6 AVARUUSGEOMETRIA

ALOITA PERUSTEISTA

238A. a) Kappale II on likimain särmiö.

Vastaus: II

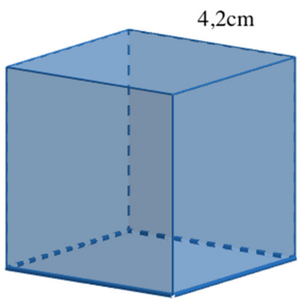
b) Kappaleet II ja III ovat likimain lieriöitä.

Vastaus: II ja III

c) Kappaleet I, V ja VI ovat likimain kartioita.

Vastaus: I, V ja VI

239A. a) Kappale on kuutio, joka särmän pituus on 4,2 cm.

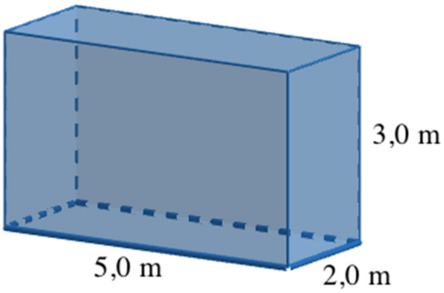


Tilavuus on $V = s^3 = (4{,}2 \text{ cm})^3 = 74{,}088 \text{ cm}^3 \approx 74 \text{ cm}^3$.

Pinta-ala on $A = 6 \cdot s^2 = 6 \cdot (4{,}2 \text{ cm})^2 = 105{,}84 \text{ cm}^2 \approx 110 \text{ cm}^2$.

Vastaus: 74 cm^3 ja 110 cm^2

b) Kappale on suorakulmainen särmiö, jonka särmien pituudet ovat 5,0 m, 2,0 m ja 3,0 m.



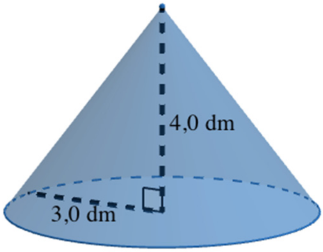
Tilavuus on $V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 5{,}0\text{ m} \cdot 2{,}0\text{ m} \cdot 3{,}0\text{ m} = 30\text{ m}^3$.

Kokonaispinta-ala saadaan laskemalla yhteen kaikkien tahkojen pinta-alat.

$A = 2 \cdot 5{,}0\text{ m} \cdot 2{,}0\text{ m} + 2 \cdot 5{,}0\text{ m} \cdot 3{,}0\text{ m} + 2 \cdot 2{,}0\text{ m} \cdot 3{,}0\text{ m} = 62\text{ m}^2$

Vastaus: 30 m^3 ja 62 m^2

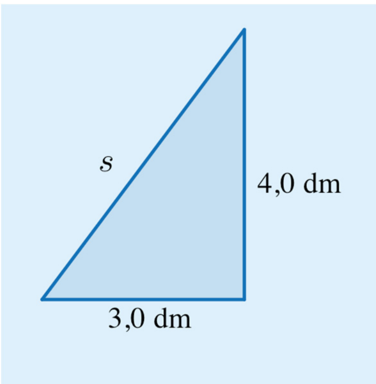
240A. a) Kappale on suora ympyräkartio, jonka pohjaympyrän säde on $r = 3{,}0$ dm ja korkeus $h = 4{,}0$ dm.



Tilavuus on

$$V = \frac{1}{3}A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3{,}0 \text{ dm})^2 \cdot 4{,}0 \text{ dm}$$
$$= 37{,}699... \text{ dm}^3 \approx 38 \text{ dm}^3.$$

Määritetään sivujanan s pituus Pythagoraan lauseen avulla.

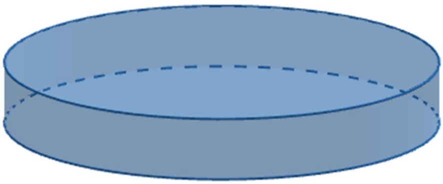


$$3{,}0^2 + 4{,}0^2 = s^2$$
$$s^2 = 25$$
$$s = _{(}\pm_{)} 5$$

$$A_{\text{vaippa}} = \pi rs = \pi \cdot 3{,}0 \text{ dm} \cdot 5{,}0 \text{ dm} = 47{,}123\ldots \text{ dm}^2 \approx 47 \text{ dm}^2$$

Vastaus: 38 dm^3 ja 47 dm^2

b) Kappale on ympyräpohjainen lieriö, joka pohjaympyrän kehän pituus on 22 cm ja korkeus 1,0 cm.



Määritetään pohjaympyrän säde r ympyrän kehän pituuden p avulla.

$$p = 2\pi r$$
$$22 = 2\pi r \qquad \| : 2\pi$$
$$r = 3{,}501\ldots$$

Tilavuus on

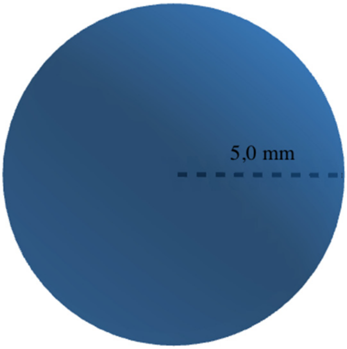
$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = \pi r^2 h\pi \cdot (3{,}501\ldots\ \text{cm})^2 \cdot 1{,}0\ \text{cm}$$
$$= 38{,}515\ldots\ \text{cm}^3 \approx 39\ \text{cm}^3.$$

Vaippa on suorakulmio, jonka toinen sivu on lieriön korkeus ja toinen sivu pohjaympyrän kehän pituus.

$A_{\text{vaippa}} = 22\ \text{cm} \cdot 1{,}0\ \text{cm} = 22\ \text{cm}^2$

Vastaus: 39 cm^3 ja 22 cm^2

241A. **a)** Kappale on pallo, jonka säde on 5,0 mm.



Tilavuus on

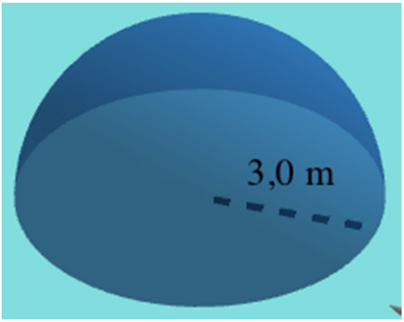
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (5{,}0 \text{ mm})^3 = 523{,}598... \text{ mm}^3 \approx 520 \text{ mm}^3.$

Pinta-ala on

$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (5{,}0 \text{ mm})^2 = 314{,}159\ldots \text{ mm}^2 \approx 310 \text{ mm}^2.$

Vastaus: 520 mm^3 ja 310 mm^2

b) Kappale on puolipallo, jonka säde on 3,0 m.



Tilavuus on

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot(3{,}0\text{ m})^3=56{,}548...\text{ m}^3\approx 57\text{ m}^3.$$

Puolipallon pinta-ala koostuu pallopinnan puolikkaasta ja ympyrästä.

$$\begin{aligned}A_{\text{kok}}&=A_{\text{puolipallo}}+A_{\text{ympyrä}}\\&=\frac{1}{2}\cdot 4\pi r^2+\pi r^2\\&=\frac{1}{2}\cdot 4\pi\cdot(3{,}0\text{ m})^2+\pi\cdot(3{,}0\text{ m})^2\\&=84{,}823...\text{ m}^2\\&\approx 85\text{ m}^2\end{aligned}$$

Vastaus: 57 m^3 ja 85 m^2

242A. a) Varaston sivujen pituudet ovat a = 2,0 m, b = 2,0 m ja c = 2,5 m.

Lasketaan varaston avaruuslävistäjän pituus
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2{,}0^2 + 2{,}0^2 + 2{,}5^2} = 3{,}7749... \approx 3{,}8$.

Varaston avaruuslävistäjän pituus on noin 3,8 m.

Vastaus: 3,8 m

b) Oksasahan varsi mahtuu varastoon, jos varaston avaruuslävistäjä on pidempi kuin varsi. Avaruuslävistäjä 3,7749… m on suurempi kuin oksasahan varren pituus 3,4 m, joten oksasahan varsi mahtuu varastoon.

