3 FUNKTIOITA

ALOITA PERUSTEISTA

102A. Suoran yhtälössä $y = kx + b$ kulmakerroin on k ja vakiotermi b. Kulmakerroin k ilmoittaa, kuinka monta yksikköä liikutaan y-akselin suunnassa, kun kuljetaan yksi yksikkö oikealle. Vakiotermi b on kuvaajan ja y -akselin leikkauspisteen y-koordinaatti.

Suora 1:
Kulmakerroin $k = 2$ ja vakiotermi $b = 0$, joten suoran yhtälö on $y = 2x + 0$ eli $y = 2x$.

Suora 2:
Kulmakerroin $k = -1$ ja vakiotermi $b = 1$, joten suoran yhtälö on $y = -1 \cdot x + 1 = -x + 1$.

Suora 3:
Kulmakerroin $k = 0$ ja vakiotermi $b = -\frac{1}{2}$, joten suoran yhtälö on

$y = 0x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Vastaus: Suora 1: $y = 2x$, Suora 2: $y = -x + 1$, Suora 3: $y = -\frac{1}{2}$

103A. **a)** Kulmakerroin on $k=\frac{3-5}{8-7}=\frac{-2}{1}=-2$.

Vastaus: $k=-2$

b) Suoran yhtälö on a-kohdan perusteella muotoa $y=-2x+b$. Sijoitetaan yhtälöön pisteen (7, 5) koordinaatit $x=7$ ja $y=5$ ja ratkaistaan vakiotermi b.

$$5=-2\cdot 7+b$$
$$5=-14+b$$
$$b=19$$

Vastaus: $b=19$

c) Kohdan a perusteella suoran kulmakerroin on −2 ja kohdan b perusteella suoran vakiotermi on 19. Suoran yhtälö on siis $y=-2x+19$.

Vastaus: $y=-2x+19$

104A. **a)** Suoran kulmakerroin on $k=\frac{5-3}{2-1}=\frac{2}{1}=2.$

Suoran yhtälö on muotoa $y = 2x + b$. Sijoitetaan suoran yhtälöön pisteen (1, 3) koordinaatit ja ratkaistaan vakiotermi b.

$$3=2\cdot 1+b$$
$$b=1$$

Suoran yhtälö on $y = 2x + 1$.

Vastaus: $y = 2x + 1$

b) Origo on piste (0, 0).
Suoran kulmakerroin on $k=\frac{5-0}{-3-0}=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}.$

Suoran yhtälö on muotoa $y=-\frac{5}{3}x+b.$ Koska suora kulkee origon kautta, sen vakiotermi on 0.

Suoran yhtälö on siis $y=-\frac{5}{3}x.$

Vastaus: $y=-\frac{5}{3}x$

c) Suoran kulmakerroin on $k=\frac{-24-(-24)}{-11-(-4)}=\frac{0}{-7}=0.$

Suoran yhtälö on muotoa $y = 0x + b = b$.

Sijoittamalla pisteen $(-4, -24)$ y-koordinaatti yhtälöön $y = b$ saadaan suoran yhtälöksi $y = -24$.

Vastaus: $y = -24$

105A. **a)** Suora leikkaa x-akselin, kun $y = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suoran ja x-akselin leikkauspisteen x-koordinaatti.

$$\begin{aligned} 3x - 6 \cdot 0 &= 12 \\ 3x &= 12 \qquad \| :3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä (4, 0).

Vastaus: (4, 0)

b) Suora leikkaa y-akselin, kun $x = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suoran ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 0 - 6 \cdot y &= 12 \\ -6y &= 12 \qquad \| :(-6) \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä (0, −2).

Vastaus: (0, −2)

c) TAPA 1:

Suoran kulmakerroin saadaan selville, kun ratkaistaan yhtälöstä *y*.

$$
\begin{aligned}
3x - 6y &= 12 \\
-6y &= -3x + 12 \qquad \| : (-6) \\
y &= \frac{-3}{-6}x + \frac{12}{-6} \\
y &= \frac{1}{2}x - 2
\end{aligned}
$$

Suoran kulmakerroin on $k = \frac{1}{2}$.

TAPA 2:

Kohtien a ja b perusteella suora kulkee pisteiden (4, 0) ja (0, −2) kautta, joten suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{-2-0}{0-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Vastaus: $k = \frac{1}{2}$

106A. **a)** Funktio on muotoa $f(x) = a \cdot q^x$.

Sijoitetaan tiedon $f(0) = 2$ perusteella yhtälöön $y = a \cdot q^x$ luvut $x = 0$ ja $y = 2$, jolloin saadaan $a \cdot q^0 = 2$. Koska $q^0 = 1$, niin tämän yhtälön ratkaisu on $a = 2$.

Vastaavasti tiedosta $f(3) = 54$ saadaan yhtälö $a \cdot q^3 = 54$.
Koska $a = 2$, yhtälö tulee muotoon $2q^3 = 54$. Ratkaistaan yhtälö.

$$
\begin{aligned}
2q^3 &= 54 \qquad \| :2 \\
q^3 &= 27 \\
q &= \sqrt[3]{27} \\
q &= 3
\end{aligned}
$$

Funktio on siis $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

Vastaus: $f(x) = 2 \cdot 3^x$

b) Funktio on muotoa $f(x) = a \cdot q^x$.
Koska funktion kuvaaja kulkee pisteen (0, 3) kautta, funktiolle pätee $f(0) = 3$. Tästä saadaan yhtälö $a \cdot q^0 = 3$. Koska $q^0 = 1$, niin yhtälön ratkaisu on $a = 3$.

Koska funktion kuvaaja kulkee pisteen (5, 96) kautta, funktiolle pätee $f(5) = 96$. Tästä saadaan yhtälö $a \cdot q^5 = 96$.
Sijoittamalla $a = 3$ yhtälö saadaan muotoon $3q^5 = 96$. Ratkaistaan q.

$$
\begin{aligned}
3q^5 &= 96 \qquad \| :3 \\
q^5 &= 32 \\
q &= \sqrt[5]{32} \\
q &= 2
\end{aligned}
$$

Funktio on siis $f(x) = 3 \cdot 2^x$.

Vastaus: $f(x) = 3 \cdot 2^x$

107B. **a)** Koska $f(0) = 5 + 10 \cdot 0 = 5$, niin sademittarissa oli keskiyöllä 5 mm vettä.

Vastaus: 5 mm

b) Koska $f(7) = 5 + 10 \cdot 7 = 75$, niin mittarissa oli 75 mm vettä kello 7. Veden syvyys kasvoi siis seitsemässä tunnissa
75 mm − 5 mm = 70 mm.

Vastaus: 70 mm

c) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä hetki, jona veden syvyys oli 40 mm.

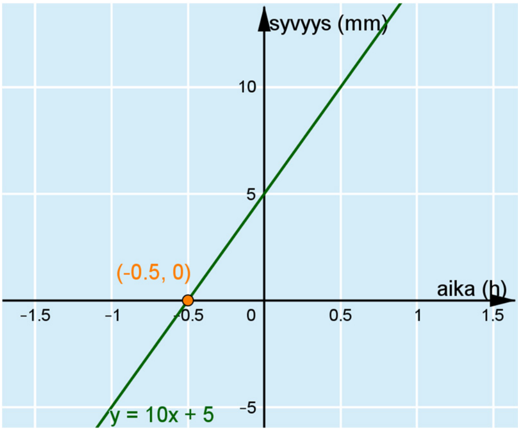
$$\begin{aligned} 5+10x &= 40 \\ 10x &= 35 \qquad \| :10 \\ x &= 3,5 \end{aligned}$$

Veden syvyys oli 40 mm, kun aikaa oli kulunut keskiyöstä 3 ja puoli tuntia. Kello oli tällöin 3.30.

Vastaus: kello 3.30

d) Vastaus: Luku 5 ilmoittaa veden syvyyden alkuhetkellä millimetreinä, ja luku 10 ilmoittaa, kuinka monta millimetriä veden syvyys kasvoi tunnissa.

e) Piirretään funktion kuvaaja ja määritetään kuvaajan ja x-akselin leikkauspiste.



Kuvaajan ja x-akselin leikkauspiste on (−0,5; 0), joten funktion f nollakohta on $x = -0{,}5$. Tämä tarkoittaa, että puoli tuntia ennen keskiyötä, veden syvyys oli 0 mm, eli sade alkoi klo 23.30 edellisen vuorokauden puolella.

Vastaus: $x = -0{,}5$. Sade alkoi klo 23.30 edellisen vuorokauden puolella.

108A. **A:** Jos suureen y arvo 20-kertaistuu aina, kun muuttujan arvo kasvaa yhdellä, kasvu on eksponentiaalista. Tätä vastaava yhtälö on $y = a \cdot 20^x$. Vaihtoehto IV on siis oikein.

B: Jos suureen y arvo kasvaa 20 %, se tulee 1,2-kertaiseksi alkuperäiseen nähden. Koska tämä tapahtuu aina, kun muuttujan x arvo kasvaa yhdellä, kasvu on eksponentiaalista. Kasvua vastaava yhtälö on $y = a \cdot 1{,}20^x$, joten vaihtoehto II on oikein.

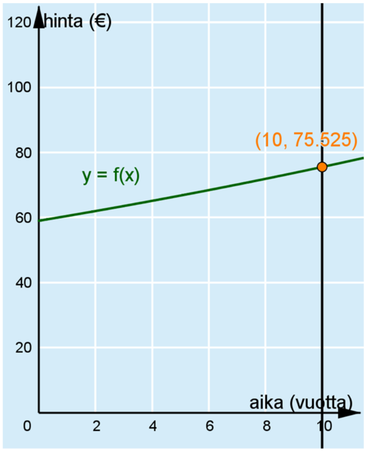
C: Jos suureen y arvo kasvaa 20:llä, kun muuttujan arvo kasvaa yhdellä, kasvu on lineaarista. Kasvua vastaava yhtälö on $y = a + 20x$, joten vaihtoehto III on oikein.

D: Jos suureen y arvo kasvaa 1,20:llä, kun muuttujan arvo kasvaa yhdellä, kasvu on lineaarista. Kasvua vastaava yhtälö on $y = a + 1{,}20x$, joten vaihtoehto I on oikein.

Vastaus: A: IV, B: II, C: III ja D: I

109B. Koska 100 % + 2,5 % = 102,5 %, niin jokaisessa hinnan korotuksessa hinta tulee 1,025-kertaiseksi. Hinnan muutos on siis eksponentiaalista. Tällöin funktio $f(x) = 59 \cdot 1{,}025^x$ ilmoittaa hiusten leikkauksen hinnan x vuoden kuluttua nykyhetkestä.

Lasketaan $f(10)$.
$f(10) = 59 \cdot 1{,}025^{10} = 75{,}524\ldots \approx 75$.
Tarkistetaan tulos määrittämällä funktion f kuvaajan ja suoran $x = 10$ leikkauspiste.

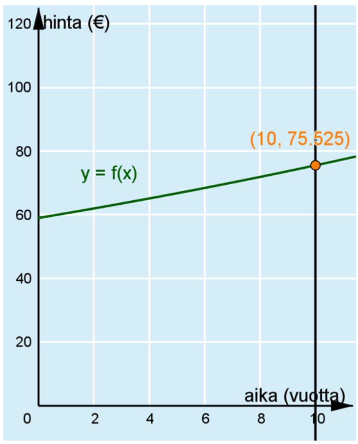


Leikkauspiste on (10; 75,525), joten $f(10) \approx 75$.

Tulos tarkoittaa, että naisten hiusten leikkaus maksaa 10 vuoden kuluttua noin 75 euroa.

