7 TODENNÄKÖISYYSLASKENTAA

ALOITA PERUSTEISTA

277A. **a)** $8! = 40\,320$

Vastaus: 40 320

b) $\binom{15}{6} = 5005$

Vastaus: 5005

c) $\binom{7}{7} = 1$

Vastaus: 1

278A. Tuloperiaatteen mukaan asukokonaisuuksia on $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Vastaus: 16 asukokonaisuutta

279A. **a)** Koska 303:sta lukiolaisesta 282 asuu vanhempiensa luona, on kysytty todennäköisyys $\frac{282}{303} = 0{,}930... \approx 0{,}93$.

Vastaus: 0,93

b) Tapahtuma ”ei asu vanhempiensa luona” on a-kohdan tapahtuman vastatapahtuma, joten todennäköisyys on
$1 - 0{,}930\ldots = 0{,}0693\ldots \approx 0{,}069$.

Vastaus: 0,069

280A. **a)** Tapahtuman ”arpakuution silmäluku” kaikki alkeistapaukset ovat silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Vastaus: silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6

b) Tapahtumalle ”arpakuution silmäluku on vähintään 5” suotuisat alkeistapaukset ovat silmäluvut 5 ja 6.

Vastaus: silmäluvut 5 ja 6

c) a-kohdan perusteella nopalla on 6 mahdollista silmälukua ja b-kohdan perusteella suotuisia silmälukuja on 2.

$$P(\text{arpakuution heitossa silmäluku on vähintään } 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Noppaa heittämällä silmäluku on vähintään 5 todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$.

Vastaus: $\frac{1}{3}$

281A. **a)** Mustikoita on yhteensä 5 + 9 = 14 ja niistä 9 on kypsiä, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{9}{14}$.

Vastaus: $\frac{9}{14}$

b) Jos kulhosta otetaan yksi kypsä mustikka, kulhoon jää 13 mustikkaa. Jäljelle jäävistä mustikoista kypsiä on 8, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{8}{13}$.

Vastaus: $\frac{8}{13}$

c) Kun ensimmäinen mustikka nostetaan, niin todennäköisyys saada kypsä mustikka a-kohdan mukaan on $\frac{9}{14}$. Toista mustikkaa nostettaessa todennäköisyys saada kypsä mustikka b-kohdan mukaan on $\frac{8}{13}$. Todennäköisyys, että kulhosta umpimähkään otetut kaksi mustikkaa ovat molemmat kypsiä, saadaan kertolaskusäännöllä
$\frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{36}{91}$.

Vastaus: $\frac{36}{91}$

282A. **a)** Kuusi opiskelijaa voivat olla $6! = 720$ eri järjestyksessä.

Vastaus: 720 järjestyksessä

b) a-kohdan järjestyksistä yksi on sellainen, jossa opiskelijat ovat pituusjärjestyksessä lyhimmästä pisimpään ja yksi järjestyksistä on sellainen, jossa opiskelijat ovat pituusjärjestyksessä pisimmästä lyhimpään.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{2}{720} = \frac{1}{360}$.

Vastaus: $\frac{1}{360}$

283A. Merkitään A = ”esitys on tanssiesitys” ja B = ”esitys on lauluesitys”. Näin ollen $P(A) = 0{,}30$ ja $P(B) = 0{,}40$.

a) Oletetaan, että sama esitys on vain tanssiesitys tai vain lauluesitys, joten A ja B oletetaan erillisiksi. Koska tapahtumat A ja B ovat erillisiä, niin $P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) = 0{,}30 + 0{,}40 = 0{,}70 = 70\ \%$.

Vastaus: 70 %

b) Tapahtuma ”esitys ei ole tanssi- eikä lauluesitys” on tapahtuman ”esitys on tanssi- tai lauluesitys” vastatapahtuma, joten
P(esitys ei ole tanssi- eikä lauluesitys) $= 1 - 0{,}70 = 0{,}30 = 30\ \%$.

Vastaus: 30 %

284A. **a)** A = ”Nenna tulee huomenna ajoissa kouluun”

Tapahtuman A vastatapahtuma on $\overline{A}$ = ”Nenna ei tule huomenna ajoissa kouluun”

Vastaus: ”Nenna ei tule huomenna ajoissa kouluun”

b) A = ”Nenna tulee ainakin joskus ajoissa kouluun”

Tapahtuman A vastatapahtuma on $\overline{A}$ = ”Nenna ei koskaan tule ajoissa kouluun”

Vastaus: ”Nenna ei koskaan tule ajoissa kouluun”

285A. A Alkeistapaukset ovat satunnaisilmiön mahdollisia tuloksia, joten A ja IV kuuluvat yhteen.