Vastaus: mahtuu

243A. a) Putken ulkohalkaisija on 53 mm ja putken paksuus on 4 mm. Putken sisähalkaisija on 53 mm − 2 · 4 mm = 45 mm.

Vastaus: 45 mm

b) Putken tilavuus saadaan kertomalla pohjan pinta-ala putken korkeudella. Pohja on ympyrä, jonka säde on $\frac{45\text{ mm}}{2} = 22{,}5\text{ mm}$.
Muutetaan pituudet desimetreiksi.

22,5 mm = 0,225 dm
190 cm = 19 dm

Putken tilavuus on
$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (0{,}225\text{ dm})^2 \cdot 19\text{ dm} = 3{,}021\ldots\text{ dm}^3$.

Putkeen mahtuu vettä noin 3,0 litraa.

Vastaus: 3,0 litraa

244A. **a)** Sijoitetaan kappaleen tilavuus $V = 905\ \text{m}^3$ ja korkeus $h = 8{,}00$ m lieriön tilavuuden lausekkeeseen ja ratkaistaan siitä pohjan pinta-ala A_{pohja}.

$$
\begin{aligned}
V &= A_{\text{pohja}} \cdot h \\
905 &= A_{\text{pohja}} \cdot 8{,}00 \qquad \| : 8{,}00 \\
A_{\text{pohja}} &= \frac{905}{8} \\
A_{\text{pohja}} &= 113{,}125 \\
A_{\text{pohja}} &\approx 113
\end{aligned}
$$

Kappaleen pohjan pinta-ala on noin 113 m^2.

Vastaus: $A_{\text{pohja}} \approx 113\ \text{m}^2$

b) Sijoitetaan kappaleen tilavuus $V = 905\ \text{m}^3$ ja korkeus $h = 8{,}00$ m kartion tilavuuden lausekkeeseen ja ratkaistaan siitä pohjan pinta-ala A_{pohja}.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h \\
905 &= \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot 8{,}00 \\
905 &= 2{,}666... \cdot A_{\text{pohja}} \qquad \| : 2{,}666... \\
A_{\text{pohja}} &= 339{,}375 \\
A_{\text{pohja}} &\approx 339\ \text{m}^2
\end{aligned}
$$

Kappaleen pohjan pinta-ala on noin 339 m^2.

Vastaus: $A_{\text{pohja}} \approx 339\ \text{m}^2$

245A. **a)** 1,5 l = 1,5 dm^3 = 1500 cm^3

Vastaus: 1500 cm^3

b) Merkitään kuution muotoisen pakkauksen särmän pituutta kirjaimella a. Pakkauksen tilavuus on $V = a^3$.

Koska tilavuus on toisaalta V = 1500 cm^3, saadaan yhtälö $1500 = a^3$.

Ratkaistaan yhtälöstä särmän pituus a.

$$
\begin{aligned}
1500 &= a^3 \\
a &= \sqrt[3]{1500} \\
a &= 11,447...
\end{aligned}
$$

Pakkauksen särmän pituus on noin 11 cm.

Vastaus: 11 cm

c) Pakkaus muodostuu kuudesta samanlaisesta neliöstä. Yhden neliön sivun pituus on b-kohdan mukaan 11,447… cm, joten yhden neliön pinta-ala on A = 11,447… cm · 11,447… cm = 131,037… cm^2.

Pakkaukseen tarvitaan pahvia
6 · 131,037… cm^2 = 786,222… $cm^2 \approx$ 790 cm^2.

Pahvia tarvitaan noin 790 cm^2.

Vastaus: 790 cm^2

246A. **a)** Katto muodostuu suoran ympyrälieriön vaipan puolikkaasta. Vaippa on suorakulmio, jonka toinen sivu on 40 m ja toinen sivu päädyssä olevan puoliympyrän kehän pituus. Lasketaan kehän pituus, kun piin likiarvona käytetään lukua 3.

$$p_{\text{puoliympyrä}} = \frac{2\pi r}{2}$$
$$p_{\text{puoliympyrä}} = \pi r$$
$$p_{\text{puoliympyrä}} = 3 \cdot 5 \text{ m} = 15 \text{ m}$$

Lassen arvio katon pinta-alalle on
$15 \text{ m} \cdot 40 \text{ m} = 600 \text{ m}^2$.

Vastaus: 600 m^2

b) Lasketaan kuinka monta prosenttia 630 m^2 on suurempi kuin 600 m^2.

$$\frac{630 \text{ m}^2}{600 \text{ m}^2} = 1{,}05 = 105 \text{ \%}$$

Todellinen tulos on 105 % arvion tuloksesta, joten todellinen tulos on 105 % − 100 % = 5 % suurempi.

Vastaus: 5 % suurempi

247A. **a)** Suurennoksen mittakaava on 2:1, joten särmän pituus kaksinkertaistuu. Alkuperäinen särmän pituus on 5 cm, joten suurennoksessa se on $2 \cdot 5\text{ cm} = 10\text{ cm}$. Väite on oikein.

Vastaus: oikein

b) Alkuperäisen kuution särmän pituus on 5 cm, joten sen tilavuus on $(5\text{ cm})^3 = 125\text{ cm}^3$. Väite on oikein.

Vastaus: oikein

c) Suurennoksen särmän pituus on 10 cm, joten sen tilavuus on $(10\text{ cm})^3 = 1000\text{ cm}^3$.

Koska $\dfrac{1000\text{ cm}^3}{125\text{ cm}^3} = 8,$ niin suurennoksen tilavuus on 8-kertainen alkuperäisen kuution tilavuuteen nähden. Väite on väärin.

Vastaus: väärin, 8-kertainen

d) Alkuperäisen kuution särmän pituus on 5 cm, ja kuution pinta-ala koostuu kuudesta samanlaisesta neliöstä. Yhden neliön pinta-ala on $(5\text{ cm})^2 = 25\text{ cm}^2$, joten koko kuution pinta-ala on $6 \cdot 25\text{ cm}^2 = 150\text{ cm}^2$.

Suurennoksen särmän pituus on 10 cm, joten yhden neliön pinta-ala on $(10\text{ cm})^2 = 100\text{ cm}^2$. Koko kuution pinta-ala on $6 \cdot 100\text{ cm}^2 = 600\text{ cm}^2$.

Koska $\dfrac{150}{600} = \dfrac{1}{4},$ niin alkuperäisen kuution pinta-ala on neljäsosa suurennoksen pinta-alasta. Väite on oikein.

Vastaus: oikein

248B. **a)** Tennispallon säde on $r = \dfrac{6,7\text{ cm}}{2} = 3,35\text{ cm}$. Tennispallon tilavuus on

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (3,35\text{ cm})^3 = 157,479...\text{ cm}^3 \approx 160\text{ cm}^3.$$

Vastaus: 160 cm^3

b) Pakkaus on suoran ympyrälieriön muotoinen, sen korkeus on $3 \cdot 6,7$ cm $= 20,1$ cm ja pohjaympyrän säde 3,35 cm.

Pakkauksen tilavuus on
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (3,35\text{ cm})^2 \cdot 20,1\text{ cm} = 708,656\ldots\text{ cm}^3 \approx 710\text{ cm}^3$.

Vastaus: 710 cm^3

c) Pakkauksen sisälle jäävät tyhjän tilan tilavuus saadaan, kun pakkauksen tilavuudesta vähennetään kolmen pallon tilavuus.

Tyhjän tilan tilavuus on
$V = 708,656\ldots\text{ cm}^3 - 3 \cdot 157,479\ldots\text{ cm}^3 = 236,218\ldots\text{ cm}^3 \approx 240\text{ cm}^3$.