Vastaus: $f(x) = 59 \cdot 1{,}025^x$, $f(10) \approx 75$. Tulos tarkoittaa, että naisten hiusten leikkaus maksaa 10 vuoden kuluttua noin 75 euroa.

Tulos tarkoittaa, että naisten hiusten leikkaus maksaa 10 vuoden kuluttua noin 75 euroa.



110A. Vaiheessa 1 Eppu laski suoran kulmakertoimen $k=\frac{7}{3}$ oikein.

Vaiheessa 2 Eppu sijoitti kulmakertoimen ja suoran pisteen (1, 4) koordinaatit $x = 1$ ja $y = 4$ suoran yhtälöön $y = kx + b$. Koordinaatit menivät kuitenkin väärin päin. Oikea yhtälö on tässä:

$$4=\frac{7}{3}\cdot 1+b$$

Vaiheessa 3 Eppu ratkaisi äsken muodostamastaan yhtälöstä vakiotermin b. Koska yhtälö oli väärä, hän sai tulokseksi väärän vakiotermin. Ratkaistaan oikea vakiotermi oikeasta yhtälöstä.

$$\begin{aligned}4&=\frac{7}{3}+b\\ b&=4-\frac{7}{3}\\ b&=\frac{12}{3}-\frac{7}{3}\\ b&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

Vaiheessa 4 Eppu muodosti suoran yhtälön sijoittamalla kulmakertoimen ja vakiotermin yhtälöön $y = kx + b$. Hän sijoitti kuitenkin luvut väärinpäin, joten kulmakertoimeksi k tuli vakiotermin b arvo ja vakiotermiksi b kulmakertoimen k arvo.

Oikea suoran yhtälö on $y=\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}$.

Vastaus: –

111A. Vaiheessa 1 Kim muodosti pisteiden koordinaattien avulla kaksi yhtälöä.

Ensimmäisen yhtälön Kim sai, kun hän sijoitti pisteen (1, 3) koordinaatit $x = 1$ ja $y = 3$ yhtälöön $y = a \cdot q^x$:
$3 = a \cdot q^1$
$a \cdot q = 3$.

Toisen yhtälön Kim sai pisteen (3; 6,75) koordinaattien avulla.
$6{,}75 = a \cdot q^3$ eli $a \cdot q^3 = 6{,}75$.

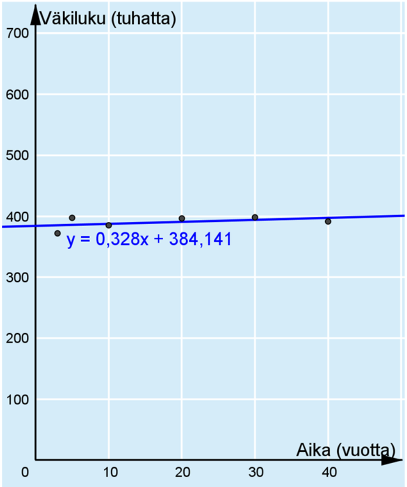
Vaiheessa 2 Kim ratkaisi yhtälöryhmän $\begin{cases} a \cdot q = 3 \\ a \cdot q^3 = 6{,}75 \end{cases}$ ohjelmalla yhtälöparin ratkaisutoiminnolla.

Hän sai yhtälöparin ratkaisuksi $a = 2$ ja $q = 1{,}5$.

Funktion lauseke on siis $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$.

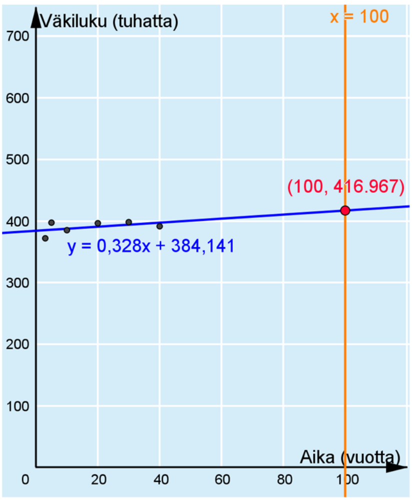
Vastaus: –

112B. Merkitään kulunutta aikaa vuosina vuodesta 2000 alkaen kirjaimella x. Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli sopivalla ohjelmalla.



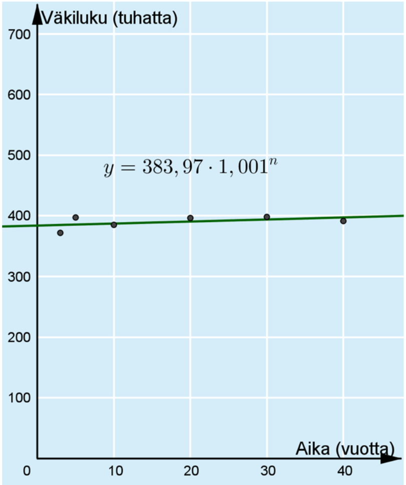
Lineaarinen malli on $y = 0{,}328x + 384{,}141$.

Vuonna 2100 on kulunut 100 vuotta vuodesta 2000.
Määritetään väkiluku vuonna 2100 suorien $y = 0{,}328x + 384{,}141$ ja $x = 100$ leikkauspisteen avulla.



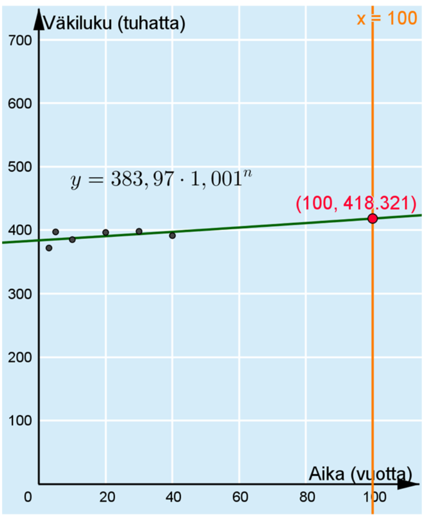
Suorien leikkauspiste on (100; 416,967), joten lineaarisen mallin mukaan väkiluku vuonna 2100 on 416 967 ≈ 417 000.

Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli sopivalla ohjelmalla.



Eksponentiaalinen malli on $y = 383{,}97 \cdot 1{,}001^n$.

Määritetään väkiluku vuonna 2100 funktion $f(x) = 383{,}97 \cdot 1{,}001^n$ ja suoran $x = 100$ leikkauspisteen avulla.



Leikkauspiste on (100; 418,321), joten eksponentiaalisen mallin mukaan väkiluku on 418 321 ≈ 418 000 vuonna 2100.

Eksponentiaalisen mallin antama ennuste on suurempi kuin lineaarisen mallin antama ennuste. Lasketaan ero prosentteina.

$$\frac{418\,321}{416\,967} = 1{,}00324...$$

Eksponentiaalisen mallin antama ennuste on
100,324… % − 100 % = 0,324… % ≈ 0,32 % suurempi kuin eksponentiaalisen mallin antama ennuste.

Vastaus: lineaarinen malli $y = 0{,}328x + 384{,}141$; eksponentiaalinen malli $y = 383{,}97 \cdot 1{,}001^n$; 417 000 asukasta ja 418 000 asukasta; 0,32 %

113B. a) Lasketaan funktion N arvo, kun $x = 0$.

$$N(0) = 200 \cdot 1{,}14^0 = 200$$

Latauksia on tehty julkaisuhetkeen mennessä 200.

Vastaus: 200 latausta

b) Funktion muutoskerroin on $q = 1{,}14$, joten latauksien määrä tulee joka viikko 1,14-kertaiseksi. Latauksien määrä siis kasvaa joka viikko 114 % − 100 % = 14 %.

Vastaus: 14 %

c) Ratkaistaan yhtälö $200 \cdot 1{,}14^x = 2000$ ohjelmalla.

200*1.14^x=2000,x=1

RatkaiseNumeerisesti: $\{\mathbf{x = 17.57319413923}\}$

Ratkaisuksi saadaan $x = 17{,}573\ldots$, joten sovellus on ladattu 2000 kertaa, kun aikaa on kulunut 17,573… viikkoa. Tämä on 17 viikkoa ja $7 \cdot 0{,}573\ldots$ päivää ≈ 7 viikkoa ja 4 päivää.

Vastaus: 7 viikkoa ja 4 vuorokautta julkaisuhetkestä

d) Viidestoista viikko alkaa ajanhetkellä $x = 14$ ja päättyy ajanhetkellä $x = 15$. Lasketaan funktion arvot kohdissa $x = 14$ ja $x = 15$.

$N(14) = 200 \cdot 1{,}14^{14} = 1252{,}269\ldots$
$N(15) = 200 \cdot 1{,}14^{15} = 1427{,}587\ldots$

Sovelluksen latauksien määrä 15. viikolla on $1427{,}587\ldots - 1252{,}269\ldots = 175{,}317\ldots \approx 180$.

Sovellus ladataan 15. viikolla noin 180 kertaa.

Vastaus: 180 kertaa

VAHVISTA OSAAMISTA

114A. Pisteiden (2, 5) ja (−3, 8) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on
$k=\frac{8-5}{-3-2}=-\frac{3}{5}$.

TAPA 1:
Pisteiden (2, 5) ja (−4; 8,5) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k=\frac{8{,}5-5}{-4-2}=\frac{3{,}5}{-6}=\frac{7}{2}:(-6)=\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{7}{12}$$

Kulmakertoimet eivät ole samat, joten kyseessä ei ole sama suora.
Pisteiden (2, 5) ja (−3, 8) kautta kulkeva suora ei siis kulje pisteen (−4; 8,5) kautta.

TAPA 2:
Muodostetaan pisteiden (2, 5) ja (−3, 8) kautta kulkevan suoran yhtälö. Sijoitetaan suoran yhtälöön $y = kx + b$ kulmakerroin $k=-\frac{3}{5}$ ja pisteen (2, 5) koordinaatit $x = 2$ ja $y = 5$. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä vakiotermi b.

$$5=-\frac{3}{5}\cdot 2+b$$
$$5=-\frac{6}{5}+b$$
$$b=5+\frac{6}{5}$$
$$b=6\frac{1}{5}$$

Pisteiden (2, 5) ja (−3, 8) kautta kulkevan suoran yhtälö on siis
$y=-\frac{3}{5}x+6\frac{1}{5}$.

Tutkitaan, onko piste $(-4;8,5)=\left(-4,\frac{17}{2}\right)$ tällä suoralla sijoittamalla sen x-koordinaatti suoran yhtälöön ja laskemalla y-koordinaatti.

$$y=-\frac{3}{5}\cdot(-4)+6\frac{1}{5}=\frac{12}{5}+6\frac{1}{5}=2\frac{2}{5}+6\frac{1}{5}=8\frac{3}{5}=8,6$$

Koska $8,6 \neq 8,5$, piste (−4; 8,5) ei ole suoralla.

Vastaus: ei kulje

115A. a) Suoralla ei ole kulmakerrointa, joten se on y-akselin suuntainen, ja sen yhtälö on muotoa $x = a$.

Suora kulkee pisteen $(3, -1)$ kautta, joten sen jokaisen pisteen x-koordinaatti on 3. Tällöin suoran yhtälö on $x = 3$.

Vastaus: $x = 3$

b) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat yhtä suuret. Ratkaistaan suoran $2x + 3y = 5$ kulmakerroin.

$$\begin{aligned} 2x+3y&=5 \\ 3y&=-2x+5 \qquad \| :3 \\ y&=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Suoran kulmakerroin on $k=-\frac{2}{3}$.

