{,}84$ derivaatan arvo kohdassa $x = 0$.

Arvoksi saadaan $f'(0) = 5{,}31$.

Vastaus: $f(x) = -5{,}09x^2 + 5{,}31x + 9{,}84$, $f'(0) = 5{,}31$

**476B.** Koska suorakulmaisen kolmion toisen kateetin päätepisteet ovat origo ja piste $(x, 0)$, on kateetin pituus $x$.
Koska toisen kateetin päätepisteet ovat piste $(x, 0)$ ja $(x, -x(x-5)$, on sen pituus yhtä suuri kuin $y$-koordinaatti $y = -x(x-5)$. Kolmion pinta-ala on

$$A(x) = \frac{x \cdot (-x(x-5))}{2} = \frac{-x^3 + 5x^2}{2} = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

Derivoidaan funktio $A$.

$$A'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat sopivalla ohjelmalla.

Nollakohdiksi saadaan $x = 0$ ja $x = \frac{10}{3}$

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan $A'$ arvot niissä. Laaditaan funktion $A$ kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.
$A'(-1) = -6{,}5 < 0$
$A'(1) = 3{,}5 > 0$
$A'(4) = -4 < 0$

| | | $0$ | | $\frac{10}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ |
| $A(x)$ | ↘ | | ↗ | | ↘ |
| | | min | | max | |

Kolmion pinta-ala on suurimmillaan, kun $x = \frac{10}{3}$. Pinta-ala on tällöin

$$A\left(\frac{10}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^3 + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{250}{27} = 9{,}259\ldots \approx 9{,}26.$$

Vastaus: $A(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2$, $\frac{250}{27} \approx 9{,}26$

**477B.** **a)** Funktio $f(x) = ax^2 - 4x + 8$ on toisen asteen polynomifunktio, joten sillä on pienin arvo vain silloin, kun $a > 0$. Pienin arvo saadaan derivaatan $f'(x)$ nollakohdassa. Funktion $f$ derivaatta on $f'(x) = 2ax - 4$. Ratkaistaan derivaatan nollakohta ohjelmalla yhtälöstä $f'(x) = 0$. Ratkaisuksi saadaan $x = \dfrac{2}{a}$.

Lasketaan ohjelmalla funktion $f$ pienin arvo.

$$f\left(\frac{2}{a}\right) = 8 - \frac{4}{a}$$

Pienin arvo on 0, kun $8 - \dfrac{4}{a} = 0$. Ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $a = \dfrac{1}{2}$.

Vastaus: $a = \dfrac{1}{2}$

**b)** Funktio $g(x) = bx^2 - 4x + 8$ on toisen asteen polynomifunktio, joten ehto voi toteutua vain, kun funktion $g$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli eli $b < 0$.
Funktion $g(x)$ nollakohdat on oltava $-2$ ja 1, joten saadaan yhtälöt
$g(-2) = 0$ eli $b \cdot (-2) - 4 \cdot (-2) + 8 = 0$
ja $g(1) = 0$ eli $b \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 8 = 0$.

Ratkaistaan ohjelmalla yhtälöstä $b \cdot (-2) - 4 \cdot (-2) + 8 = 0$ vakio $b$.
Ratkaisuksi saadaan $b = 4$. Vastaavasti yhtälöstä $b \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 8 = 0$ ratkaisuksi saadaan $b = -4$.
Koska $b$:n tulee olla negatiivinen, on ratkaisuna $b = -4$.

Vastaus: $b = -4$

**478B.** Koska funktiolla on paikallinen minimi −2 kohdassa $x = 0$, funktio saa arvon –2 kohdassa $x = 0$.

Sijoittamalla arvot funktion lausekkeeseen saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ -2 &= a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \\ d &= -2 \end{aligned}$$

Koska funktiolla on paikallinen maksimi 1 kohdassa $x = 2$, funktio saa arvon 1 kohdassa $x = 2$.

Sijoittamalla arvot funktion lausekkeeseen saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ 1 &= a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d \\ 8a + 4b + 2c + d &= 1 \end{aligned}$$

Seuraavat kaksi yhtälöä saadaan derivaatan avulla, koska paikallisissa ääriarvokohdissa derivaatan arvo on nolla.

Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ derivaatta on $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Sijoittamalla derivaatan nollakohta $x = 0$ derivaatan lausekkeeseen saadaan yhtälö $3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$. Yhtälön vasemman puolen sieventämisen jälkeen nähdään, että $c = 0$.

Sijoittamalla derivaatan nollakohta $x = 2$ derivaatan lausekkeeseen saadaan yhtälö $3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0$.

Sievennetään yhtälön vasemman puolen lauseke, jolloin yhtälö tulee muotoon $12a + 4b + c = 0$.

Saatiin neljän yhtälön yhtälöryhmä

$$\begin{cases} d = -2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä ohjelmalla, jolloin saadaan

$$\begin{cases} a = -\dfrac{3}{4} \\ b = \dfrac{9}{4} \\ c = 0 \\ d = -2 \end{cases}.$$

Vastaus: $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{9}{4}$, $c = 0$ ja $d = -2$

**479B.** Määritetään käyrien $y = x^2 + 4x + 5$ ja $y = -x^2 + 3$ leikkauspiste ratkaisemalla ohjelmalla yhtälöpari

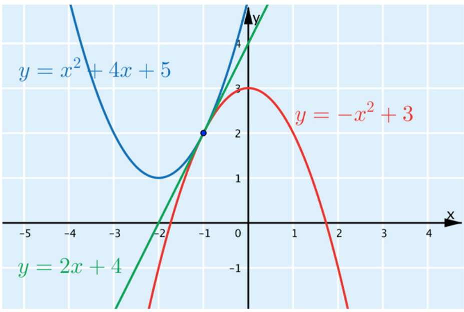
$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 5 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases}.$$

Ratkaisuksi saadaan $x = -1$ ja $y = 2$, joten käyrillä on vain yksi yhteinen piste $(-1, 2)$.

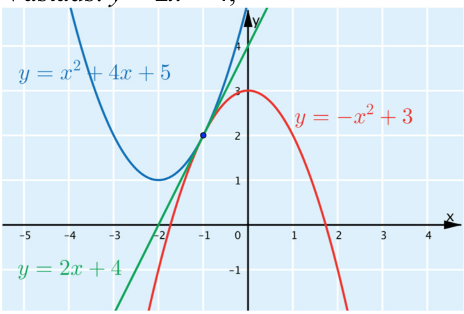
Tangentin kulmakerroin on funktion $f(x) = -x^2 + 3$ derivaatan $f'(x) = -2x$ arvo kohdassa $-1$ eli $f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$.

Tangentin yhtälö on muotoa $y = 2x + b$. Sijoitetaan pisteen $(-1, 2)$ koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi $b$.
Yhtälön $2 = 2 \cdot (-1) + b$ ratkaisuksi saadaan $b = 4$. Tangentin yhtälö on $y = 2x + 4$.

Piirretään ohjelmalla kuva.




Vastaus: $y = 2x + 4$,



## SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

**480B.** **a)** Sijoitetaan ajanhetki $t = 0$ funktioon $r(t) = -0{,}2t + 1$.

$r(0) = -0{,}2 \cdot 0 + 1 = 1$

Säteen suuruus alussa on 1 m.

Vastaus: 1 m

**b)** Säteen suuruutta kuvaavan suoran kulmakerroin on −0,2, joten säteen suuruus pienenee nopeudella 0,2 m/vrk.

Vastaus: pienenee nopeudella 0,2 m/vrk

**c)** Funktion hetkellinen muutosnopeus ajanhetkellä $t$ on yhtä suuri kuin derivaatan arvo kohdassa $t$ eli $r'(t) = -0{,}2$. Hetkellinen muutosnopeus hetkellä $t$ on −0,2 m/vrk.