Vastaus: 240 cm^3

249B. **a)** Paperista kääritään suora ympyrälieriö. Määritetään lieriön pohjaympyrän säde, kun pohjan piiri on paperin pidempi sivu.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ 29{,}7 \text{ cm} &= 2\pi r \quad \| :2\pi \\ r &= 4{,}726\ldots \text{ cm} \end{aligned}$$

Lieriön tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot (4{,}726... \text{ cm})^2 \cdot 21{,}0 \text{ cm} \\ &= 1474{,}084... \text{ cm}^3 \\ &\approx 1470 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: 1470 cm^3

b) Paperista kääritään suora ympyrälieriö. Määritetään lieriön pohjaympyrän säde, kun pohjan piiri on paperin lyhempi sivu.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ 21{,}0 \text{ cm} &= 2\pi r \quad \| :2\pi \\ r &= 3{,}342\ldots \text{ cm} \end{aligned}$$

Lieriön tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot (3{,}342... \text{ cm})^2 \cdot 29{,}7 \text{ cm} \\ &= 1042{,}281... \text{ cm}^3 \\ &\approx 1040 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: 1040 cm^3

VAHVISTA OSAAMISTA

250B. Pallon sisällä ei ole tyhjää tilaa, jos pallon mitatuista tiedoista laskettu tiheys on sama kuin kuparin annettu tiheys.

Merkitään kuparipallon sädettä kirjaimella r. Muodostetaan yhtälö pallon ympärysmitan avulla ja ratkaistaan siitä säde r.

$$\begin{aligned} 64{,}2\text{ cm} &= 2\pi r \qquad \|:2\pi \\ r &= 10{,}217... \end{aligned}$$

Tiheys saadaan jakamalla massa tilavuudella. Määritetään kuparipallon tilavuus.

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (10{,}217...\text{ cm})^3 = 4468{,}421...\text{ cm}^3$$

Lasketaan tiheys jakamalla pallon massa 37,9 kg = 37 900 g pallon tilavuudella.

$$\frac{37\ 900\text{ g}}{4468{,}421...\text{ cm}^3} = 8{,}481...\text{ g/cm}^3$$

Koska kuparipallon tiheys on pienempi kuin puhtaan kuparin tiheys, pallon sisällä on tyhjää tilaa.

Vastaus: on

251A. Särmien pituuksien suhde on 1:2:3. Merkitään lyhimmän särmän pituutta kirjaimella a, jolloin särmät ovat a, $2a$ ja $3a$.

Särmiön tilavuus on $V = a \cdot 2a \cdot 3a$. Toisaalta särmiön tilavuus on 48 cm^3. Saadaan yhtälö $a \cdot 2a \cdot 3a = 48$. Ratkaistaan siitä pituusyksikkö a.

$$\begin{aligned} a\cdot 2a\cdot 3a &= 48 \\ 6a^3 &= 48 \qquad \|:6 \\ a^3 &= 8 \\ a &= \sqrt[3]{8} \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Särmiön mitat ovat a = 2 cm, $2a$ = 4 cm ja $3a$ = 6 cm.

Vastaus: 2 cm, 4 cm ja 6 cm

252B. **a)** Tiheys 550 kg/m^3 tarkoittaa, että yksi kuutiometri lautaa painaa 550 kilogrammaa. Linnun pöntön massa saadaan laskemalla osien yhteistilavuus ja kertomalla se tiheydellä.

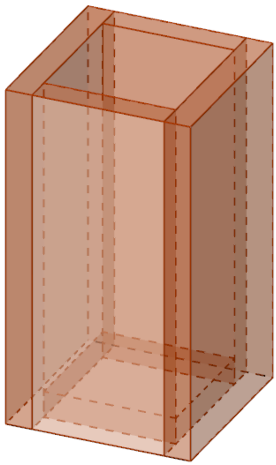
Linnunpönttö koostuu kuudesta suorakulmaisesta särmiöstä, joiden kaikkien korkeus on 2 cm. Lasketaan särmiöiden pohjan yhteispinta-ala ja kerrotaan se korkeudella.

$$\begin{aligned} V &= (26\text{ cm} \cdot 14\text{ cm} \cdot 2 + 14\text{ cm} \cdot 18\text{ cm} + 10\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} \\ &\quad + 26\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} \cdot 2) \cdot 2\text{ cm} \\ &= 3200\text{ cm}^3 \\ &= 0{,}0032\text{ m}^3 \end{aligned}$$

Lasketaan linnunpöntön massa kertomalla tiheys tilavuudella.
$550\text{ kg/m}^3 \cdot 0{,}0032\text{ m}^3 = 1{,}76\text{ kg} \approx 1{,}8\text{ kg}$

Vastaus: 1,8 kg

b) Piirretään kuva tilanteesta. Linnunpöntössä pystyssä on vastakkain kokoa 10 cm · 26 cm olevat osat ja vastakkain kokoa 14 cm · 26 cm olevat osat. Koska pohja on 2 cm paksu, sisäpuolen korkeudeksi tulee 26 cm − 2 cm = 24 cm.



$h_{\text{sisä}} = 26 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$

Viimeinen osa asettuu katoksi kuvan päälle, jolloin sisätilavuus loppuu kuvan seinälautojen yläreunaan. Sisätilavuus on suorakulmainen särmiö, jonka pohjana on 10 cm · 10 cm pala ja jonka korkeus on 24 cm. Lasketaan sisätilavuus.

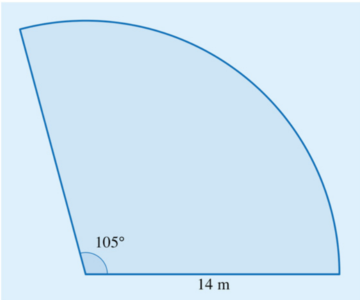
$V = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 24 \text{ cm} = 2400 \text{ cm}^3$

Linnunpöntön sisätilavuus on 2400 cm^3.

Vastaus: 2400 cm^3

253B. Vesi muodostaa lieriön, jonka pohja on sektori.
Lieriön korkeus on 4 mm = 0,04 dm, pohjasektorin keskuskulma 105° ja pohjasektorin säde 14 m = 140 dm.

Piirretään kuva tilanteesta.



Lasketaan muodostuvan lieriön pohjan pinta-ala.

$$A_{\text{pohjasektori}} = \frac{105°}{360°} \cdot \pi \cdot (140\ \text{dm})^2 = 17\ 959{,}433...\ \text{dm}^3$$

Muodostuvan lieriön tilavuus on
$V = 17\ 959{,}439\ldots\ \text{dm}^3 \cdot 0{,}04\ \text{dm} = 718{,}377\ldots\ \text{dm}^3$.

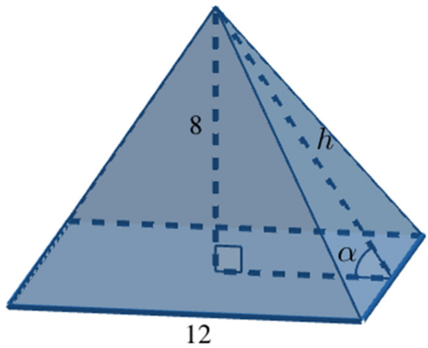
Vettä tarvitaan $718{,}377\ldots\ \text{dm}^3 = 718{,}377\ldots$ l. Lasketaan, kuinka monta minuuttia sadetinta on pidettävä päällä, kun se suihkuttaa 32 litraa minuutissa.

$$\frac{718{,}377...\ \text{l}}{32\ \text{l/min}} = 22{,}449...\ \text{min} \approx 22\ \text{min}\ \ 27\ \text{s}$$

22 minuuttia ei vielä riitä, joten sadetinta on pidettävä toiminnassa 23 minuuttia.

Vastaus: 23 minuuttia

254B. Merkitään sivutahkon korkeutta kirjaimella h ja sivutahkon ja pohjan välistä kulmaa kirjaimella α. Piirretään kuva tilanteesta.



Pyramidin sisälle muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on 8 ja toinen kateetti pohjaneliön sivun puolikas 6. Määritetään sivutahkon korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 8^2+6^2 &= h^2 \\ h^2 &= 100 \\ h &= _{(\pm)}\sqrt{100} \\ h &= 10 \end{aligned}$$

Sivutahko on kolmio, jonka pinta-ala on

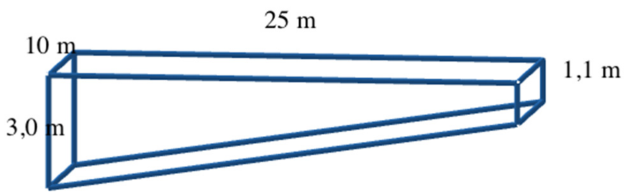
$$A=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 10=60.$$

Määritetään kulman α suuruus tangentin avulla.