Suoran yhtälö on muotoa $y=-\frac{2}{3}x+b$. Sijoitetaan suoran yhtälöön pisteen $(3, -1)$ koordinaatit ja ratkaistaan vakiotermi b.

$$\begin{aligned} -1&=-\frac{2}{3}\cdot 3+b \\ -1&=-2+b \\ b&=1 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y=-\frac{2}{3}x+1$.

Vastaus: $y=-\frac{2}{3}x+1$

116B. **a)** Lasketaan populaation koko 24 tunnin kuluttua sijoittamalla $t = 24$ funktion $N(t) = 1000 \cdot 1{,}25^t$ lausekkeeseen.

$N(24) = 1000 \cdot 1{,}25^{24} = 211\ 758{,}236\ldots \approx 212\ 000$

Populaation koko 24 tunnin kuluttua on noin 212 000 bakteeria.

Vastaus: 212 000 bakteeria

b) Funktion lausekkeen muutoskerroin on 1,25. Tämä tarkoittaa, että populaation koko kasvaa jokaisen tunnin aikana
125 % − 100 % = 25 %.

Vastaus: 25 %

c) Ratkaistaan yhtälö $N(t) = 1\ 000\ 000$. Sopivalla ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $t = 30{,}956\ldots \approx 31$.

Kestää noin 31 tuntia siihen, että populaation koko ylittää miljoona bakteeria.

Vastaus: 31 tuntia

117A. Ratkaistaan yhtälö $f(x) = g(x)$, kun $f(x) = 4x^2 + 2x$ ja $g(x) = 6x + 8$.

$$\begin{aligned} 4x^2 + 2x &= 6x + 8 \\ 4x^2 - 4x - 8 &= 0 \qquad \| :4 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat
$a = 1$, $b = -1$ ja $c = -2$. Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{1+3}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-3}{2}$$

$$x = 2 \qquad\qquad x = -1$$

Yhtälön ratkaisu tarkoittaa, että funktioiden f ja g kuvaajat leikkaavat toisensa kohdissa, joiden x-koordinaatit ovat $x = 2$ ja $x = -1$.

Vastaus: $x = 2$ tai $x = -1$, Funktioiden f ja g kuvaajat leikkaavat toisensa kohdissa, joiden x-koordinaatit ovat $x = 2$ ja $x = -1$.

118B. TAPA 1:

Ratkaistaan suorien $y = 2x - 3$ ja $y = 3x - 2$ leikkauspiste yhtälöparista

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3x - 2 \end{cases}.$$

Sijoitetaan $y = 2x - 3$ yhtälöön $y = 3x - 2$.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 3x - 2 \\ -x &= 1 \qquad \| :(-1) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan leikkauspisteen x-koordinaatti yhtälöön $y = 3x - 2$.

$y = 3 \cdot (-1) - 2 = -5$

Yhtälöparin ratkaisu on $x = -1$, $y = -5$, joten suorien leikkauspiste on $P = (-1, -5)$.

Suora s kulkee siis pisteiden (7, 7) ja (−1, −5) kautta.

Suoran kulmakerroin on $k = \dfrac{-5-7}{-1-7} = \dfrac{-12}{-8} = \dfrac{3}{2}$.

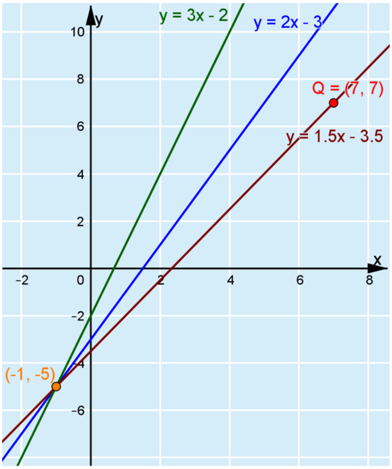
Suoran yhtälö on muotoa $y = \dfrac{3}{2}x + b$.

Sijoitetaan suoran yhtälöön pisteen (7, 7) koordinaatit ja ratkaistaan vakiotermi b.

$$\begin{aligned} 7 &= \frac{3}{2} \cdot 7 + b \\ 7 &= \frac{21}{2} + b \\ b &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{2}$.

Piirretään kuvio.



TAPA 2:

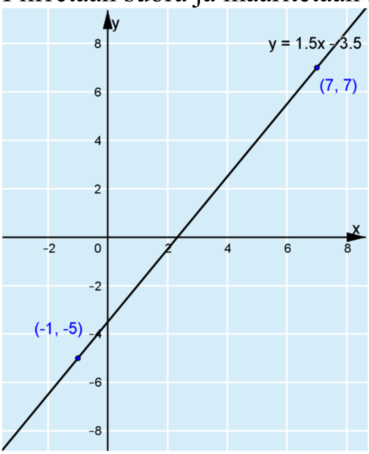
Ratkaistaan suorien $y = 2x - 3$ ja $y = 3x - 2$ leikkauspiste yhtälöparista

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3x - 2 \end{cases}.$$

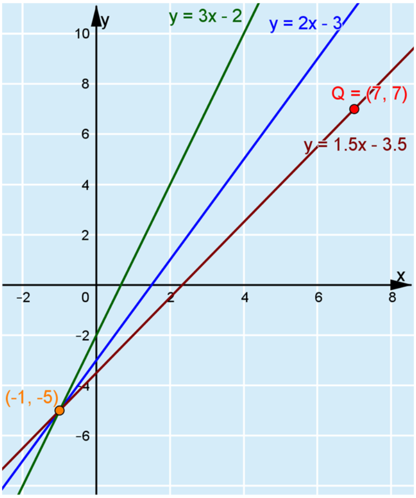
Sopivan ohjelman avulla ratkaisuksi saadaan $x = -1$, $y = -5$, joten suorien leikkauspiste on $P = (-1, -5)$.

Suora s kulkee siis pisteiden (7, 7) ja (−1, −5) kautta.

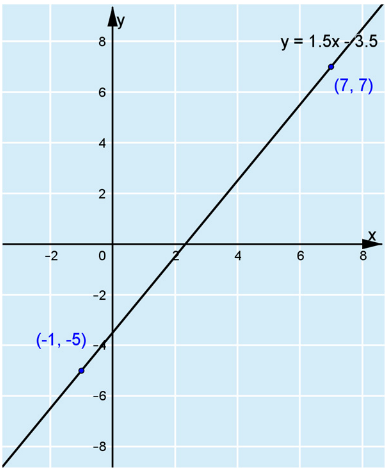
Piirretään suora ja määritetään sen yhtälö ohjelman avulla.



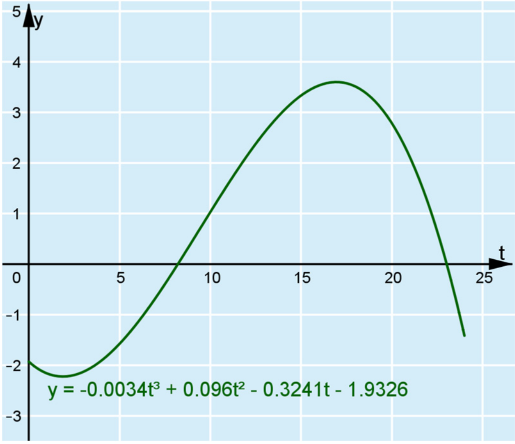
Suoran yhtälö on $y = 1{,}5x - 3{,}5$ eli $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$.



Vastaus: $P = (-1, -5)$, $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$,



119B. Piirretään funktion kuvaaja sopivalla ohjelmalla.

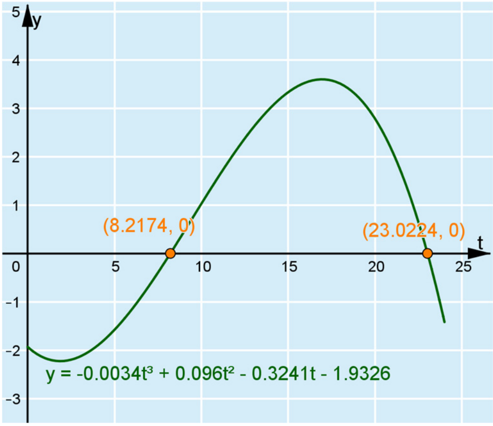


a) Kun kello on 3 iltapäivällä, niin keskiyöstä on kulunut 15 tuntia. Lasketaan funktion $f(t) = -0{,}0034t^3 + 0{,}096t^2 - 0{,}3242t - 1{,}9326$ arvot sopivalla ohjelmalla.

$f(15) = 3{,}329\ldots \approx 3$
$f(3) = -2{,}133 \approx -2$

Vastaus: n. 3 °C ja n. −2 °C

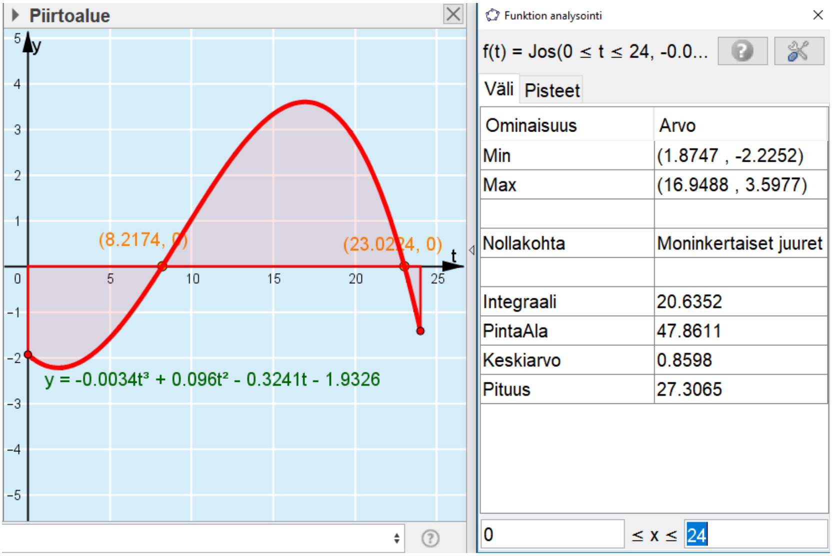
b) Lämpötila on 0 °C kohdissa, joissa kuvaaja leikkaa *t*-akselin. Määritetään leikkauspisteet ohjelman avulla.



Kuvaaja leikkaa *t*-akselin kohdissa $t = 8{,}217\ldots$ ja $t = 23{,}022\ldots$, joten lämpötila on 0 astetta noin kello 8 ja noin kello 23.

Vastaus: n. klo 8 ja n. klo 23

c) Lämpötila on korkeimmillaan kohdassa, jossa funktion arvo on suurin, ja matalimmillaan kohdassa, jossa funktion arvo on pienin. Etsitään funktion suurin ja pienin arvo välillä [0, 24] funktion analysointi-toiminnolla.



Funktio saa välillä [0, 24] suurimman arvonsa kohdassa $t = 16{,}948\ldots$ ja pienimmän arvonsa kohdassa $t = 1{,}874\ldots$, joten lämpötila on korkeimmillaan noin klo 17 ja matalimmillaan noin klo 02.

Vastaus: n. klo 17 ja n. klo 2

120B. **a)** Muodostetaan lausekkeet sähkön kokonaishinnalle, kun sähköä kuluu x kWh.

Koska kuukausittainen perusmaksu on maksettava, vaikka sähköä ei kuluisi ollenkaan, perusmaksu määrää lausekkeen vakiotermin.

Koska jokainen kilowattitunnin lisäys kasvattaa sähkölaskua yksikköhinnan verran, kokonaishinta on sähkönkulutuksen lineaarinen funktio ja yksikköhinta on sen kokonaishinnan lausekkeessa muuttujan x kerroin.