Vastaus: −0,2 m/vrk

**d)** $r'(t) = -0{,}2$, joten $r'(1) = -0{,}2$

Vastaus: −0,2 m/vrk

**e)** Lumipallon tilavuus on $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(-0{,}2 \cdot 0 + 1)^3 = 4{,}188\ldots \approx 4{,}2$

Vastaus: 4,2 $m^3$

**f)** Lumipallon tilavuus ajanhetkellä $t$ on $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(-0,2t+1)^3$.

Lumipallon tilavuuden hetkellinen muutosnopeus ajanhetkellä $t$ on $V'(t)$.

Määritetään ohjelmalla derivaatta $V'(t)$ ja sen arvo ajanhetkellä $t = 1$.

V(t):=4/3*pi*(-0.2t+1)^3

$\rightarrow \; V(t) := \frac{4}{3}\pi\left(-\frac{1}{5}t+1\right)^3$

V'(t)

$\rightarrow \; \frac{1}{125}\left(-4t^2\pi + 40t\pi - 100\pi\right)$

V'(1)

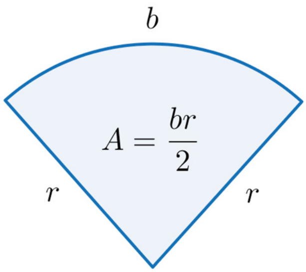
$\rightarrow \; -\frac{64}{125}\pi$

$3

$\approx \; -1.61$

Vastaus: $-1,61$ m$^3$/vrk

**481B.** Piirretään mallikuva.




Sektorin piirin pituus on $b + 2r$. Koska sektorin piiri on 1,00 m, saadaan yhtälö $b + 2r = 1$. Ratkaistaan yhtälöstä kaaren pituus $b$. Ratkaisuksi saadaan $b = 1 - 2r$.

Sektorin pinta-ala noudattaa funktiota

$$A(r) = \frac{br}{2} = \frac{(1-2r)r}{2} = \frac{1}{2}r - r^2.$$

Funktio $A$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termi on negatiivinen. Funktion $A$ kuvaaja on siis alaspäin aukeava paraabeli. Funktion $A$ saa suurimman arvonsa huipussa. Huippuun piirretty tangentti on vaakasuora. Vaakasuoran suoran kulmakerroin on 0. Määritetään siis derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio $A(r) = \frac{1}{2}r - r^2$.

$$A'(r) = \frac{1}{2} - 2r.$$

Määritetään derivaatan nollakohta yhtälöstä $A'(r) = 0$. Ratkaisuksi saadaan $r = 0{,}25$.

Pinta-ala on suurin, kun säde $r = 0{,}25$ m.

Vastaus: $r = 0{,}25$ m

**482A.** Funktion toinen derivaatta on $f''(x) = 6$, joten ensimmäinen derivaatta on oltava muotoa $f'(x) = 6x + a$, koska vakiotermi häviää derivoitaessa.

Koska $f'(1) = 8$, on

$$
\begin{aligned}
6 \cdot 1 + a &= 8 \\
a &= 2
\end{aligned}
$$

Derivaatta on siis $f'(x) = 6x + 2$.

Jotta polynomifunktion derivaatta olisi $6x + 2$, on funktion lausekkeen oltava muotoa $f(x) = 3x^2 + 2x + b$.

Koska $f(0) = 1$, on

$$
\begin{aligned}
3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + b &= 1 \\
b &= 1
\end{aligned}
$$

Funktio on siis $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

Vastaus: $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

**483A.** Määritetään funktion $f(x) = -4x^4 + 2x - 2$ suurin arvo. Jos funktion suurin arvo on negatiivinen, ovat kaikki arvot negatiivisia.

Derivoidaan funktio.
$f'(x) = -16x^3 + 2$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
-16x^3 + 2 &= 0 \\
-16x^3 &= -2 \qquad \| :(-16) \\
x^3 &= \frac{1}{8} \\
x &= \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Valitaan kohdat nollakohdan rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan $f'$ arvot niissä. Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.
$f'(0) = -16 \cdot 0^3 + 2 = 2 > 0$
$f'(1) = -16 \cdot 1^3 + 2 = -14 < 0$

| | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | − |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ |
| | max | |

Funktio $f$ saavuttaa suurimman arvonsa kohdassa $x = \frac{1}{2}$. Lasketaan funktion $f$ arvo kohdassa $x = \frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{4}$$

Funktion $f$ suurin arvo on negatiivinen, joten funktion $f$ kaikki arvot ovat negatiivisia.