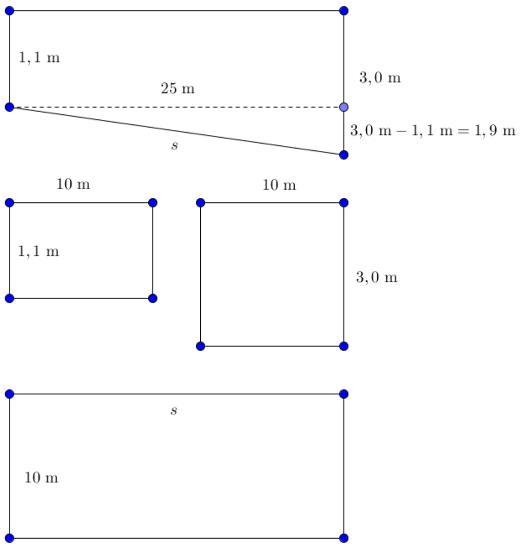
$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{8}{6} \\ \alpha &= 53{,}130...^\circ \\ \alpha &\approx 53{,}13^\circ \end{aligned}$$

Vastaus: 60 ja 53,13°

255B. Piirretään kuva tilanteesta.



Uima-altaan sisäpinta koostuu kahdesta samanlaisesta puolisuunnikkaasta sivuilla ja kolmesta erikokoisesta suorakulmiosta päädyissä ja pohjassa.



Lasketaan pohjasuorakulmion sivun pituus *s* sivuseinään muodostuvan suorakulmaisen kolmion ja Pythagoraan lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
25^2 + 1{,}9^2 &= s^2 \\
s^2 &= 628{,}61 \\
s &= 25{,}072...
\end{aligned}
$$

Lasketaan osien pinta-alat yhteen.

$$\begin{aligned}A_{\text{koko}} &= 2\cdot\frac{1{,}1\text{ m}+3{,}0\text{ m}}{2}\cdot 25\text{ m}+10\text{ m}\cdot 1{,}1\text{ m}+10\text{ m}\cdot 3{,}0\text{ m}+10\text{ m}\cdot 25{,}072\ldots\text{ m}\\&=394{,}220\ldots\text{ m}^2\end{aligned}$$

Yhden laatan pinta-ala on 0,30 m · 0,20 m = 0,06 m^2. Lasketaan kuinka monta laattaa uima-altaan pintaan tarvitaan.

$$\frac{394{,}220\ldots\text{ m}^2}{0{,}06\text{ m}^2}=6570{,}349\ldots$$

Laattoja tarvitaan vähintään 6571 kappaletta. Lasketaan, kuinka monta laatikkoa on ostettava, jotta saadaan tarvittavat laatat.

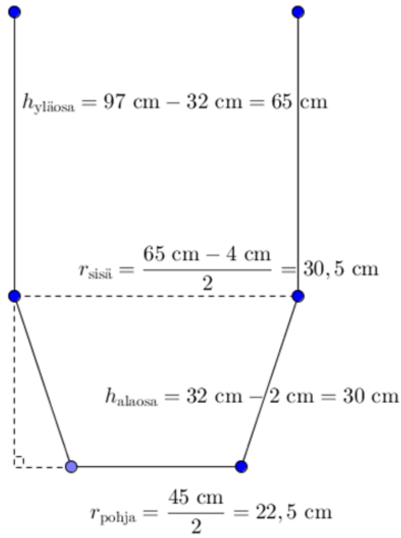
$$\frac{6571}{30}=219{,}033\ldots$$

Tarvitaan siis vähintään 220 laatikkoa laattoja.

Vastaus: 220 laattalaatikkoa

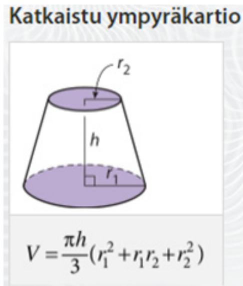
256B. Tommin ostaman kompostikäymälän sisäosa koostuu suorasta ympyräpohjaisesta lieriöstä ja suorasta katkaistusta ympyräkartiosta.

Lasketaan osien pituudet kuvan avulla.



Yläosan lieriön tilavuus on
$V = \pi \cdot (30{,}5\text{ cm})^2 \cdot 65\text{ cm} = 189\,960{,}326\ldots\text{ cm}^3$.

Katkaistun kartion tilavuus voidaan laskea oheisella kaavalla.



$$V_{\text{alaosa}} = \frac{\pi \cdot 30\text{ cm}}{3} \cdot ((22{,}5\text{ cm})^2 + 22{,}5\text{ cm} \cdot 30{,}5\text{ cm} + (30{,}5\text{ cm})^2)$$
$$= 66\,688{,}158...\text{ cm}^3$$

Sisätilavuus on yhteensä
$189\,960{,}326\ldots\text{ cm}^3 + 66\,688{,}158\ldots\text{ cm}^3$
$= 256\,648{,}484\ldots\text{ cm}^3 \approx 260\,000\text{ cm}^3 = 260\text{ dm}^3 = 260\text{ l}$.

Vastaus: 260 litraa

257B. Sulava jää muuttuu vedeksi. Veden voidaan ajatella muodostavan lieriön, jonka korkeus on vedenpinnan kohoama. Lasketaan veden tilavuus, kun 30 % jäästä sulaa.

$V_{\text{sulava jää}} = 0{,}3 \cdot 1\ 834\ 000\ \text{km}^2 \cdot 2\ \text{km} = 1\ 100\ 400\ \text{km}^3$

Sulavan jään massa on yhtä suuri kuin sulamisesta syntyvän veden massa. Lasketaan sulavan jään massa, joka saadaan kertomalla jään tilavuus sen tiheydellä.

$$\begin{aligned} m &= 1\ 100\ 400\ \text{km}^3 \cdot 0{,}9\ \text{kg/dm}^3 \\ &= 1\ 100\ 400\ 000\ 000\ 000\ 000\ \text{dm}^3 \cdot 0{,}9\ \text{kg/dm}^3 \\ &= 9{,}9036 \cdot 10^{17}\ \text{kg} \end{aligned}$$

Lasketaan veden tilavuus tiheyden avulla. Veden tilavuus saadaan jakamalla sen massa tiheydellä.

$$\frac{9{,}9036 \cdot 10^{17}\ \text{kg}}{1\ \text{kg/dm}^3} = 9{,}9036 \cdot 10^{17}\ \text{dm}^3 = 990\ 360\ \text{km}^3$$

Lasketaan merien pinta-ala, joka on sulavan veden lieriön pohja.

$A_{\text{meret}} = 0{,}71 \cdot 4 \cdot \pi \cdot (6400\ \text{km})^2 = 365\ 450\ 163{,}658\ldots\ \text{km}^2$

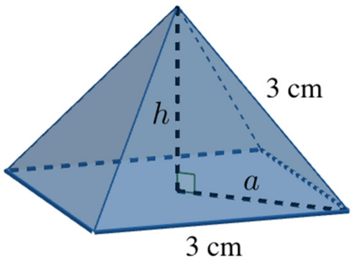
Merkitään vedeksi sulaneen jään muodostaman lieriön korkeutta kirjaimella h. Muodostetaan yhtälö lieriön tilavuuden kaavan avulla ja ratkaistaan siitä veden pinnan kokouma h.

$$\begin{aligned} V &= A_p \cdot h \\ 990\ 360 &= 365\ 450\ 163{,}658... \cdot h \quad \| : 365\ 450\ 163{,}658... \\ h &= 0{,}002709... \end{aligned}$$

Veden pinta nousisi $0{,}002709\ldots\ \text{km} = 2{,}709\ldots\ \text{m} \approx 2{,}7\ \text{m}$.