B Riippumattomat tapahtumat eivät vaikuta toistensa todennäköisyyteen, joten B ja II kuuluvat yhteen.

C Erilliset tapahtumat ovat toisensa poissulkevia eli ne eivät voi molemmat tapahtua, joten C ja I kuuluvat yhteen.

D Kombinaatiot ovat joukon osajoukkoja, joten D ja III kuuluvat yhteen.

E Permutaatiot ovat järjestettyjä jonoja, joten E ja V kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: IV; B: II, C: I, D: III ja E: V

286A. Käytetään geometrisena mittana alueen pinta-alaa. Koko parkkialueen pinta-ala on $7{,}0\text{ m}\cdot 6{,}0\text{ m} = 42\text{ m}^2$ ja suotuisan alueen pinta-ala on $3{,}0\text{ m}\cdot 2{,}0\text{ m} = 6{,}0\text{ m}^2$.

$$P(\text{avain jää auton alle}) = \frac{6\text{ m}^2}{42\text{ m}^2} = 0{,}142\ldots \approx 0{,}14$$

Avain jää auton alle todennäköisyydellä 0,14.

Vastaus: 0,14

287A. **a)** Havainnollistetaan heittotuloksia ja niiden summaa taulukon avulla. Merkitään kaikki alkeistapaukset taulukkoon.

2. nopan silmäluku

1. nopan silmäluku

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Havaitaan, että alkeistapauksista 15 on sellaisia, joissa silmälukujen summa on vähintään kahdeksan.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Vastaus: $\frac{5}{12}$

b) Havainnollistetaan heittotuloksia ja niiden tuloa taulukon avulla. Merkitään kaikki alkeistapaukset taulukkoon.

2. nopan silmäluku

1. nopan silmäluku

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Verrataan taulukkoa a-kohdan taulukkoon ja havaitaan, että alkeistapauksista 11 on sellaisia, joissa silmälukujen summa on suurempi kuin niiden tulo.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{11}{36}$.

Vastaus: $\frac{11}{36}$

288A. TAPA 1:

Todennäköisyys, että ensimmäinen kirja on sellainen, jota en ole lukenut, on $\frac{2}{5}$. Todennäköisyys, että toinen kirja on sellainen, jota en ole lukenut, on $\frac{2}{4}$. Kertolaskusäännön mukaan todennäköisyys, että molemmat kirjat ovat sellaisia, joita en ole lukenut on $\frac{3}{5} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$.

TAPA 2:

Kolmesta kirjasta, joita en ole lukenut voidaan valita kaksi $\binom{3}{2} = 3$ tavalla.

Viidestä valittavan olevasta kirjasta voidaan valita kaksi $\binom{5}{2} = 10$ tavalla.

Todennäköisyys, että valitsen kaksi kirjaa joita en ole lukenut on $\frac{3}{10}$.

Vastaus: $\frac{3}{10}$

289A. **a)** Kyseessä on kombinaatioiden määrä, joten 15:sta tummahiuksisesta voidaan valita kolme $\binom{15}{3} = 455$ tavalla.

Vastaus: 455 tavalla

b) Kyseessä on kombinaatioiden määrä, joten 28:sta henkilöstä voidaan valita kolme $\binom{28}{3} = 3276$ tavalla.

Vastaus: 3276 tavalla

c) Kohtien a ja b perusteella kaikki satunnaistarkastukseen joutuvat ovat tummahiuksisia todennäköisyydellä $\frac{455}{3276} = 0{,}138... \approx 0{,}14$.

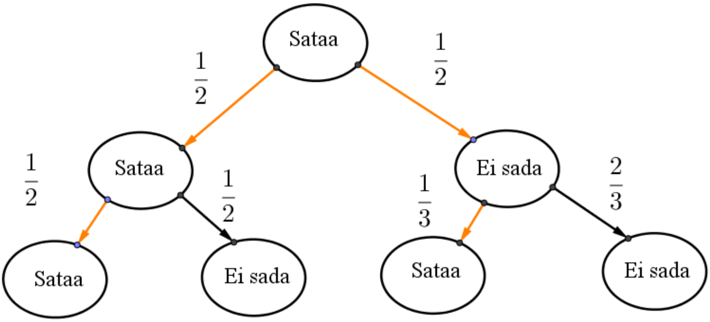
Vastaus: $\frac{455}{3276} \approx 0{,}14$

290A. Jos tänään sataa, huomenna sataa todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$.

Jos tänään sataa, huomenna ei sada todennäköisyydellä $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Jos tänään ei sada, huomenna sataa todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$.

Piirretään tilanteesta puukaavio ja merkitään tapahtumalle ”ylihuomenna sataa, jos tänään sataa” suotuisat haarat oranssilla.



Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolasku- ja yhteenlaskusääntöjen avulla.

P(ylihuomenna sataa, jos tänään sataa)
$= P$(huomenna sataa) · P(ylihuomenna sataa, kun huomenna satoi) + P(huomenna ei sada) · P(ylihuomenna sataa, kun huomenna ei satanut)

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{12}$$

Vastaus: $\frac{5}{12}$

291A. a) Havainnollistetaan noppien silmälukujen summia taulukolla. Merkitään suotuisat summat vihreällä ja muut mahdolliset summat harmaalla.

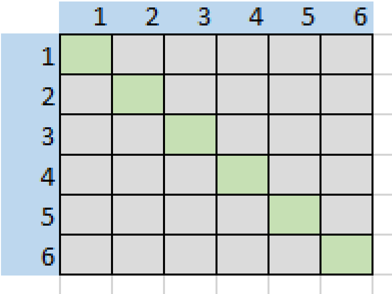
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Suotuisia summia on 10 ja mahdollisia summia on 36.

$$P(\text{silmälukujen summa on 6 tai 8}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} = 0{,}277... \approx 0{,}28.$$

Vastaus: 0,28

b) Havainnollistetaan mahdollisia kahden nopan heiton tuloksia taulukolla. Merkitään tuloksia, joissa noppien silmäluvut ovat samat vihreällä ja muita tuloksia harmaalla.



Heittotuloksia, joissa silmäluvut ovat samat, on 6 ja tuloksia on yhteensä 36.

$$P(\text{silmäluvut ovat samat yhdellä kahden nopan heitolla}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Pelaaja joutuu vankilaan, jos hän heittää molemmilla nopilla kolmesti peräkkäin saman silmäluvun. Eri heittokerrat ovat riippumattomia toisistaan. Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön perusteella

P(silmäluvut ovat samat kolmella peräkkäisellä kahden nopan heitolla)
$= P(\text{silmäluvut ovat samat yhdellä kahden nopan heitolla})^3$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} = 0{,}00462\ldots \approx 0{,}0046.$$

Vastaus: 0,0046

VAHVISTA OSAAMISTA

292A. **a)** Opettajia on yhteensä 12, joten heistä voidaan valita viisi opettajaa $\binom{12}{5} = 792$ tavalla.

Vastaus: 792 tavalla

b) Matemaattisten aineiden opettajia on neljä, joista kaksi voidaan valita $\binom{4}{2} = 6$ tavalla.

Vastaus: 6 tavalla

c) Matemaattisten aineiden opettajia on neljä, joista kaksi voidaan valita $\binom{4}{2} = 6$ tavalla. Kieltenopettajia on viisi, joista kolme voidaan valita $\binom{5}{3} = 10$ tavalla. Taito- ja taitoaineiden opettajia on kolme, joista yksi voidaan valita kolmella tavalla.

Kaksi matemaattisten aineiden opettajaa, kolme kieltenopettajaa ja yksi taito- ja taideaineiden opettaja voidaan valita tuloperiaatteen mukaan $6 \cdot 10 \cdot 3 = 180$ tavalla.

Vastaus: 180 tavalla

293A. Jokaisessa kuudessa paikassa on kaksi mahdollisuutta: joko siinä on piste tai ei. Mahdollisuuksia on siis yhteensä $2^6 = 64$. Määrästä on vähennettävä tilanne, jossa missään paikassa ei ole pistettä, jolloin erilaisia merkkejä voidaan esittää $64 - 1 = 63$.

Vastaus: 63 erilaista merkkiä

294A. Perusvärin määrän ilmoittamisessa käytettäviä merkkejä on 16 erilaista. Näistä kahden peräkkäisen merkin jonoja voidaan muodostaa $16 \cdot 16 = 256$ erilaista.

Koska perusvärejä on kolme, voidaan eri värisävyjä ilmaista $256 \cdot 256 \cdot 256 = 16\ 777\ 216$ erilaista.

Vastaus: 16 777 216 erilaista värisävyä

295B. **a)** Lyhyen matematiikan pakollisena kirjoittaneilla kouluarvosanaa 9 oli eniten (1048), ylimääräisenä kirjoittaneilla oli eniten arvosanaa 7 (1292) ja koetta kirjoittamattomilla oli eniten arvosanaa 6 (2146). Tyypillisimmät arvosanat ovat siis 9, 7 ja 6.

Vastaus: 9, 7 ja 6

b) Kouluarvosanan 10 saaneita lyhyen matematiikan kokeeseen osallistuneita oli $282 + 184 = 466$.
Heistä sai laudaturin $210 + 70 = 280$.
Kysytty todennäköisyys on $\frac{280}{466} = \frac{140}{233} = 0,600... \approx 0,60$.