Kun hinnat muutetaan senteistä euroiksi, saadaan seuraavat lausekkeet.

$a(x) = 4{,}02 + 0{,}0662x$
$b(x) = 3{,}75 + 0{,}0799x$

Vastaus: $a(x) = 4{,}02 + 0{,}0662x$, $b(x) = 3{,}75 + 0{,}0799x$

b) Ratkaistaan yhtälö $a(x) = b(x)$ sopivalla ohjelmalla.

4.02+0.0662x=3.75+0.0799x

RatkaiseNumeerisesti: $\{\mathbf{x = 19.70802919708}\}$

Kuukausittaisen sähkönkulutuksen täytyisi olla 19,708… kWh ≈ 19,7 kWh.

Vastaus: 19,7 kWh

c) Lasketaan sähkön kokonaishinnat vuodessa molemmissa yhtiöissä. Vuodessa perusmaksuja on 12 kpl.

Yhtiö A:
$12 \cdot 4{,}02 + 0{,}0662 \cdot 2000 = 180{,}64$

Yhtiö B:
$12 \cdot 3{,}75 + 0{,}0799 \cdot 2000 = 204,\ 80$

Hintojen ero on $204{,}80\ € - 180,\ 64\ € = 24{,}16\ €$.

Vastaus: 24,16 €

121A. **a)** Ratkaistaan paraabelin ja x-akselin leikkauskohdat yhtälöstä $x^2 - 12x + 35 = 0$.

Sijoitetaan toisen asteen yhtälön kertoimet $a = 1$, $b = -12$ ja $c = 35$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2}$$
$$x = \frac{12 \pm \sqrt{4}}{2}$$
$$x = \frac{12 \pm 2}{2}$$
$$x = 7 \text{ tai } x = 5$$

x-akselilla y-koordinaatti on 0, joten paraabeli leikkaa x-akselin pisteissä (7, 0) ja (5, 0).

Vastaus: (7, 0) ja (5, 0)

b) Paraabelin huipun x-koordinaatti on paraabelin ja x-akselin leikkauspisteiden x-koordinaattien keskiarvo. Leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat $x = 5$ ja $x = 7$, joten huipun x-koordinaatti on $\frac{5+7}{2} = 6$.

Huipun y-koordinaatti on
$y = 6^2 - 12 \cdot 6 + 35 = 36 - 72 + 35 = -1$.

Huippu on pisteessä (6, −1).

Vastaus: (6, −1)

122A. Lämpötila muuttuu tasaisesti, joten lämpötilan muutosta voidaan kuvata suoralla. Lasketaan suoran kulmakerroin, kun suoran kulkee pisteiden (0; 17,1) ja (165; 22,3) kautta.

$$k=\frac{22{,}3-17{,}1}{165-0}=\frac{5{,}2}{165}=0{,}0315...$$

Suora kulkee pisteen (0; 17,1) kautta, joten suoran vakiotermi on $b = 17{,}1$.

Suoran yhtälö on $y = 0{,}0315\ldots x + 17{,}1$.

Salon etäisyys Helsingistä on 165 km − 55 km = 110 km.

Lasketaan lämpötila Salossa sijoittamalla suoran yhtälöön $x = 110$.

$y = 0{,}0315\ldots \cdot 110 + 17{,}1 = 20{,}566\ldots \approx 20{,}6$

Lämpötila Salossa on noin 20,6 °C.

Vastaus: 20,6 °C

123A. **a)** Eksponentiaalinen malli soveltuu esimerkiksi kuvaamaan bakteerien määrän kasvua. Bakteerien määrä voi esimerkiksi kaksinkertaistua aina kolmessa tunnissa.

Vastaus: esim. bakteerien lisääntyminen

b) Eksponentiaalinen malli ei sovellu esimerkiksi kuvaamaan lineaarisesti muuttuvia ilmiöitä. Lineaarisesti muuttuva ilmiö on esimerkiksi auton kulkema matka, jos nopeus on vakio.

Vastaus: esim. auton kulkema matka, jos nopeus on vakio

124B. a) Väkiluvun kasvu on eksponentiaalista, joten se noudattaa funktiota $f(x) = a \cdot q^x$.

Merkitään muuttujalla x aikaa vuosina alkaen vuodesta 2010.

Tiedetään, että funktion kuvaaja kulkee pisteiden (0; 6,9) ja (8; 7,6) kautta, kun muuttujan arvo on maapallon väkiluku miljardeina.

Ratkaistaan luvut a ja q yhtälöparista $\begin{cases} 6{,}9 = a \cdot q^0 \\ 7{,}6 = a \cdot q^8 \end{cases}$.

Sopivalla ohjelmalla yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $a = 6{,}9$ ja $q = 1{,}0121\ldots$

Maapallon väkiluku noudattaa siis funktiota $f(x) = 6{,}9 \cdot 1{,}0121\ldots^x$.

Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 10$.

Sopivalla ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = 30{,}721\ldots \approx 31$.

Muuttuja x on aika vuodesta 2010 lähtien, joten maapallon väkiluku ylittää 10 miljardia vuonna 2041.

Vastaus: vuonna 2041

b) Merkitään muuttujalla x aikaa vuosina alkaen vuodesta 1960.

Tiedetään, että funktion kuvaaja kulkee pisteiden (0; 3,0) ja (30; 5,3) kautta, kun funktion arvo on maapallon väkiluku miljardeina.

Ratkaistaan luvut a ja q yhtälöparista $\begin{cases} 3{,}0 = a \cdot q^0 \\ 5{,}3 = a \cdot q^{30} \end{cases}$.

Sopivalla ohjelmalla yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $a = 3{,}0$ ja $q = 1{,}0191\ldots$

Maapallon väkiluku noudattaa funktiota $f(x) = 3{,}0 \cdot 1{,}0191\ldots^x$.

Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 10$.

Sopivalla ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = 63{,}467\ldots$, joten aikaa kuluu tämän ennusteen mukaan 63,467… vuotta vuodesta 1960 alkaen, eli 13,467… vuotta vuodesta 2010 alkaen.

Kohdan a mallin mukaan aikaa kuluu 30,721… vuotta vuodesta 2010 alkaen.

Ennusteilla on eroa 30,721… a − 13,467… a = 17,253… a ≈ 17 a.

Vastaus: 17 vuotta aiemmin

125A. Kun muuttujat x ja y ovat suoraan verrannollisia, kuvaaja on origon kautta kulkeva suora. Väittämä A sopii siis kuvioon II.

Kun muuttujat x ja y ovat kääntäen verrannollisia, muuttujan x arvon kaksinkertaistuessa muuttujan y arvo pienenee puoleen. Pisteet (0,5; 2), (1,1) ja (2, 1) ovat kuvion 3 käyrällä, joten kuvio III näyttäisi kuvaavan kääntäen verrannollisuutta. Väittämä B näyttäisi siis sopivan kuvioon III.

Väittämän C mukaan y kaksinkertaistuu aina, kun muuttuja x kasvaa yhdellä. Pisteet (0,1), (1, 2) ja (2, 4) ovat kuvion V käyrällä, joten väittämä C näyttäisi sopivan kuvioon V.

Väittämän D mukaan y puolittuu aina, kun x kasvaa yhdellä. Pisteet (1, 4), (2, 2) ja (3, 1) ovat käyrällä IV, joten väittämä D näyttäisi sopivan käyrään IV. Pisteet (0, 5), (1; 2,5) ja (2; 1,25) näyttäisivät olevan kuvion I käyrällä, joten väittämä D näyttäisi sopivan myös käyrään I.

Väittämän E mukaan y on suoraan verrannollinen muuttujan x neliöön. Muuttujan arvojen $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ ja $x = 3$ neliöt ovat 0, 1, 4 ja 9. Käyrällä VI on pisteet (0, 0), (1, 1), (2, 2) ja (3; 4,5), joiden y-koordinaatit ovat edellä mainittujen muuttujan x neliöiden puolikkaita, joten käyrällä VI y näyttäisi olevan suoraan verrannollinen muuttujan x neliöön. Väittämä E näyttäisi siis sopivan käyrään 6.

Vastaus: A: II; B: III; C: V; D: I ja IV; E: VI

126B. **a)** Myynti kasvaa lineaarisesti, joten myyntiä kuvaa suora.

TAPA 1:
Määritetään suoran kulmakerroin, kun tiedetään, että suora kulkee pisteiden (0, 15 500) ja (2, 56 500) kautta.

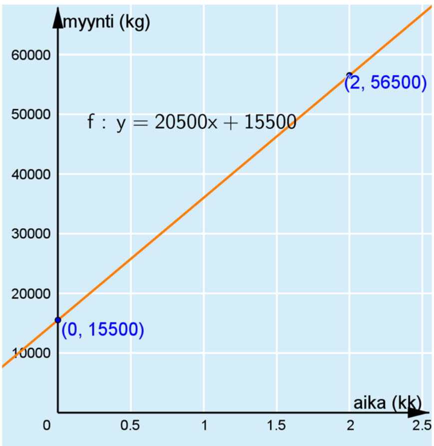
$$k = \frac{56\,500 - 15\,500}{2 - 0} = 20\,500$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = 20\,500x + b$.

Koska helmikuun alussa eli hetkellä 0 leipää oli myyty 15 500 kg, suoran vakiotermi on $b = 15\,500$.

Suoran yhtälö on siis $y = 20\,500x + 15\,500$.

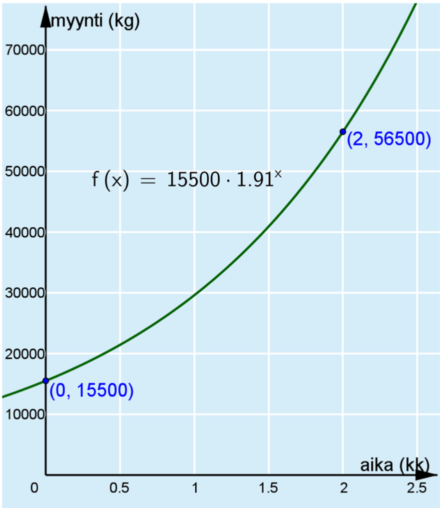
TAPA 2:
Piirretään ohjelmalla suora pisteiden (1, 15 500) ja (3, 56 500) kautta ja määritetään suoran yhtälö.



Kysytty funktio on $f(x) = 20\,500x + 15\,500$.

Vastaus: $f(x) = 20\,500x + 15\,500$

b) Funktio f kuvaa eksponentiaalista kasvua. Piirretään ohjelmalla eksponenttifunktion kuvaaja, joka kulkee pisteiden (1, 15 500) ja (3, 56 500) kautta ja määritetään funktion lauseke.



Funktion lauseke on $f(x) = 15\,500 \cdot 1{,}91^x$.

Vastaus: $f(x) = 15\,500 \cdot 1{,}91^x$

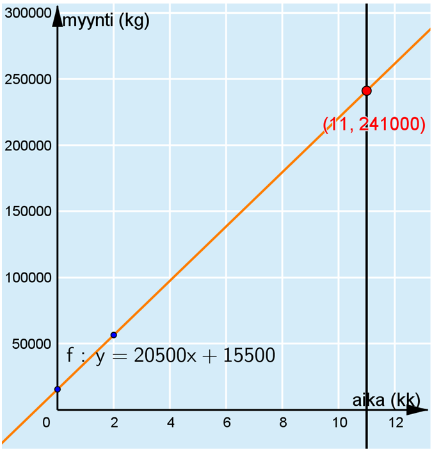
c) Määritetään a- ja b-kohtien mallien mukaiset ennusteet leivän myynnille kalenterivuoden eli 11 ensimmäisen kuukauden aikana.