Vastaus: 2,7 m

258B. Lasketaan valmistettavan pelinappulan tilavuus. Merkitään pyramidin muotoisen nappulan korkeutta kirjaimella h ja pohjan lävistäjän puolikasta kirjaimella a. Piirretään kuva tilanteesta.



Koska pohja on neliö, pohjan lävistäjän puolikas a on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateetit ovat 1,5 cm pitkiä.

Määritetään pohjan lävistäjän puolikkaan pituus a Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 1{,}5^2 + 1{,}5^2 &= a^2 \\ a^2 &= 4{,}5 \\ a &= _{(\pm)}\sqrt{4{,}5} \\ a &= 2{,}121... \end{aligned}$$

Korkeusjana h muodostaa suorakulmaisen kolmion sivusärmän ja pohjan halkaisijan puolikkaan a kanssa. Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan siitä korkeus h.

$$\begin{aligned} h^2 + 2{,}121...^2 &= 3^2 \\ h^2 &= 4{,}5 \\ h &= _{(\pm)}\sqrt{4{,}5} \\ h &= 2{,}121... \end{aligned}$$

Kuuden pyramidin tilavuus on

$$V = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot (3\text{ cm})^2 \cdot 2{,}121...\text{ cm} = 38{,}183...\text{ cm}^3.$$

Raakamuovihelmen säde on 2 mm = 0,2 cm.

Yhden raakamuovihelmen tilavuus on $V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(0{,}2\text{ cm})^3=0{,}033...\text{ cm}^3$.

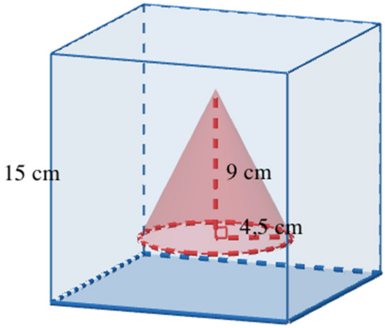
Lasketaan, kuinka monta helmeä peliin tarvitaan.

$$\frac{38{,}183...\text{ cm}^3}{0{,}033...\text{ cm}^3}=1139{,}462...$$

Helmiä tarvitaan yhteen peliin noin 1140 kappaletta.

Vastaus: 1140 helmeä

259B. Styrox-palloilla täytettävä tila lasketaan vähentämällä kuution tilavuudesta kartion tilavuus. Kartion ja laatikon reunojen väliin on jäätävä 3 cm pehmustetta, joten kartion korkeus voi olla enintään
$15\text{ cm} - 2 \cdot 3\text{ cm} = 9\text{ cm}$ ja pohjaympyrän halkaisija
$15\text{ cm} - 2 \cdot 3\text{ cm} = 9\text{ cm}$. Piirretään kuva tilanteesta.



Lasketaan kartion tilavuus.

$$V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (4{,}5\text{ cm})^2 \cdot 9\text{ cm} = 190{,}851...\text{ cm}^3$$

Lasketaan kuution tilavuus.
$V_{\text{kuutio}} = (15\text{ cm})^3 = 3375\text{ cm}^3$

Styrox-palloilla täytettävä tilavuus on
$3375\text{ cm}^3 - 190{,}851\ldots\text{ cm}^3 = 3184{,}148\ldots\text{ cm}^3$.

Pallojen väliin jää 40 % tyhjää tilaa, joten styrox-pallojen yhteistilavuus on oltava $0{,}60 \cdot 3184{,}148\ldots\text{ cm}^3 = 1910{,}488\ldots\text{ cm}^3$.

Lasketaan yhden styrox-pallon tilavuus.

$$V_{\text{helmi}} = \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}3\text{ cm})^3 = 0{,}113...\text{ cm}^3$$

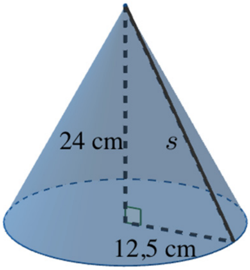
Lasketaan, kuinka monta palloa tarvitaan.

$$\frac{1910{,}488...\text{ cm}^3}{0{,}113...\text{ cm}^3} = 16\,892{,}431... \approx 17\,000$$

Palloja mahtuu laatikkoon noin 17 000 kappaletta.

Vastaus: 17 000 palloa

260B. Leikattavan sektorin säde on kartion sivujana ja sektorin kaaren pituus kartion pohjan kehän pituus. Merkitään sivujanan pituutta kirjaimella s. Piirretään kuva.



Lasketaan sektorin säde s Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 24^2 + 12{,}5^2 &= s^2 \\ s^2 &= 732{,}25 \\ s &= {\scriptstyle(}\pm{\scriptstyle)}\sqrt{732{,}25} \\ s &= 27{,}060... \end{aligned}$$

Sektorin keskuskulma voidaan määrittää sektorin kaaren pituuden kaavan avulla. Lasketaan sektorin kaaren pituus määrittämällä kartion pohjaympyrän kehän pituus.

$p = 2\pi \cdot 12{,}5 \text{ cm} = 78{,}539\ldots \text{ cm}$

Muodostetaan yhtälö sektorin kaaren pituuden avulla ja ratkaistaan siitä sektorin keskuskulma α.

$$\begin{aligned} 78{,}539... &= \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 27{,}060... && \|: 2\pi \\ \frac{\alpha}{360°} \cdot 27{,}060... &= 12{,}5 && \|: 27{,}060... \\ \frac{\alpha}{360°} &= 0{,}461... && \| \cdot 360° \\ \alpha &= 166{,}296...° \\ \alpha &\approx 166° \end{aligned}$$

Sektorin säde on 27 cm ja keskuskulma 166°.

Vastaus: 27 cm ja 166°

261A. Merkitään suuremman lasimaljakon korkeutta kirjaimella *h*. Pienemmän lasimaljakon korkeus on tällöin 0,6*h*.

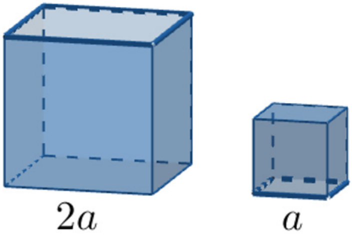
Mittakaava on $k = \dfrac{0{,}6h}{h} = 0{,}6$.

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio, joten
$$\frac{V_{\text{pieni}}}{V_{\text{iso}}} = k^3 = 0{,}6^3 = 0{,}216.$$

Pienemmän lasimaljakon tilavuus on 21,6 % suuremman lasimaljakon tilavuudesta.

Vastaus: 21,6 %

262A. Merkitään pienemmän kuution särmän pituutta kirjaimella a, jolloin suuremman kuution särmän pituus on $2a$.



a) Lasketaan kuutioiden tilavuudet.
$V_{\text{pieni}} = a^3$
$V_{\text{iso}} = (2a)^3 = 8a^3$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia pienen kuution tilavuus on ison kuution tilavuudesta.

$$\frac{a^3}{8a^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Pienen kuution tilavuus on siis $1 - 0{,}125 = 0{,}875 = 87{,}5$ % pienempi kuin iso kuution tilavuus, joten särmän puolittaminen pienentää kuution tilavuutta 87,5 %.

Vastaus: 87,5 %

b) Lasketaan kuutioiden sivutahkojen pinta-alat.
$A_{\text{pieni}} = 6 \cdot a^2$
$A_{\text{iso}} = 6 \cdot (2a)^2 = 24a^2$

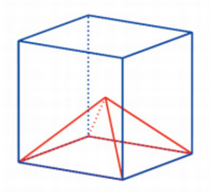
Lasketaan, kuinka monta prosenttia pienen kuution pinta-ala on ison kuution pinta-alasta.

$$\frac{6a^2}{24a^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Pienen kuution pinta-ala on siis $1 - 0{,}25 = 0{,}75 = 75$ % pienempi kuin iso kuution pinta-ala, joten särmän puolittaminen pienentää kuution pinta-alaa 75 %.

Vastaus: 75 %

263B. Merkitään kuution särmän pituutta kirjaimella s.



Kuution tilavuus on $V_{\text{kuutio}} = s^3$.