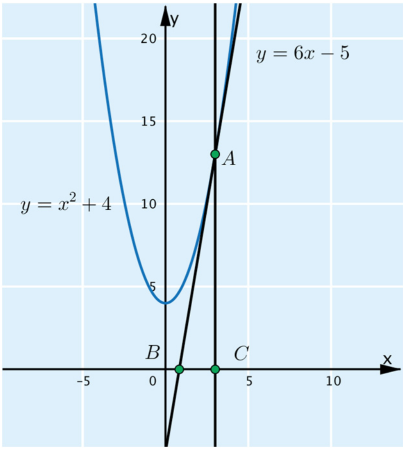
Vastaus: –

**484B.** Merkitään $f(x) = x^2 + 4$. Tangentin yhtälö on muotoa $y = kx + b$. Tangentin kulmakerroin on funktion $f$ derivaatan arvo kohdassa $x = 3$.
$f'(x) = 2x$
$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

Tangentin yhtälö on muotoa $y = 6x + b$. Sijoitetaan pisteen $A = (3, 13)$ koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi $b$.
$13 = 6 \cdot 3 + b$
$b = -5$

Tangentin yhtälö on $y = 6x - 5$.

Piirretään mallikuva.




Ratkaistaan tangentin ja $x$-akselin leikkauskohta yhtälöstä $6x - 5 = 0$.

$$\begin{aligned} 6x - 5 &= 0 \\ 6x &= 5 \qquad \| :6 \\ x &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Muodostuva kolmio $ABC$ on suorakulmainen, sen kanta $BC$ on $3 - \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$ ja korkeus $AC$ 13. Kolmion $ABC$ pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{6} \cdot 13 = \frac{169}{12}$.

Vastaus: $\frac{169}{12}$

**485B.** Polynomifunktio $f(x) = -x^3 + 13{,}5x^2 - 41x + 50$ saa suljetulla välillä $[0, 10]$ suurimman arvonsa välin päätepisteissä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

Funktion $f(x) = -x^3 + 13{,}5x^2 - 41x + 50$ derivaatta on $f'(x) = -3x^2 + 27x - 41$.

Ratkaistaan ohjelmalla derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$. Ratkaisuksi saadaan $x = 1{,}9341\ldots$ tai $x = 7{,}0658\ldots$, jotka molemmat kuuluvat tarkasteltavalle välille.

Lasketaan ohjelmalla funktion $f$ arvot derivaatan nollakohdissa ja välin päätepisteissä.

$f(0) = 50$
$f(1{,}9341\ldots) = 13{,}9669\ldots \approx 13{,}967$
$f(7{,}0658\ldots) = 81{,}5330\ldots \approx 81{,}533$
$f(10) = -10$

Funktion suurin arvo välillä $[0, 10]$ on $81{,}533$, kun $x \approx 7{,}066$.

Funktio kasvaa nopeimmin kohdassa, jossa derivaatan $f'(x) = -3x^2 + 27x - 41$ arvo on suurin.

Funktio $f'$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termi on negatiivinen. Funktion $f'$ kuvaaja on siis alaspäin aukeava paraabeli.

Funktio $f'$ saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa. Huippuun piirretty tangentti on vaakasuora. Vaakasuoran suoran kulmakerroin on 0.

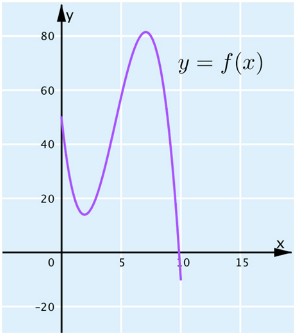
Määritetään siis funktion $f'$ derivaatan $f''$ nollakohta.