TAPA 1:

Lineaarisen mallin mukaan myyty määrä kilogrammoina on
$f(11) = 20\,500 \cdot 11 + 15\,500 = 225\,500 = 241\,000.$

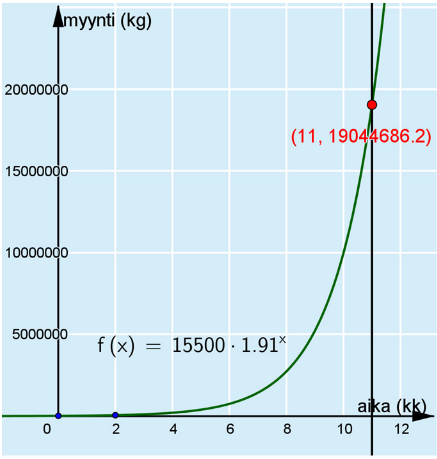
TAPA 2:

Määritetään suorien $y = 20500x + 15\,500$ ja $x = 11$ leikkauspiste ohjelman avulla.



Leikkauspiste on (11, 241 000), joten leipää myytiin kalenterivuoden aikana lineaarisen mallin mukaan 241 000 kg.

Määritetään eksponenttifunktion $f(x) = 15\,500 \cdot 1{,}91^x$ kuvaajan ja suoran $x = 11$ leikkauspiste ohjelman avulla.



Leikkauspiste on (11, 19 044 686,2), joten eksponentiaalisen mallin mukaan leipää myytiin kalenterivuoden aikana 19 044 686,2 kg.

Koska $\frac{19\,044\,686,2}{241\,000} = 79,02359...,$ niin leipää myydään b-kohdan mallin mukaan 7902,359… % − 100 % = 7802,359… % ≈ 7800 % enemmän kuin a-kohdan mallin mukaan.

Vastaus: 7800 % enemmän

127B. **a)** Lineaarisen mallin kuvaaja on suora. Merkitään vuosilukua kirjaimella x ja neliövuokraa kirjaimella y, jolloin suora kulkee pisteiden (1985; 3,20) ja (2000, 10) kautta.

TAPA 1:
Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{10-3,2}{2000-1985} = \frac{6,8}{15} = 0,453...$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = 0,453\ldots x + b$. Sijoitetaan yhtälöön pisteen (1985; 3,20) koordinaatit ja ratkaistaan vakiotermi b.

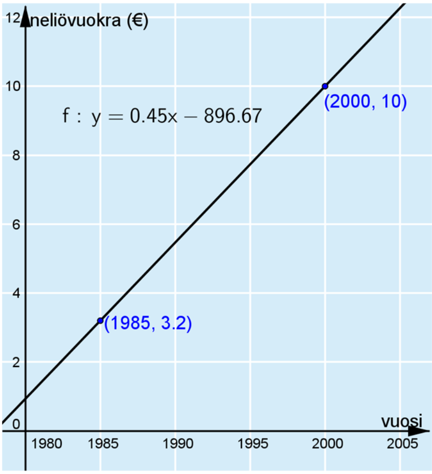
$$\begin{aligned} 3,20 &= 0,453...\cdot 1985 + b \\ b &= -896,666... \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = 0,453\ldots x - 896,666\ldots$.

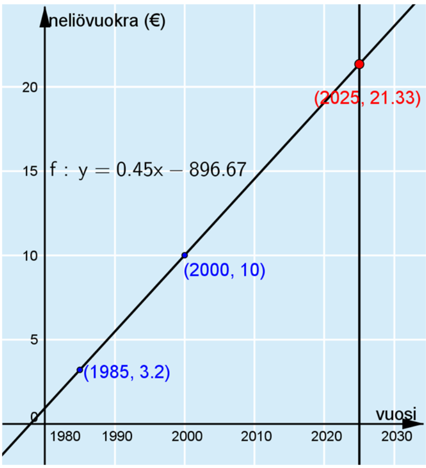
Lasketaan vuokra vuonna 2025 sijoittamalla $x = 2025$ suoran yhtälöön.
$y = 0,453\ldots \cdot 2025 - 896,666\ldots = 21,333\ldots \approx 21$

Vuokra vuonna 2025 on noin 21 €/m^2.

TAPA 2:
Piirretään ohjelmalla suora pisteiden (1985; 3,20) ja (2000, 10) kautta.



Määritetään neliövuokraa kuvaavan suoran ja suoran $x = 2025$ leikkauspiste ohjelman avulla.



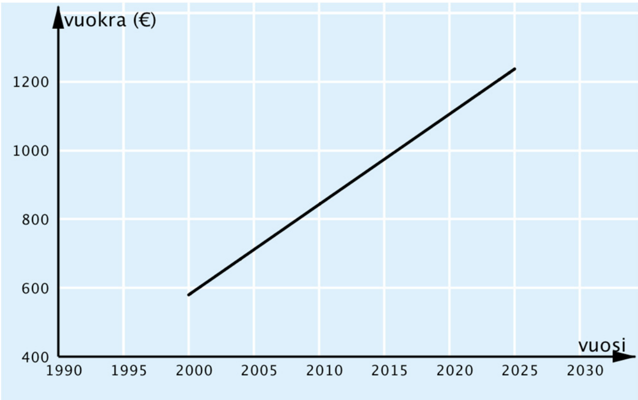
Leikkauspiste on (2025; 21,33), joten neliövuokra on vuonna 2025 noin 21 €.

Vastaus: 21 €/m^2

b) Määritetään 58 m^2:n kokoisen asunnon vuokran määrän lauseke. Se saadaan kertomalla neliöhinta y luvulla 58.

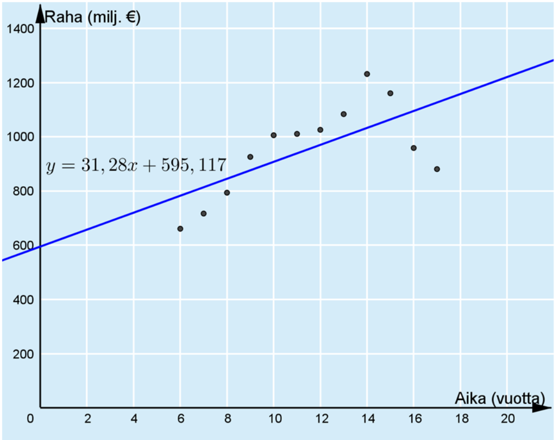
Vuokra on $58 \cdot (0{,}453\ldots x - 896{,}666\ldots)$. Piirretään kuvaaja sopivalla ohjelmalla.

Vastaus:



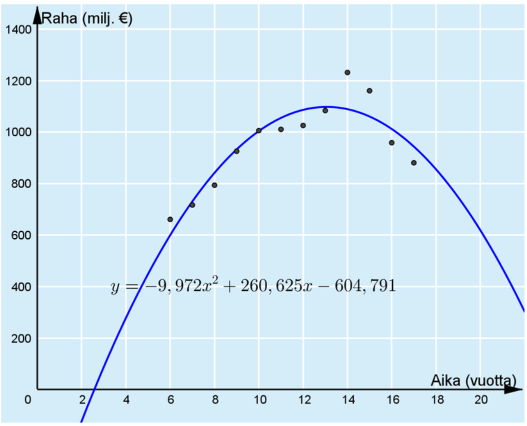
128B. a) Valitaan muuttujaksi x vuosien määrä alkaen vuodesta 2000 ja muuttujaksi y kehitysyhteistyörahan määrä miljardeina euroina

Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli sopivalla ohjelmalla.



Malliksi saadaan $y = 31{,}28x + 595{,}117$.

Sovitetaan aineistoon toisen asteen polynominen malli sopivalla ohjelmalla.

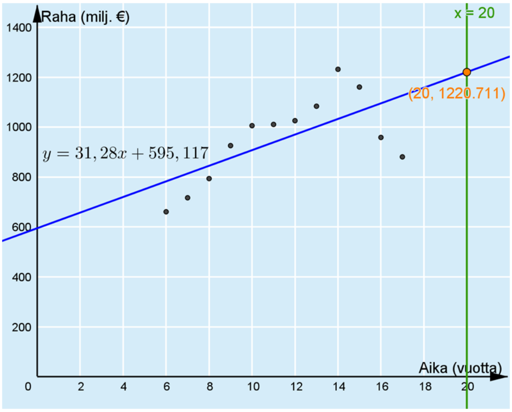


Malliksi saadaan $y = -9{,}972x^2 + 260{,}625x - 604{,}791$.

Vastaus: $y = 31{,}28x + 595{,}117$ ja $y = -9{,}972x^2 + 260{,}625x - 604{,}791$

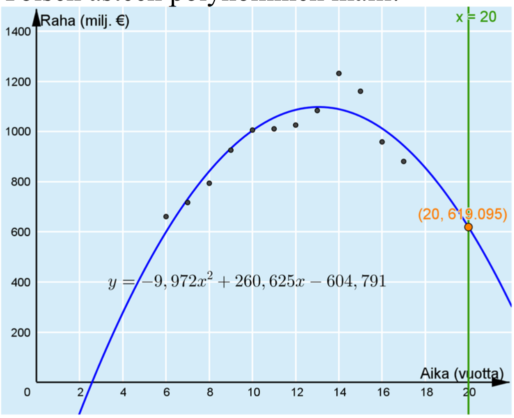
b) Koska malleissa muuttuja on vuosien määrä alkaen vuodesta 2000, ennuste vuoden 2020 kehitysyhteistyörahalle saadaan mallien ja suoran $x = 20$ avulla.

Lineaarinen malli:



Kohdan a mallin mukaisen suoran ja suoran $x = 20$ leikkauspiste on (20; 1220,711), joten a-kohdan malli ennustaa vuoden 2020 kehitysyhteistyörahaksi noin 1220 miljoonaa euroa.

Toisen asteen polynominen malli:



Kohdan b mallin mukaisen paraabelin ja suoran $x = 20$ leikkauspiste on (20; 619,095), joten a-kohdan malli ennustaa vuoden 2020 kehitysyhteistyörahaksi noin 620 miljoonaa euroa.

Vastaus: 1220 miljoonaa euroa ja 620 miljoonaa euroa

129A. **a)** Puumassan tilavuus kyseisinä ajanhetkinä saadaan laskemalla funktion f arvot kohdissa t = 10, 20, 30 ja 40 sopivalla ohjelmalla.

$$f(10)=0{,}0513\cdot e^{0{,}068\cdot 10}=0{,}10125...\approx 0{,}101$$
$$f(20)=0{,}0513\cdot e^{0{,}068\cdot 20}=0{,}19987...\approx 0{,}200$$
$$f(30)=0{,}0513\cdot e^{0{,}068\cdot 30}=0{,}39452...\approx 0{,}395$$
$$f(40)=0{,}0513\cdot e^{0{,}068\cdot 40}=0{,}77875...\approx 0{,}779$$

Vastaus: 0,101 m^3; 0,200 m^3; 0,395 m^3 ja 0,779 m^3

b) Koska malli on eksponentiaalinen, puumassa kasvaa aina yhtä monta prosenttia vuodessa. Tällöin se kasvaa myös kymmenessä vuodessa aina yhtä monta prosenttia.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia $f(10)$ on arvosta $f(0) = 0{,}0513$.

$$\frac{f(10)}{f(0)}=\frac{0{,}10125...}{0{,}0513}=1{,}97387...$$

Puumassan tilavuus kasvaa 10 vuoden aikana
197,387… % − 100 % = 97,387…% ≈ 97,4 %.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia $f(1)$ on arvosta $f(0) = 0{,}0513$.

$$\frac{f(1)}{f(0)}=\frac{0{,}0513\cdot e^{0{,}068\cdot 1}}{0{,}0513}=1{,}07036...$$

Puumassan tilavuus kasvaa vuodessa
107,036… % − 100 % = 7,036… % ≈ 7,0 %.