Pyramidin pohjan pinta-ala on s^2 ja korkeus $\frac{1}{2}s$. Pyramidin tilavuus on

$$V_{\text{pyramidi}} = \frac{1}{3}A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot s^2 \cdot \frac{1}{2}s = \frac{1}{6}s^3 = \frac{1}{6}V_{\text{kuutio}}.$$

Koska pyramidin tilavuus on kuudesosa kuution tilavuudesta, pyramidin tilavuuden suhde kuution tilavuuteen on 1:6.

Vastaus: 1:6

264B. Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, joten

$$k^2 = \frac{A_{\text{pieni}}}{A_{\text{iso}}} = \frac{1}{4}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Yhdenmuotoisen kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio, joten

$$\frac{V_{\text{pieni}}}{V_{\text{iso}}} = k^3$$

$$\frac{3,0}{V_{\text{iso}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \| \cdot V_{\text{iso}}$$

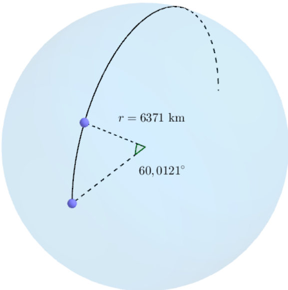
$$V_{\text{iso}} \cdot \frac{1}{8} = 3,0 \quad \| \cdot 8$$

$$V_{\text{iso}} = 24$$

Isomman laatikon tilavuus on 24 l.

Vastaus: 24 litraa

265B. Piirretään kuva tilanteesta.



Pohjoisen leveyspiirin asteluku ilmaisee kulman, jonka kyseinen leveyspiiri poikkeaa päiväntasaajasta. Tällöin lyhin matka Oulusta päiväntasaajalle Maapallon pintaa pitkin on kuvaan muodostuneen sektorin kaaren pituus. Lasketaan matka Oulusta päiväntasaajalle.

$$b = \frac{60,0121°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6371 \text{ km} = 6673,041... \text{ km} \approx 6673 \text{ km}$$

Lyhin matka Maapallon pintaa pitkin Oulusta päiväntasaajalle on noin 6673 km.

Vastaus: 6673 km

266B. **a)** Länsirajan pituus on kuvassa kulman α rajaaman sektorin kaaren pituus. Sektorin säde on maapallon säde 6371 km ja keskuskulma α on $41° - 37° = 4°$.

Lasketaan sektorin kaaren pituus.

$$b = \frac{4°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6371 \text{ km} = 444,779... \text{ km} \approx 445 \text{ km}$$

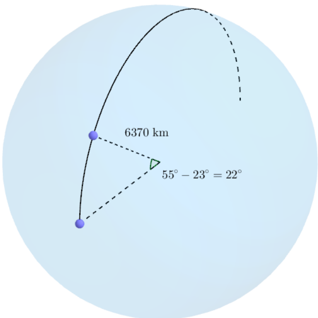
Coloradon osavaltion länsirajan pituus on noin 445 km.

Vastaus: 445 km

b) Coloradon osavaltion eteläraja kulkee 37. leveyspiiriä ja pohjoisranta 41. leveyspiiriä pitkin. Molemmat ovat saman asteluvun suuruisia ympyrän kaaria. Leveyspiiri on sitä pidempi, mitä lähempänä päiväntasaajaa se on, joten samaa astelukua vastaavista leveyspiirin osista lähempänä päiväntasaajaa oleva on pidempi. Siis Coloradon osavaltion eteläraja on pohjoisrajaa pidempi.

Vastaus: eteläraja

267B. Lyhin matka, jonka kivihiiliesiintymä on kulkenut, on pituuspiiriä pitkin. Tälläin lyhin kuljettu matka on Maapallon pintaa pitkin siten, että matka on 55° − 23° = 22° sektorin kaaren pituus. Piirretään kuva tilanteesta.



Lasketaan kivihiiliesiintymän kulkema matka.

$$b = \frac{22°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6370 \text{ km} = 2445{,}904... \text{ km}$$

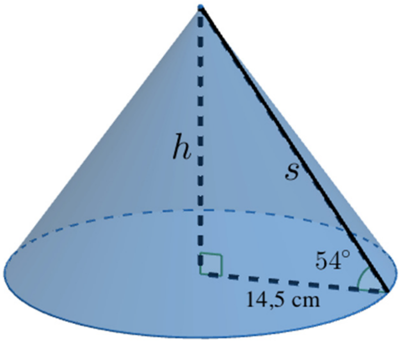
Kivihiiliesiintymä ja samalla myös Britannia on liikkunut vähintään 2446 km matkan. Tähän kului 300 000 000 vuotta. Lasketaan, kuinka pitkän matkan Britannia liikkui keskimäärin vuodessa.

$$\frac{2445{,}904... \text{ km}}{300\ 000\ 000 \text{ a}} = 0{,}000008153... \text{ km/a} = 8{,}153... \text{ mm/a} \approx 8{,}15 \text{ mm/a}$$

Britannia liikkui keskimäärin 8,15 mm vuodessa.

Vastaus: 2446 km ja 8,15 mm vuodessa

268B. Koska kolmio on suorakulmainen, terävien kulmien suuruudet ovat 54° ja 90° − 54° = 36°. Pidempi kateeteista on suurempaa kulmaa vastapäätä. Merkitään pidemmän kateetin sivun pituutta kirjaimella *h* ja kolmion hypotenuusaa eli muodostuvan kartion sivujanaa kirjaimella *s*. Piirretään kuva tilanteesta.



Lasketaan kolmion toisen kateetin pituus *h* ja hypotenuusan pituus *s* suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla.

$$\tan 54° = \frac{h}{14{,}5} \quad \| \cdot 14{,}5$$
$$h = 19{,}957...$$

$$\cos 54° = \frac{14{,}5}{s} \quad \| \cdot s$$
$$s \cdot \cos 54° = 14{,}5 \quad \| : \cos 45°$$
$$s = 24{,}668...$$

Lasketaan tietojen avulla kartion tilavuus.

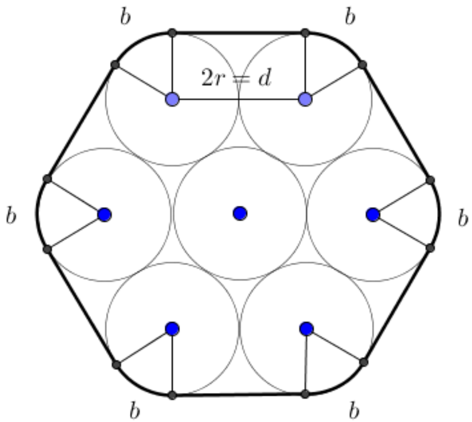
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (14{,}5\text{ cm})^2 \cdot 19{,}957...\text{ cm} = 4394{,}116...\text{ cm}^3 \approx 4390\text{ cm}^3$$

Lasketaan tietojen avulla kartion vaipan pinta-ala.
$A = \pi \cdot 14{,}5\text{ cm} \cdot 24{,}668\ldots\text{ cm} = 1123{,}743\ldots\text{ cm}^2 \approx 1120\text{ cm}^2$

Vastaus: 4390 cm^3 ja 1120 cm^2

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

269B. Piirretään kuvaan apuviivoja. Johtimen halkaisija on $d = 1$ mm, joten säde on $r = 0{,}5$ mm.



Tasoon levitettynä kuori muodostaa suorakulmion, jonka toinen sivu koostuu kuudesta johtimen halkaisijan mittaisesta osasta ja kuudesta sektorin kaaren pituudesta b. Asettamalla kuvaan piirretyt sektorit vierekkäin havaitaan sektorien muodostavan yhteensä yhden kokonaisen ympyrän.

Kuoren sivun pituus on siis $6d + 2\pi r$.