Funktion $f'(x) = -3x^2 + 27x - 41$ derivaatta on $f''(x) = -6x + 27$. Lasketaan ohjelmalla derivaatan derivaatan $f''$ nollakohdat yhtälöstä $f''(x) = 0$.

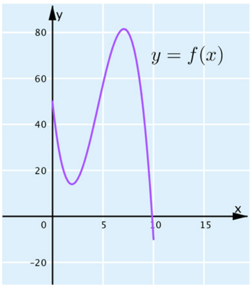
Ratkaisuksi saadaan $x = \dfrac{9}{2}$.

Funktion arvo kasvaa nopeimmin kohdassa $x = \dfrac{9}{2}$.

Piirretään funktion $f$ kuvaaja.




Vastaus: suurin arvo: 81,533, kun $x$ = 7,066, kasvaa nopeimmin, kun $x = \dfrac{9}{2}$.

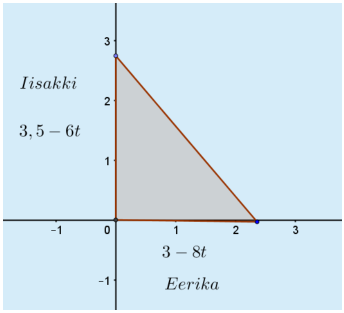


**486B.** Merkitään aikaa tunteina kirjaimella $t$. Eerikan ja Iisakin etäisyys saadaan Pythagoraan lauseella. Alkutilanteessa Eerika on 3,0 km:n päässä risteyksestä ja Iisak 3,5 km:n päässä risteyksestä.

Eerika etenee nopeudella 8 km/h, joten hänen etäisyytensä $t$ tunnin kulutta risteyksestä on $3{,}0 - 8t$.

Iisak etenee nopeudella 6,0 km/h, joten hänen etäisyytensä $t$ tunnin kuluttua risteyksestä on $3{,}5 - 6t$.

Piirretään mallikuva.




Muodostetaan etäisyyden lauseke Pythagoraan lauseella:
$e(t) = \sqrt{(3-8t)^2 + (3{,}5-6t)^2}$.

Etäisyys on pienimmillään, kun juurrettava $(3 - 8t)^2 + (3{,}5 - 6)^2$ on pienimmillään.

Sievennetään lauseke $(3 - 8t)^2 + (3{,}5 - 6)^2$ sopivalla ohjelmalla. Saadaan $100t^2 - 90t + 21{,}25$.

Lausekkeen $100t^2 - 90t + 21{,}25$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten se saavuttaa pienimmän arvonsa huipussaan.

Derivoidaan lauseke $100t^2 - 90t + 21{,}25$.
Derivaatta on $200t - 90$.

Lasketaan derivaatan nollakohta yhtälöstä $200t - 90 = 0$
Derivaatan nollakohta on $t = 0{,}45$.

Etäisyys on siis pienimmillään, kun aikaa on kulunut 0,45 h = 27 min.
Etäisyys on tällöin $e(0{,}45) = \sqrt{(3-8\cdot 0{,}45)^2 + (3{,}5-6\cdot 0{,}45)^2} = 1$.

Vastaus: 27 minuutin kuluttua, 1 km

**487A.** Derivoidaan funktio $f(x) = x^5 + 10x^2 - 3x$ kaksi kertaa.

$f'(x) = 5x^4 + 20x - 3$
$f''(x) = 20x^3 + 20$

Ratkaistaan yhtälö $20x^3 + 20 = 0$.

$$\begin{aligned} 20x^3 + 20 &= 0 \\ 20x^3 &= -20 \\ x^3 &= -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Valitaan pisteet kohdan $x = -1$ molemmilta puolilta ja lasketaan funktion $f''$ arvot niissä.