Vastaus: 97,4 % ja 7,0 %

130B. **a)** Maankuoren lämpötila kasvaa lineaarisesti. Merkitään syvyyttä kilometreinä kirjaimella h. Selvitetään lämpötilaa Celsiusasteina kuvaavan suoran kulmakerroin, kun tiedetään, että suora kulkee pisteiden (0, 10) ja (10, 170) kautta.

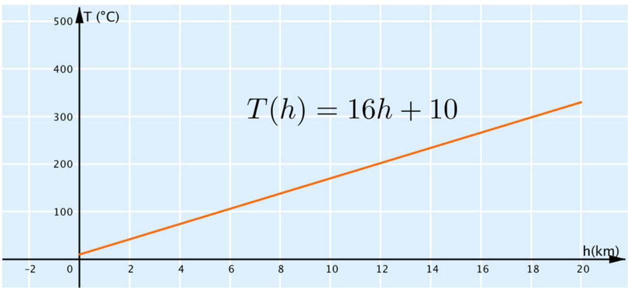
$$k=\frac{170-10}{10-0}=\frac{160}{10}=16$$

Lämpötila kasvaa kilometrin matkalla 16 °C.

Vastaus: 16 °C

b) Koska lämpötila kasvaa lineaarisesti, lämpötilan lauseke on muotoa $T(h) = kh + b$.
Kohdan a mukaan kulmakerroin $k = 16$.
Koska lämpötila 0 kilometrin syvyydellä on 10 °C, vakiotermi on $b = 10$.

Lämpötilaa kuvaa funktio $T(h) = 16h + 10$.



Vastaus: $T(h) = 16h + 10$

c) Ratkaistaan yhtälö $T(h) = 100$ ohjelmalla.

$16h + 10 = 100$

Ohjelmalla ratkaisuksi saadaan $h = 5{,}625$.
Lämpötila on siis 100 °C noin 5,6 kilometrin syvyydessä.

Vastaus: 5,6 kilometrin syvyydellä

131B. **a)** Ennusteen mukaan vuonna 2014 asukasluku on 607 417 ja vuonna 2018 se on 628 894.

Sijoitetaan yhtälöön $y = a(x - 2014) + b$ vuoden 2014 tiedot $x = 2014$ ja $y = 607\,417$. Ratkaistaan yhtälöstä vakio b.

$$\begin{aligned} 607\,417 &= a(2014 - 2014) + b \\ 607\,417 &= a \cdot 0 + b \\ b &= 607\,417 \end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälöön $y = a(x - 2014) + b$ vuoden 2018 tiedot $x = 2018$ ja $y = 629\,894$ sekä vakio $b = 607\,417$. Ratkaistaan yhtälöstä vakio a.

$$628\,894 = a(2018 - 2014) + 607\,417$$

Ratkaisuksi saadaan ohjelmalla $a = 5619{,}25$.

Vastaus: $a = 5619{,}25$, $b = 607\,417$

b) Sijoitetaan a-kohdassa saadut vakioiden a ja b arvot sekä ajankohta $x = 2030$ yhtälöön $y = a(x - 2014) + b$ ja lasketaan asukasluku vuonna 2030.

$$y = 5619{,}25(2030 - -2014) + 607\,417 = 697\,325$$

Lasketaan vuoden 2014 ja 2030 väkilukujen erotus.

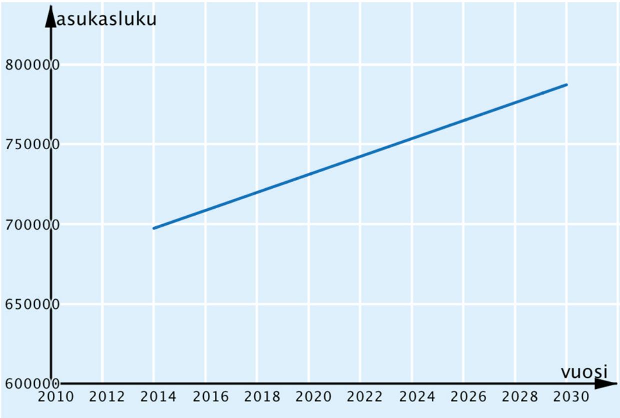
$$697\,325 - 607\,417 = 89\,908 \approx 90\,000.$$

Asukasluku kasvaa aikavälillä 2014−2030 ennusteen mukaan noin 90 000 asukkaalla.

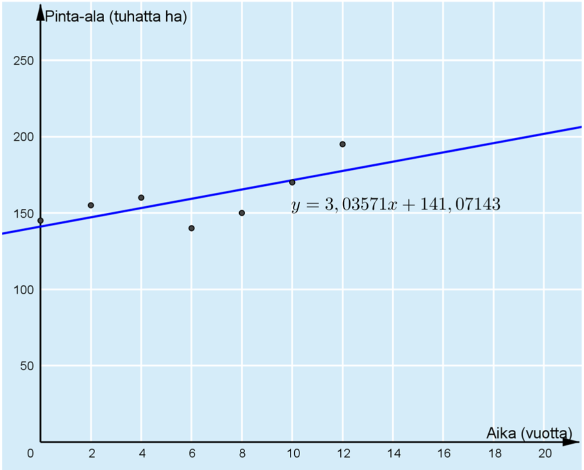
Vastaus: 90 000 asukkaalla

c) Asukasluku vuonna x on $y = 5619{,}25(x - 2014) + 607\,417$.
Piirretään asukasluvun kuvaaja välillä $2014 \leq x \leq 2030$ sopivalla ohjelmalla.

Vastaus:

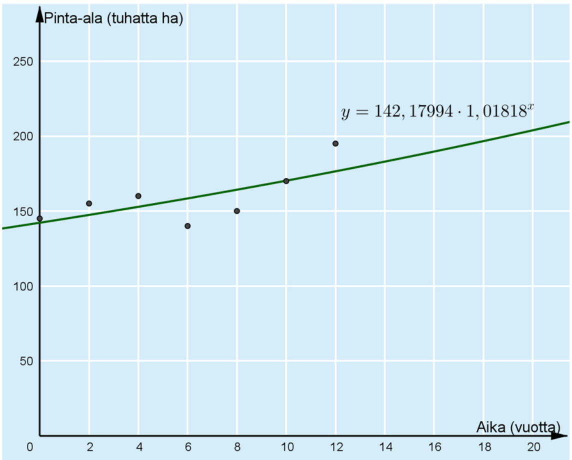


132B. a) Valitaan muuttujaksi x vuosien määrä alkaen vuodesta 2000. Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.



Malliksi saadaan $y = 3{,}03571x + 141{,}07143$.

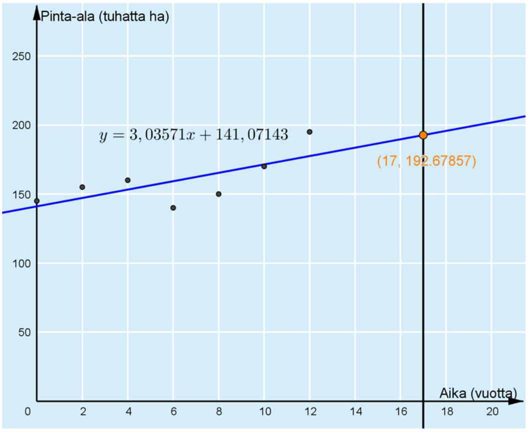
Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli.



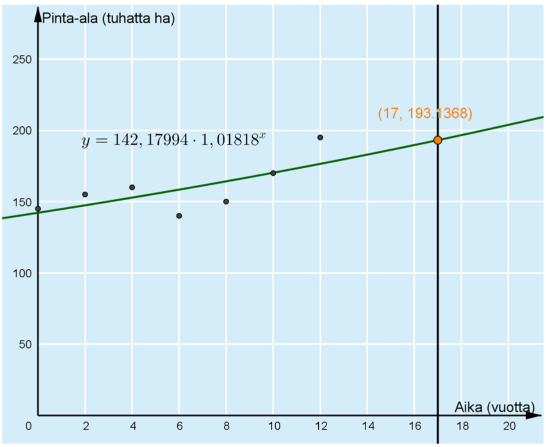
Malliksi saadaan $y = 142{,}17994 \cdot 1{,}01818^x$.

Vastaus: $y = 3{,}03571x + 141{,}07143$ ja $y = 142{,}17994 \cdot 1{,}01818^x$

b) Vuonna 2017 on kulunut 17 vuotta vuodesta 2000.
Selvitetään a-kohdan mallien mukaiset arviot vuoden 2017 luomuviljelypinta-alasta mallien ja suoran $x = 17$ avulla.



Kohdan a lineaarisen mallin ja suoran $x = 17$ leikkauspiste on (17; 192,678…), joten lineaarisen mallin mukaan luomuviljelypinta-ala oli noin 193 000 hehtaaria vuonna 2017.



Kohdan b eksponentiaalisen mallin ja suoran $x = 17$ leikkauspiste on (17; 193,136…), joten eksponentiaalisen mallin mukaan luomuviljelypinta-ala oli noin 193 000 hehtaaria vuonna 2017.

Vastaus: 193 000 ha ja 193 000 ha

c) Lasketaan, kuinka monta prosenttia b-kohdan tulokset ovat toteutuneesta peltopinta-alasta.

Lineaarinen malli:

$$\frac{192,678...}{263} = 0,73261...$$

Lineaarisen mallin mukaan vuoden 2017 tulos poikkeaa 100 % − 73,261… % = 26,738… % ≈ 27 % alaspäin vuoden 2017 toteutuneesta peltopinta-alasta.

Eksponentiaalinen malli:

$$\frac{193,136...}{263} = 0,73436...$$

Eksponentiaalisen mallin mukaan vuoden 2017 tulos poikkeaa 100 % − 73,436… % = 26,563… % ≈ 27 % alaspäin vuoden 2017 toteutuneesta peltopinta-alasta.

Vastaus: 27 % alaspäin ja 27 % alaspäin

133B. a) Lasketaan, kuinka monta prosenttia luku 1 460 500 on luvusta 422 500.

$$\frac{1\,460\,500}{422\,500} = 3,45680...$$

Maksuhäiriöiden lukumäärä kasvoi
345,680…% − 100 % = 245,680… % ≈ 246 %.

Vastaus: 246 %

b) Koska vuotuisen vähenemisprosentin oletetaan olevan sama, maksuhäiriöiden oletetaan vähenevän eksponentiaalisesti. Tällöin maksuhäiriöiden määrä noudattaa funktiota $1\,460\,500 \cdot q^x$, jossa x on vuodesta 2011 kulunut aika.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä muutoskerroin q.
$1\,460\,500q^4 = 422\,500$

Ohjelmalla saadaan ratkaisuksi $q = \pm 0,73338...$

Koska muutoskeroin q ei voi olla negatiivinen, se on $q = 0,73338…$, ja maksuhäiriöt vähenevät tavoitteen mukaan vuosittain

100 % − 73,338… % = 26,661… % ≈ 26,7 %.

Vastaus: 26,7 %

134B. **a)** Jättikynttilän korkeutta kuvataan suoran avulla. Tiedetään, että suora kulkee pisteiden (0, 100) ja (450, 0) kautta.
Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k=\frac{0-100}{450-0}=-\frac{2}{9}$$

Kynttilän pituus on 100 cm, kun sitä ei ole poltettu vielä laisinkaan. Suoran vakiotermi on siis $b = 100$.