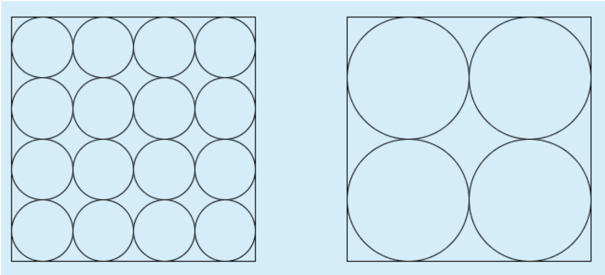
$6 \cdot 1 \text{ mm} + 2 \cdot \pi \cdot 0{,}5 \text{ mm} = 9{,}1415\ldots \text{ mm} = 0{,}91415\ldots \text{ cm}$

Kuoren suorakulmion toisen sivun pituus on 2 m = 200 cm. Lasketaan kuoren pinta-ala.

$A = 0{,}91415\ldots \text{ cm} \cdot 200 \text{ cm} = 182{,}831\ldots \text{ cm}^2 \approx 183 \text{ cm}^2$

Vastaus: 183 cm^2

270B. Havainnollistetaan pakkaamista kuvalla.



Olkoon pakkauksen särmän pituus a ja mandariinin säde b, jolloin appelsiinin säde on $2b$. Määritetään mandariinin ja appelsiinin tilavuudet b:n avulla.

$$V_\mathrm{m} = \frac{4}{3}\pi b^3 \text{ ja } V_a = \frac{4}{3}\pi(2b)^3 = \frac{32}{3}\pi b^3$$

Laatikon tilavuus on a^3.

Mandariineja mahtuu yhteen riviin vierekkäin $\frac{a}{2b}$ kappaletta, joten niitä mahtuu laatikkoon $\left(\frac{a}{2b}\right)^3 = \frac{a^3}{8b^3}$ kappaletta.

Appelsiineja mahtuu yhteen riviin vierekkäin $\frac{a}{2\cdot 2b} = \frac{a}{4b}$ kappaletta, joten niitä mahtuu laatikkoon $\left(\frac{a}{4b}\right)^3 = \frac{a^3}{64b^3}$ kappaletta.

Lukumäärien suhde on $\dfrac{\left(\frac{a^3}{8b^3}\right)}{\left(\frac{a^3}{64b^3}\right)} = \dfrac{a^3}{8b^3}\cdot\dfrac{64b^3}{a^3} = \dfrac{84}{8} = 8$.

Mandariineja mahtuu 8-kertainen määrä suhteessa appelsiineihin, joten niitä mahtuu 800% − 100 % = 700 % enemmän.

Lasketaan tyhjän tilan määrät, kun appelsiineja pakataan *n* kappaletta ja mandariineja pakataan 8*n* kappaletta.

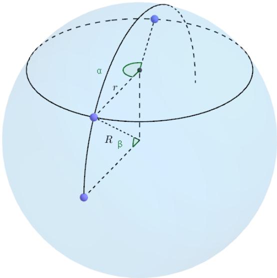
$$V_{\text{tyhjä,a}} = a^3 - n \cdot \frac{32}{3}\pi b^3$$

$$V_{\text{tyhjä,m}} = a^3 - 8n \cdot \frac{4}{3}\pi b^3 = a^3 - n \cdot \frac{32}{3}\pi b^3$$

Tyhjän tilan määrä on yhtä suuri.

Vastaus: 700 % enemmän, yhtä paljon tyhjää tilaa

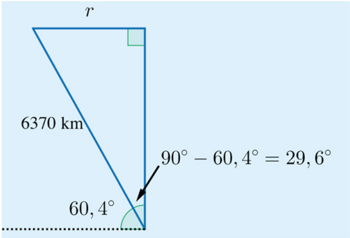
271B. Havainnollistetaan tilannetta kuvan avulla.



Jos Whitehorsen ja Keravan yhteenlaskettu poikkeama nollapituuspiiristä on alle 180°, on Keravalta lyhempi kulkea nollapituuspiirin suuntaan eli länteen. Lasketaan poikkeamien summa.
25,10° + 135,06° = 160,16°

Keravalta on lyhempi matka kulkea pituuspiiriä pitkin suoraan länteen, jotta päästään Whitehorseen.

Matka on pallon pinnalle muodostuneen kulman α = 160,16° rajaaman sektorin kaaren pituus. Sektorin säde r voidaan määrittää pallon sisälle muodostuneen suorakulmaisen kolmion avulla.



Muodostetaan yhtälö sinin avulla ja ratkaistaan siitä säde r.

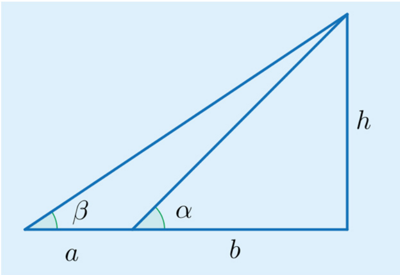
$$\sin 29{,}6° = \frac{r}{6370} \qquad \| \cdot 6370$$
$$r = 3146{,}409...$$

Lasketaan sektorin kaaren pituus.

$$b = \frac{160{,}16°}{360°} 2\pi \cdot 3146{,}409... \text{ km} = 8795{,}219... \text{ km} \approx 8800 \text{ km}$$

Vastaus: länteen, 8800 km

272B. Sekstantin avulla voidaan mitata kulma, jossa vuoren huippu näkyy. Esimerkiksi mitataan kulma β, jossa vuori näkyy jossakin kohdassa. Tämän jälkeen kuljetaan suoraan kohti vuorta, jokin tietty matka a ja mitataan uudestaan kulma α, jossa vuori näkyy. Näiden tietojen avulla voidaan laskea vuoren korkeus.



Muodostetaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \tan\beta = \dfrac{h}{a+b} \\ \tan\alpha = \dfrac{h}{b} \end{cases}$$

Yhtälöparista voidaan ratkaista vuoren korkeus h, kun tunnetaan a, α ja β.

Vastaus: –

273B. Merkitään pienen munkin sädettä kirjaimella r ja ison munkin sädettä kirjaimella R, jolloin pienen munkin tilavuus on $\frac{4}{3}\pi r^3$ ja ison munkin tilavuus $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Molempiin vaihtoehtoihin käytettävän taikinan tilavuus on yhtä suuri.

$$
\begin{aligned}
3V_{\text{iso}} &= 24V_{\text{pieni}} \\
3\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 &= 24\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 && \|:\pi \\
4R^3 &= 32r^3 && \|:4 \\
R^3 &= 8r^3 \\
R &= \sqrt[3]{8r^3} \\
R &= 2r
\end{aligned}
$$

Ison munkin säde on siis kaksi kertaa pienen munkin säde.

Lasketaan molempien pinta-alat.

$A_{\text{isot}} = 3 \cdot 4\pi \cdot (2r)^2 = 48\pi r^2$
$A_{\text{pienet}} = 24 \cdot 4\pi \cdot r^2 = 96\pi r^2$

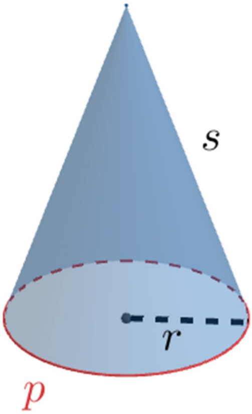
Lasketaan pinta-alojen suhde.

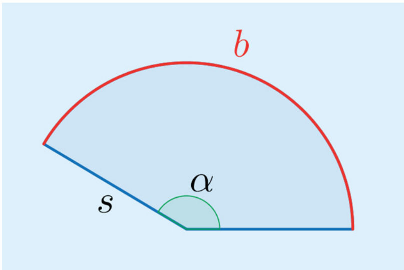
$$\frac{96\pi r^2}{48\pi r^2} = 2$$

Pieniin munkkeihin tarvitaan kaksinkertainen määrä sokeria suhteessa isoihin munkkeihin. Suhde on tällöin 1:2.

Vastaus: 1:2

274B. Piirretään kuva tilanteesta.





Suoran ympyräkartion vaippa on sektori, jonka pinta-ala voidaan laskea kaavalla $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi s^2$, jossa s on sektorin säde.