$f''(-2) = 20 \cdot (-2)^3 + 20 = -140 < 0$
$f''(0) = 20 \cdot 0^3 + 20 = 20 > 0$

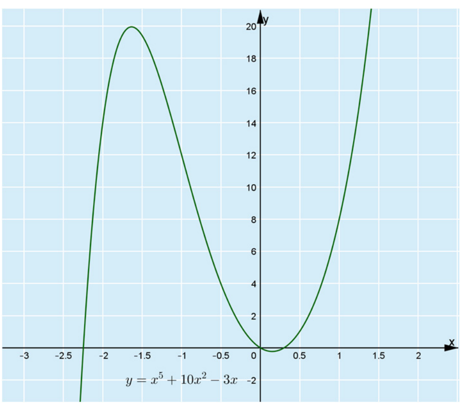
Funktion $f''$ arvot ovat eri merkkiset nollakohdan eri puolilla, joten kohta $x = -1$ on käännekohta.

Lasketaan pisteen $y$-koordinaatti.

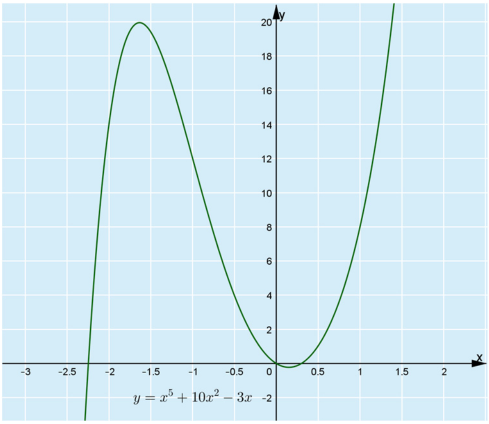
$y = (-1)^5 + 10 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 12$

Käännepiste on piste $(-1, 12)$.

Piirretään kuvaaja.



Vastaus: $(-1, 12)$

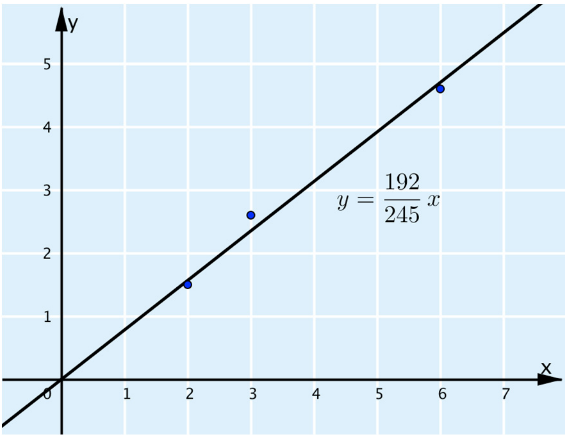


**488B.** Sievennetään ohjelmalla funktion $f$ lauseke.
$f(k) = (2k - 1{,}5)^2 + (3k - 2{,}6)^2 + (6k - 4{,}6)^2 = 49k^2 - 76{,}8k + 30{,}17$

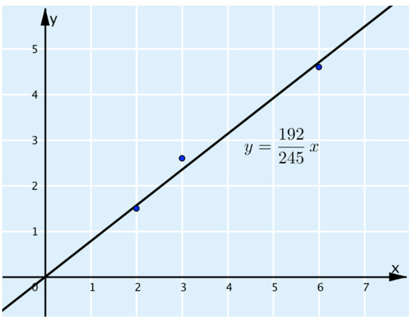
Funktio $f$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termi on positiivinen. Funktion $f$ kuvaaja on siis ylöspäin aukeava paraabeli. Funktion $f$ saa pienimmän arvonsa huipussa. Huippuun piirretty tangentti on vaakasuora. Vaakasuoran suoran kulmakerroin on 0. Määritetään siis derivaatan nollakohta.

Funktion $f(k) = 49k^2 - 76{,}8k + 30{,}17$ derivaatta on $f'(k) = 98k - 76{,}8$.
Lasketaan ohjelmalla derivaatan nollakohta yhtälöstä $f'(k) = 0$.
Ratkaisuksi saadaan $k = \dfrac{192}{245}$.

Piirretään kuvio.