Suoran yhtälö on $y=-\frac{2}{9}t+100$

Vastaus: $k=-\frac{2}{9}$, $b=100$

b) Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} y=-\frac{2}{9}t+100 \\ y=120-0{,}005t^2 \end{cases}$.

Sopivalla ohjelmaa yhtälöparin ratkaisuksi saadaan
$t = -44{,}813\ldots$ ja $y = 109{,}958\ldots$ tai $t = 89{,}258\ldots$ ja $y = 80{,}164\ldots$

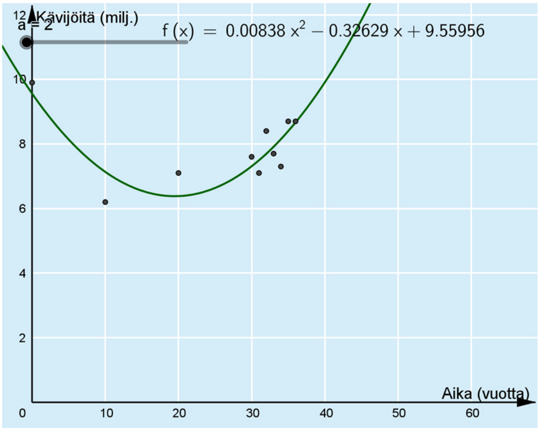
Negatiivinen aika ei käy, koska malli ei sovellu ajanhetkiin, joina kynttilöitä ei vielä oltu sytytetty.

Kynttilät ovat yhtä pitkiä, kun ne ovat palaneet $89{,}258\ldots$ h $\approx$ 90 h.

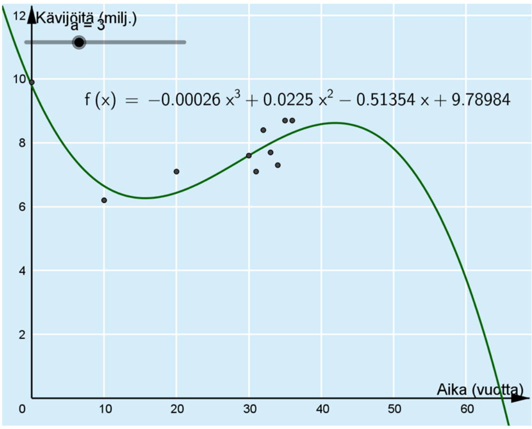
Vastaus: 90 tunnin palamisen jälkeen

135B. Valitaan muuttujaksi x vuosien määrä vuodesta 1980 lähtien. Sovitetaan aineistoon polynomi, jonka asteluku on valittavissa.

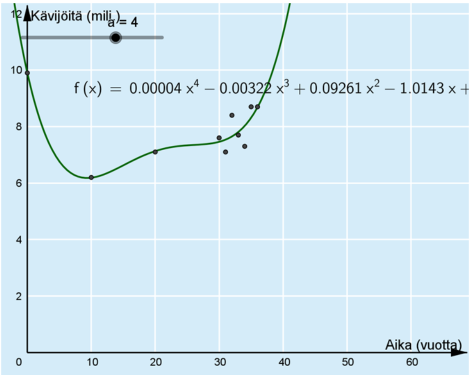
Kun valitaan asteluvuksi kaksi, saadaan toisen asteen polynominen malli.

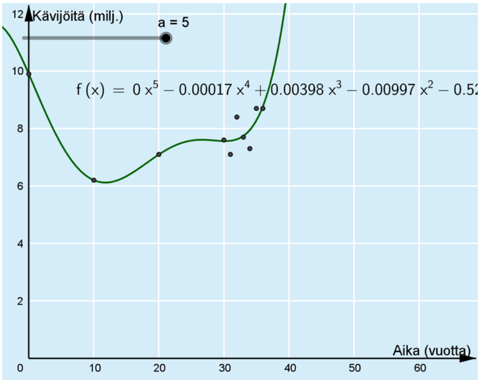


Valitsemalla asteluvuksi 3 saadaan kolmannen asteen polynominen malli.

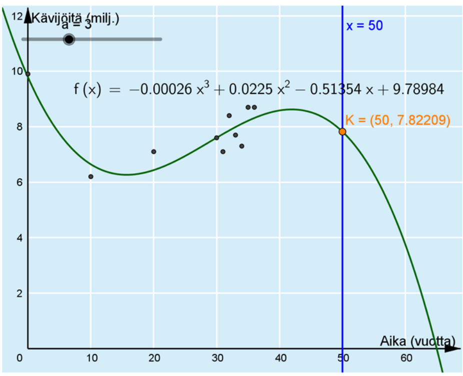


Vastaavasti voidaan valita neljännen tai viidennen asteen polynominen malli.



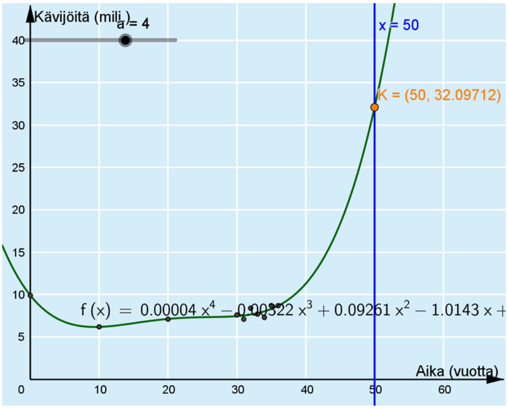


Vuodesta 1980 on kulunut 50 vuotta vuoteen 2030. Malleista parhaiten aineistoon näyttäisi sopivan kolmannen asteen malli.
Vuonna 2030 on kulunut 50 vuotta vuodesta 1980.
Määritetään kolmannen asteen mallin mukainen ennuste elokuvissa kävijöiden määrälle vuonna 2030 mallin ja suoran $x = 50$ avulla.



Kolmannen asteen mallin käyrän ja suoran $x = 50$ leikkauspiste on (50; 7,82209), joten kolmannen asteen mallin mukaan vuonna 2030 suomalaiset käyvät elokuvissa noin 7,8 miljoonaa kertaa.

Toiseksi parhaiten aineistoon näyttäisi sopivan 4. tai 5. asteen polynominen malli. Valitaan näistä yksinkertaisempi.



Neljännen asteen mallin käyrän ja suoran $x = 50$ leikkauspiste on (50; 32,09712), joten neljännen asteen mallin mukaan vuonna 2030 suomalaiset käyvät elokuvissa noin 32,1 miljoonaa kertaa.

Lasketaan kuinka monta prosenttia ennusteet poikkeavat toisistaan:

$$\frac{7,822...}{32,097...} = 0,243...$$

Pienempi ennuste on 100 % − 24,3… % = 75,6… % ≈ 76 % pienempi kuin suurempi ennuste.

Vastaus: 7,8 miljoonaa kertaa, 32,1 miljoonaa kertaa, 76 %

136A. Tulkitaan kuvaajissa positiivisen nopeuden suunnan olevan ylöspäin tai sivuttaisen liikkeen tapauksessa liikkeen alkuperäisen suunnan mukainen.

a) Pallo on levossa, kun se on koko ajan samassa paikassa, eli paikka on vakio ja nopeus on nolla. Tähän sopivat paikan kuvaaja 3 ja nopeuden kuvaaja L.

Vastaus: 3, L

b) Kun pallo vierii vaakasuoralla tasolla, sen nopeus on suunnilleen vakio ja paikka kasvaa tasaisesti. Tähän sopivat paikan kuvaaja 5 ja nopeuden kuvaaja M.

Vastaus: 5, M

c) Kun pallo vierii vaakasuoralla tasolla ja palloa lyödään mailalla liikkeen suuntaan, pallon nopeus on ensin vakio, kunnes lyöntihetkellä nopeus kasvaa äkillisesti suuremmaksi vakioksi. Tällöin paikka kasvaa tasaisesti ensin pienemmällä ja lyönnin jälkeen suuremmalla nopeudella. Tähän sopivat paikan kuvaaja 1 ja nopeuden kuvaaja P.

Vastaus: 1, P

d) Kun pallo vierii vaakasuoralla tasolla, törmää esteeseen ja kimpoaa takaisin tulosuuntaansa, pallon nopeus on ensin positiivinen vakio ja törmäyksen jälkeen negatiivinen vakio. Tällöin paikka ensin kasvaa tasaisesti ja sitten vähenee tasaisesti. Tähän sopivat paikan kuvaaja 2 ja nopeuden kuvaaja K.

Vastaus: 2, K

e) Kun pallo heitetään pystysuoraan ylöspäin, pallolla on positiivinen alkunopeus. Sitten nopeus pienenee tasaisesti ja muuttuu negatiiviseksi pallon alkaessa pudota. Tällöin pallon paikan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Tähän sopivat paikan kuvaaja 4 ja nopeuden kuvaaja O.

Vastaus: 4, O

f) Kun pallo pudotetaan kädestä, sen nopeus on aluksi nolla ja sitten negatiivinen, koska pallo putoaa alaspäin. Pallon pompatessa lattiasta nopeus muuttuu äkillisesti positiiviseksi, ja koska pallo alkaa uudestaan pudota, nopeus vähenee tämän jälkeen. Tällöin paikan kuvaaja muodostuu kahdesta alaspäin aukeavan paraabelin osasta. Tähän sopivat paikan kuvaaja 6 ja nopeuden kuvaaja N.

Vastaus: 6, N

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

137B. Koska radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti, sitä voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 25 \cdot q^x$, jossa q on muutoskerroin ja x aika vuorokausina.

Tiedetään, että $f(5) = 16{,}2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä muutoskerroin q.

$25 \cdot q^5 = 16{,}2$

Sopivalla ohjelmalla saadaan $q = 0{,}916\ldots$, joten $f(x) = 25 \cdot 0{,}916\ldots^x$.
Kun näytteen aktiivisuus on puolittunut ensimmäisestä mittauksesta, se on 12,5 kBq. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä puoliintumisaika x.

$25 \cdot 0{,}916\ldots^x = 12{,}5$

Sopivalla ohjelmalla saadaan $x = 7{,}988\ldots \approx 8$, joten radioaktiivisuuden puoliintumisaika on noin 8 vuorokautta.

Lasketaan näytteen aktiivisuus 10 vuorokautta ennen ensimmäistä mittausta.
$f(-10) = 25 \cdot 0{,}916\ldots^{-10} = 59{,}537\ldots \approx 59{,}5$

Näytteen aktiivisuus 10 vuorokautta ennen ensimmäistä mittausta oli noin 59,5 kBq.

Vastaus: 8 vrk, 59,5 kBq

138B. Ratkaistaan suoran kulmakerroin.

$$\begin{aligned} 3x+4y-5&=0 \\ 4y&=-3x+5 \qquad \| :4 \\ y&=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Kulmakerroin on $k=-\frac{3}{4}$, joten suora on laskeva.

Ratkaistaan suuntakulman α suuruus.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= -\frac{3}{4} \\ \alpha &= 36{,}869...^\circ \\ \alpha &\approx 36{,}9^\circ \end{aligned}$$

Vastaus: laskeva, −36,9°

139A. a) Tiedetään, että $f(2) = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä vakio b.

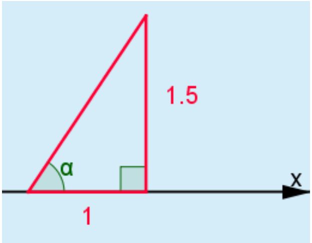
$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\cdot 2+b&=0 \\ 3+b&=0 \\ b&=-3 \end{aligned}$$

Vastaus: $b = -3$

b) Kohdan a perusteella $f(x)=\frac{3}{2}x-3$. Koska $f(0) = -3$, funktion f kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -3)$.