Toisaalta sektorin kaari ja kartion pohjaympyrän kehä ovat yhtä pitkät.

$$\begin{aligned} p &= b \\ 2\pi r &= \frac{\alpha}{360°} 2\pi s \quad && \|: 2\pi s \\ \frac{\alpha}{360°} &= \frac{r}{s} && \| \cdot 360° \\ \alpha &= 360° \frac{r}{s} \end{aligned}$$

Sijoitetaan keskuskulman lauseke sektorin pinta-alan kaavaan.

$$A = \frac{360° \frac{r}{s}}{360°} \cdot \pi s^2 = \frac{r}{s} \cdot \pi \cdot s^2 = \pi r s$$

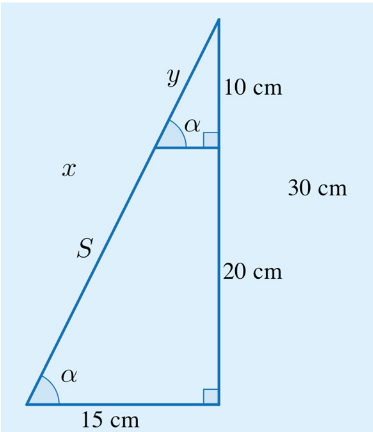
Vastaus: −

275B. a) Ympyräkartion korkeus on $h = 30$ cm ja pohjan halkaisija on $d = 30$ cm. Pohjan säde on $r = 15$ cm.

Poisleikatun osan korkeus $k = 10$ cm, joten varjostimen korkeus on $l = 30\text{ cm} - 10\text{ cm} = 20\text{ cm}$.

Piirretään poikkileikkauskuva tilanteesta. Merkitään kuvaan varjostimen sivujana S, alkuperäisen ympyräkartion sivujana x ja poisleikatun ympyräkartion sivujanan y.

Kuvioon muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota, joilla on yksi yhteinen kulma. Kolmiot ovat yhdenmuotoisia.



Ratkaistaan sivujanan x pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 30^2 + 15^2$$
$$x = 33{,}541\ldots\text{(cm)}$$

Ratkaistaan kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{30}{15}$$
$$\alpha = 63{,}434\ldots°$$

Ratkaistaan sivujanan y pituus sinin avulla.

$$\begin{aligned} \sin 63{,}434...^\circ &= \frac{10}{y} && \| \cdot y \\ \sin 63{,}434...^\circ y &= 10 && \| : \sin 63{,}434...^\circ \\ y &= 11{,}180...\,(\text{cm}) \end{aligned}$$

Varjostimen sivujanan pituus on
$S = x - y = 33{,}541\ldots \text{ cm} - 11{,}180\ldots \text{ cm} = 22{,}360\ldots \text{ cm} \approx 22{,}4 \text{ cm}.$

Vastaus: $S = 22{,}4$ cm

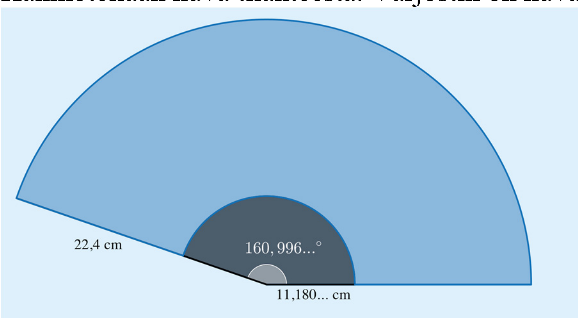
b) Kun varjostin levitetään tasoon, se näyttää ympyräsektorilta, jonka keskeltä on leikattu pois pieni sektori.

Ison sektorin säde on $x = 33{,}541\ldots$ cm ja pienen sektorin säde $y = 11{,}180\ldots$ cm.

Keskuskulmien suuruus β saadaan laskettua sopivalla ohjelmalla sektorin pohjaympyrän kehän pituuden p ja sektorin kaaren pituuden b avulla.

$$\begin{aligned} p_{\text{pohjaympyrä}} &= b_{\text{iso sektori}} \\ 2\pi \cdot r &= \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot x \\ 2\pi \cdot 15 &= \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 33{,}541... \\ \beta &= 160{,}996...^\circ \\ \beta &\approx 161^\circ \end{aligned}$$

Hahmotellaan kuva tilanteesta. Varjostin on kuvassa oleva sininen osa.



c) Varjostimen pinta-ala saadaan, ison sektorin pinta-alasta ja vähennetään pienen sektorin pinta-ala.

$$A_{\text{iso sektori}} = \frac{\beta}{360°} \cdot \pi \cdot x^2 = \frac{160,996...°}{360°} \cdot \pi \cdot 33,541...^2 = 1580,583... \quad (\text{cm}^2)$$

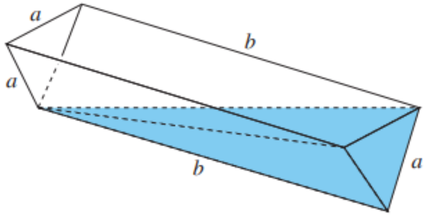
$$A_{\text{pieni sektori}} = \frac{\beta}{360°} \cdot \pi \cdot y^2 = \frac{160,996...°}{360°} \cdot \pi \cdot 11,180...^2 = 175,620... \quad (\text{cm}^2)$$

$$\begin{aligned} A_{\text{varjostin}} &= 1580,583\ldots\ \text{cm}^2 - 175,620\ \text{cm}^2 \\ &= 1404,962\ldots\text{cm}^2 \approx 1405\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 1405 cm^2

276B. **a)** Poistuneen veden määrä voidaan laskea vähentämällä kaukalon tilavuudesta jäljellä olevan veden määrä.

$b = 200$ cm ja $a = 30$ cm



Kaukalo on särmiö, jonka pohjana on tasasivuinen kolmio ja jäljellä olevan veden määrä on kartio, jonka pohjana on sama tasasivuinen kolmio.

$$V_{\text{kaukalo}} = A_{\text{kolmio}} \cdot 200 \text{ cm}$$
$$V_{\text{jäljellä oleva vesi}} = \frac{1}{3} A_{\text{kolmio}} \cdot 200 \text{ cm}$$

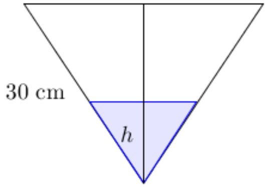
Tyhjää tilaa on tällöin

$$\begin{aligned} V_{\text{tyhjä}} &= V_{\text{kaukalo}} - V_{\text{jäljellä oleva vesi}} \\ &= A_{\text{kolmio}} \cdot 200 \text{ cm} - \frac{1}{3} A_{\text{kolmio}} \cdot 200 \text{ cm} \\ &= \frac{2}{3} A_{\text{kolmio}} \cdot 200 \text{ cm} \end{aligned}$$

Tyhjä tila on siis $\frac{2}{3} = 0{,}666... \approx 0{,}67 = 67\ \%$ kaukalon tilavuudesta.

Vastaus: 67 %

b) Piirretään kuva päädystä.



Päätykolmio ja veden peittämä kolmio ovat yhdenmuotoiset. Koska veden tilavuus särmiössä on a-kohdan mukaan kolmasosa alkuperäisestä, veden peittämän kolmion pinta-ala on kolmasosa päätykolmion pinta-alasta.

Merkitään päätykolmion korkeutta kirjaimella H ja veden peittämän kolmion korkeutta kirjaimella h. Pinta-alojen suhde 1:3 on mittakaavan $h{:}H$ neliö. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä korkeuksien h ja H suhde.

$$\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{1}{3}$$
$$\frac{h}{H} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{h}{H} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Määritetään kaukalon päätykolmion korkeus H Pythagoraan lauseen avulla.

$$H^2 + 15^2 = 30^2$$
$$H^2 = 675$$
$$H = {}_{(}\pm_{)}\sqrt{675}$$
$$H = {}_{(}\pm_{)}25{,}980...$$

Muodostetaan mittakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä veden syvyys h.

$$\frac{h}{25{,}980...\text{ cm}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \| \cdot 25{,}980...\text{ cm}$$
$$h = 15\text{ cm}$$

Veden syvyys kaukalossa kallistuksen jälkeen on 15 cm.

Vastaus: 15 cm