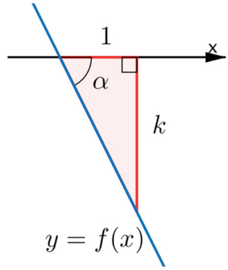



Vastaus: $k = \dfrac{192}{245}$,



**489B.** Käyrä $y = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$ leikkaa $x$-akselin, kun $y = 0$. Määritetään ohjelmalla $x$-akselin leikkauskohdat yhtälöstä $(x + 1)(x + 3)(x - 4) = 0$. Ratkaisuksi saadaan $x = -3$, $x = -1$ tai $x = 4$. Keskimmäinen $x$-akselin leikkauskohta on $x = -1$.

Suoran ja $x$-akselin välisen leikkauspisteen teräväkulma $\alpha$ saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \dfrac{k}{1}$, jossa $k$ on suoran kulmakerroin.




Määritetään keskimmäiseen $x$-akselin leikkauspisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin.

Merkitään $f(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$.
Sievennetään ohjelmalla funktion $f$ lauseke.

$$f(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 4) = x^3 - 13x - 12$$

Derivoidaan funktion $f$.
$f'(x) = 3x^2 - 13$

Lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x = -1$.
$f(-1) = 3 \cdot 1^2 - 13 = -10$

Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = -1$ on $-10$.

Ratkaistaan kysytty kulma tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{-10}{1}$$
$$\alpha = -84{,}289...^\circ$$
$$\alpha \approx -84{,}3^\circ$$

Vastaus: $-84{,}3°$

**490B.** **a)** Käyrälle $y = -x^3 + x^2 + 3x$ piirretty tangentin kulmakerroin on lausekkeen $-x^3 + x^2 + 3x$ derivaatta. Merkitään $f(x) = -x^3 + x^2 + 3x$.

Derivoidaan funktio $f$.

$f'(x) = -3x^2 + 2x + 3$

Käyrän $y = -x^3 + x^2 + 3x$ tangentin kulmakerroin on suurin kohdassa, jossa derivaatan $f'(x) = -3x^2 + 2x + 3$ arvo on suurin.

Funktio $f'$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termi on negatiivinen. Funktion $f'$ kuvaaja on siis alaspäin aukeava paraabeli. Funktio $f'$ saa suurimman arvonsa huipussa. Huippuun piirretty tangentti on vaakasuora. Vaakasuoran suoran kulmakerroin on 0. Määritetään siis derivaatan nollakohta.

Funktion $f'(x) = -3x^2 + 2x + 3$ derivaatta on $f''(x) = -6x + 2$. Lasketaan ohjelmalla derivaatan derivaatan nollakohdat yhtälöstä

$f''(x) = 0$. Ratkaisuksi saadaan $x = \frac{1}{3}$.

Funktion $f$ arvo kohdassa $x = \frac{1}{3}$ on $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{29}{27}$, joten tangentin

kulmakerroin on suurin pisteessä $\left(\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right)$.

Vastaus: $\left(\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right)$

**b)** Tangentin kulmakerroin kohdassa $x=\frac{1}{3}$ on $f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3}$.

Tangentin yhtälö on muotoa $y=\frac{10}{3}x+b$. Sijoitetaan pisteen $\left(\frac{1}{3},\frac{29}{27}\right)$ koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä ohjelmalla vakiotermi *b*.

$$\frac{29}{27}=\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{3}+b$$
$$b=-\frac{1}{27}$$

Tangentin yhtälö on $y=\frac{10}{3}x-\frac{1}{27}$.

Vastaus: $y=\frac{10}{3}x-\frac{1}{27}$

**491B.** Funktion $p(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$ derivaatta on

$$p'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2.$$

Funktion $p(x)$ derivaatta kohdassa $x = 0{,}5$ on $p'(0{,}5) = 0{,}421\ldots$

Funktion $f$ derivaatta kohdassa $x = 0{,}5$ on

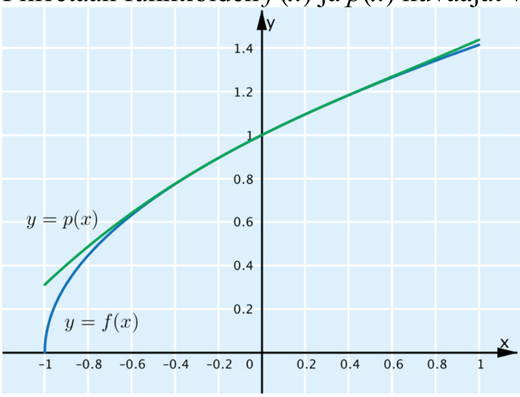
$$f'(0{,}5) = \frac{1}{2\sqrt{1+0{,}5}} = 0{,}408...$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia polynomifunktion $p$ derivaatan arvo on funktion $f$ derivaatan arvosta kohdassa $x = 0{,}5$.