Vastaus: $(0, -3)$

c) Funktion *f* kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on $k = \frac{3}{2}$. Piirretään mallikuva.



Ratkaistaan kysytty terävä kulma α tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{3}{2}$$
$$\alpha = 56{,}309...°$$

Funktion kuvaajan ja x-akselin välinen terävä kulma on $56{,}309...° \approx 56{,}3°$.

Vastaus: 56,3°

140B. Merkitään hiilidioksidipäästöjen määrää vuonna 1990 kirjaimella a.
Tiedetään, että $a > 0$.
Tällöin hiilidioksidipäästöjen määrä vuonna 2008 oli $1{,}39a$.

Koska vuotuinen kasvuprosentti oletetaan vakioksi, päästöjen määrää voidaan mallintaa eksponenttifunktiolla $f(x) = a \cdot q^x$, jossa x on vuodesta 1990 kulunut aika vuosina.

Vuonna 2008 oli kulunut 18 vuotta vuodesta 1990. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä muutoskerroin q.

$a \cdot q^{18} = 1{,}39a$

Sopivalla ohjelmalla ratkaisuksi saadaan $q = \pm 1{,}01846...$

Koska muutoskerroin ei voi olla negatiivinen, on $q = 1{,}01846\ldots$ ja $f(x) = a \cdot 1{,}01846\ldots^x$.

Vuonna 2015 oli kulunut 25 vuotta vuodesta 1990. Lasketaan eksponentiaalisen mallin mukainen päästöjen määrä vuonna 2015.

$f(25) = a \cdot 1{,}01846\ldots^{25} = 1{,}579\ldots$

Eksponentiaalisen mallin mukaan päästöt kasvoivat vuosina 1990–2015 yhteensä $157{,}9\ldots\ \% - 100\ \% = 57{,}9\ldots\ \% \approx 58\ \%$.

Vastaus: 58 %

141A. Määritetään suoran $y = -3x + 2$ ja x-akselin leikkauspiste.
x-akselilla $y = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä leikkauspisteen x-koordinaatti.

$$\begin{aligned} -3x+2&=0 \\ -3x&=-2 \\ x&=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Suora $y = -3x + 2$ leikkaa x-akselin pisteessä $\left(\frac{2}{3},0\right)$.

Määritetään vastaavalla tavalla suoran $y = ax + 6$ ja x-akselin leikkauspiste. Jos $a = 0$, suoran yhtälö on $y = 6$, eikä suora leikkaa x-akselia. Oletetaan, että $a \neq 0$ ja ratkaistaan leikkauspisteen x-koordinaatti yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} ax+6&=0 \\ ax&=-6 \qquad \| : a(\neq 0) \\ x&=-\frac{6}{a} \end{aligned}$$

Suora $y = ax + 6$ leikkaa y-akselin pisteessä $\left(-\frac{6}{a},0\right)$.

Jotta suorat erottaisivat x-akselista janan, jonka pituus on 3, on oltava
$-\frac{6}{a}=\frac{2}{3}+3$ tai $-\frac{6}{a}=\frac{2}{3}-3$.

Ratkaistaan a näistä yhtälöistä.

$$\begin{aligned} -\frac{6}{a}&=\frac{2}{3}+3 \\ -\frac{6}{a}&=\frac{2}{3}+\frac{9}{3} \\ -\frac{6}{a}&=\frac{11}{3} \\ -11a&=18 \qquad \| :(-11) \\ a&=-\frac{18}{11} \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned} -\frac{6}{a}&=\frac{2}{3}-3 \\ -\frac{6}{a}&=-\frac{7}{3} \\ 7a&=18 \qquad \| : 7 \\ a&=\frac{18}{7} \end{aligned}$$

Vastaus: $a=-\frac{18}{11}$ tai $a=\frac{18}{7}$

142B. a) CRP:n pitoisuus voi nopeimmillaan kaksinkertaistua kahdeksan tunnin välein. Koska CRP tällöin kaksinkertaistuu aina samassa ajassa, kasvu on eksponentiaalista.

Merkitään aikaa keskipäivästä alkaen tunteina kirjaimella t.

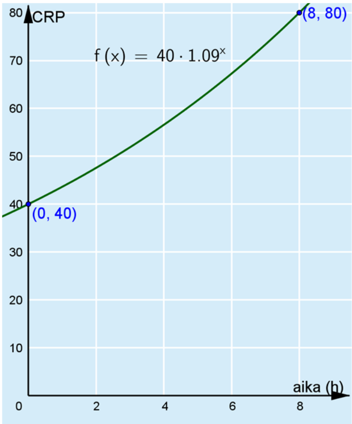
TAPA 1:

CRP voi nopeimmillaan kasvaa funktion $f(t) = a \cdot 2^{\frac{t}{8}}$ mukaisesti, jossa a on pitoisuuden alkuarvo.

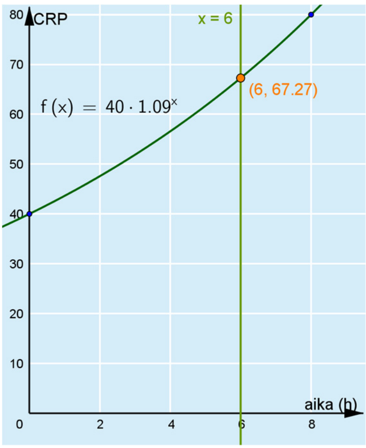
Kello 18:00 on kulunut 6 tuntia keskipäivästä.
Jos CRP-pitoisuus on keskipäivällä 40, se voi olla kello 18 enimmillään $f(6) = 40 \cdot 2^{\frac{6}{8}} = 67,271... \approx 67,3$.

TAPA 2:

Jos CRP kaksinkertaistuu kahdeksassa tunnissa, se on 80 kahdeksan tunnin kuluttua. Piirretään ohjelmalla sellaisen eksponenttifunktion kuvaaja, joka kulkee pisteiden (0, 40) ja (8, 80) kautta.



Kello 18 on kulunut 6 tuntia keskipäivästä. Määritetään eksponenttifunktion kuvaajan ja suoran $x = 6$ leikkauspiste ohjelmalla.



Leikkauspiste on (6; 67,27), joten CRP voi kello 18 olla korkeintaan $67{,}27 \approx 67{,}3$.

Vastaus: 67,3

b) Jos tulehdus on kadonnut, CRP-pitoisuus puolittuu 19 tunnin välein. Tämä on suurin mahdollinen CRP-pitoisuuden alenemisnopeus.

TAPA 1:

Pitoisuus noudattaa funktiota $f(t)=a\cdot 0{,}5^{\frac{t}{19}}$, jossa a on alkuarvo.

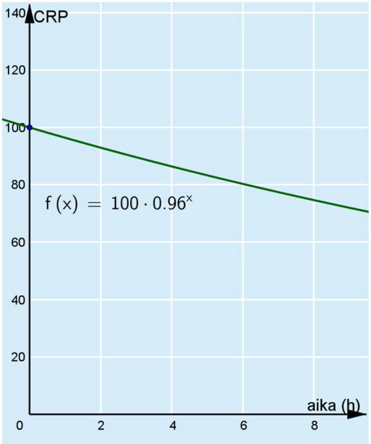
Jos alkuarvo on 100, pitoisuus noudattaa funktiota $f(t)=100\cdot 0{,}5^{\frac{t}{19}}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä, kuinka pitkä aika kuluu, ennen kuin pitoisuus on laskenut arvoon 10.

$$100\cdot 0{,}5^{\frac{t}{19}}=10$$

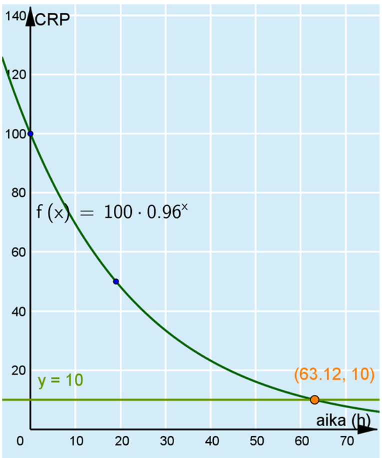
Yhtälön ratkaisuksi saadaan sopivalla ohjelmalla $t = 63{,}116\ldots$, joten aikaa kuluu vähintään 63 tuntia eli 2 vuorokautta ja 15 tuntia. Tällöin on torstai ja kello on 3 yöllä.

TAPA 2:

Kun CRP-pitoisuus on 19 tunnin kuluttua puolittunut, sen arvo on 50. Piirretään ohjelmalla sellaisen eksponenttifunktion kuvaaja, joka kulkee pisteiden (0, 100) ja (19, 50) kautta.



Määritetään ohjelman avulla eksponenttifunktion ja suoran $y = 10$ leikkauspiste.



Leikkauspiste on (63,12; 10), joten aikaa kuluu vähintään 63 tuntia eli 2 vuorokautta ja 15 tuntia. Tällöin on torstai ja kello on 3 yöllä.

Vastaus: torstaina klo 3

143B. **a)** Suodatin poistaa yhdellä suodatuksella 96 % bakteereista, joten bakteereista jää jäljelle 100 % − 96 % = 4 %.

Bakteerien määrä kahden suodatuksen jälkeen on $a \cdot 0{,}04^2 = 0{,}0016a$, jossa $a > 0$ on alkuperäinen bakteerien määrä. Bakteereista on siis kahden suodatuksen jälkeen jäljellä 0,16 %, joten niistä on suodatettu 100 % − 0,16 % = 99,84 % ≈ 99,8 %.

Vastaus: 99,8 %

b) Kun bakteereista on poistettu 99,9995 %, niistä on jäljellä 0,0005 %. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä tarvittava suodatusten määrä x.

$$a \cdot 0{,}04^x = 0{,}000005a$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan sopivalla ohjelmalla $x = 3{,}792\ldots$, joten vesi on suodatettava vähintään neljä kertaa.

Vastaus: vähintään 4 kertaa

c) Kun bakteereista on poistettu 99,9995 %, niistä on jäljellä 0,0005 %. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä tarvittava muutoskerroin q, kun kaksi suodatusta riittää.

$$a \cdot q^2 = 0{,}000005a$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan sopivalla ohjelmalla $q = \pm 0{,}00223...$

Koska muutoskerroin ei voi olla negatiivinen, on $q = 0{,}00223\ldots$

Bakteereista poistuu tällöin yhdellä suodatuskerralla 100 % − 0,223… % = 99,776… % ≈ 99,78 %.

Vastaus: 99,78 %

144B. Kun radioaktiivisen aineen määrä on vähentynyt 0,043 %, ainetta on jäljellä 100 % − 0,043 % = 99,957 % alkuperäisestä.

Merkitään aineen alkuperäistä määrää kirjaimella a. Tiedetään, että $a > 0$.

Aineen määrä vuoden kuluttua on $0{,}99957a$.

Koska aineen määrällä on puoliintumisaika, aineen määrä vähenee eksponentiaalisesti noudattaen funktiota $f(x) = a \cdot q^x$, jossa q on muutoskerroin ja x aika vuosina.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä muutoskerroin q.

$$a \cdot q^1 = 0{,}99957a$$

Yhtälön ratkaisu on $q = 0{,}99957$.

Aineen määrä on puolittunut, kun $f(x) = 0{,}5a$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä puoliintumisaika a vuorokausina.

$$a \cdot 0{,}99957^x = 0{,}5a$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan sopivalla ohjelmalla 1611,623…, joten puoliintumisaika on 1611,623 a ≈ 1600 a.

Vastaus: 1600 vuotta