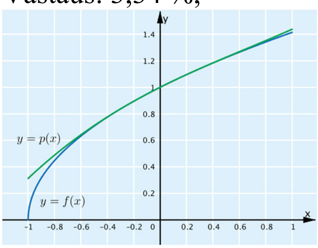
$$\frac{0{,}421...}{0{,}408...} = 1{,}03337... = 103{,}337...\ \%$$

Polynomifunktion $p$ derivaatan arvo kohdassa $x = 0{,}5$ poikkeaa funktion $f$ derivaatasta $103{,}337\ldots\ \% - 100\ \% = 3{,}337\ldots\ \% \approx 3{,}34\ \%$.

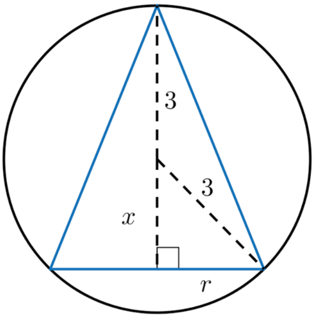
Piirretään funktioiden $f(x)$ ja $p(x)$ kuvaajat välillä $[-1, 1]$.




Vastaus: 3,34 %,



**492B.** Piirretään leikkauskuva pallosta ja kartiosta. Merkitään kuvaan kartion pohjan etäisyyttä pallon keskipisteestä kirjaimella $x$ ja kartion pohjan sädettä kirjaimella $r$.




Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$ kun $r$ on pohjan säde ja $h$ korkeus.

Muokataan tilavuuden lauseke sellaiseen muotoon, että siinä on vain yksi muuttuja. Tällöin kartion suurin tilavuus voidaan määrittää derivaatan avulla.

Kartion korkeus on $h = x + 3$.

Kartion pohjan säde $r$, kartion pohjan etäisyys pallon keskipisteestä $x$ ja pallon säde 3 muodostavat suorakulmaisen kolmion. Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä tilavuuden lausekkeessa esiintyvä $r^2$.

$$r^2 + x^2 = 3^2$$
$$r^2 = 9 - x^2$$

Sijoitetaan $h = x + 3$ ja $r^2 = 9 - x^2$ tilavuuden yhtälöön $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(9 - x^2\right)\cdot(x+3) = \frac{1}{3}\pi\left(-x^3 - 3x^2 + 9x + 27\right)$$

Kartion tilavuus noudattaa funktiota
$V(x) = \frac{1}{3}\pi\left(-x^3 - 3x^2 + 9x + 27\right)$.

Kartion korkeus ei voi olla negatiivinen, joten $x + 3 \geq 0$ eli $x \geq -3$.

Kartion korkeus ei voi olla suurempi kuin pallon halkaisija, joten $x + 3 \leq 6$ eli $x \leq 3$. Koska funktio $V$ on polynomifunktio, se saa suurimman arvonsa joko suljetulla välillä $[-3, 3]$ olevassa derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $V$ derivaatta on $V'(x) = \pi\left(-x^2 - 2x + 3\right)$. Määritetään derivaatan nollakohdat ohjelmalla yhtälöstä $V'(x) = 0$. Yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = -3$ tai $x = 1$.

Lasketaan funktion $V$ arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$$V(-3) = 0$$
$$V(1) = \frac{32}{3}\pi = 33{,}510... \approx 33{,}51$$
$$V(3) = 0$$

Kartion suurin tilavuus on $\frac{32}{3}\pi \approx 33{,}51$.

Vastaus: $\frac{32}{3}\pi \approx 33{,}51$