Vastaus: 0,60

c) Kouluarvosanaksi vähintään 5 saaneita lyhyen matematiikan kokeeseen osallistuneita oli $3665 - 32 = 3633$.
Heistä hylättiin $139 - 3 = 136$, joten hyväksyttyjä oli $3633 - 136 = 3497$.
Kysytty todennäköisyys on $\frac{3497}{3633} = 0,962... \approx 0,96$.

Vastaus: 0,96

296A. **a)** Tilaston mukaan havaintoarvoja on 7 + 56 + 43 + 14 = 120. Näistä 56 + 43 = 99 on aikavälillä klo 11–15.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{99}{120} = \frac{33}{40} = 0{,}825 \approx 0{,}83$.

Vastaus: $\frac{33}{40} \approx 0{,}83$

b) Tilaston mukaan posti tuli klo 13 jälkeen yhteensä 43 + 14 = 57 kertaa. Oletetaan, että postin saapuminen eriaikoina on toisistaan riippumatonta.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{57}{120} \cdot \frac{57}{120} = \frac{361}{1600} = 0{,}2256... \approx 0{,}23$.

Vastaus: $\frac{361}{1600} \approx 0{,}23$

c) Tilaston mukaan posti tuli klo 13 jälkeen 43 + 14 = 57 kertaa, joista 14 kertaa tuli klo 15 jälkeen.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{14}{57} = 0{,}245... \approx 0{,}25$.

Vastaus: $\frac{14}{57} \approx 0{,}25$

297B. **a)** Tilaston mukaan suoritettuja tutkintoja oli yhteensä 31 881 ja näistä oli 748 maa- ja metsätalousalalta.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{748}{31\,881}=0{,}0234...\approx 0{,}023.$

Vastaus: 0,023

b) Tilaston mukaan naisten suorittamia tutkintoja oli yhteensä 18 020 ja näistä oli 502 maa- ja metsätalousalalta.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{502}{18\,020}=\frac{251}{9010}=0{,}0278...\approx 0{,}028.$

Vastaus: 0,028

c) Tilaston mukaan miesten suorittamia tutkintoja oli yhteensä 13 861 ja näistä oli 1290 luonnontieteistä ja 359 palvelualalta.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{1290+359}{13\,861}=0{,}118...\approx 0{,}12.$

Vastaus: 0,12

298A. **a)** Ensimmäinen voidaan valita kahdella tavalla, toinen yhdellä, seuraava kolmella, sitä seuraava kahdella ja viimeinen yhdellä tavalla.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5!}=\frac{1}{10}.$

Vastaus: $\frac{1}{10}$

b) Ensimmäinen voi olla kuka tahansa neljästä, toinen kolmesta, kolmas kahdesta ja neljäs voi olla vain yksi. Neljä ensimmäistä voivat siis muodostaa $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ eri järjestystä. Viimeinen voidaan valita yhdellä tavalla.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{4! \cdot 1}{5!} = \frac{1}{5}$.

Vastaus: $\frac{1}{5}$

c) Viimeinen haastateltava voidaan valita yhdellä tavalla, ensimmäinen haastateltava kahdella tavalla, toinen yhdellä tavalla, kolmas kahdella tavalla ja neljäs yhdellä tavalla.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{5!} = \frac{1}{30}$.

Vastaus: $\frac{1}{30}$

299A. Pakassa on 52 korttia + jokeri eli 53 korttia. Niistä voidaan jakaa viisi korttia $\binom{53}{5}$ eri tavalla. Suotuisia alkeistapauksia ovat ne viiden kortin joukot, joissa on jokeri ja neljä samanarvoista korttia. Jokereita on vain yksi, joten se voidaan valita yhdellä tavalla. Pakassa on 13 eri arvoista korttia, joten jokerin lisäksi mahdollisia 4 saman arvoista korttia -jakoja on 13 erilaista.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{viisi samanarvoista korttia})$$
$$= \frac{1 \cdot 13}{\binom{53}{5}} = \frac{13}{2869685} = \frac{1}{220\ 745} = 0{,}00000453... \approx 0{,}0000045.$$

Vastaus: 0,000 0045

300A. Lasketaan ensin todennäköisyys, että ensimmäiseksi kortiksi saadaan musta, toiseksi punainen jne. Tällöin kysytty todennäköisyys on

$$\frac{26}{52}\cdot\frac{26}{51}\cdot\frac{25}{50}\cdot\frac{25}{49}\cdot\frac{24}{48}\cdot\frac{24}{47}=\frac{650}{39\,151}.$$

Jos ensimmäinen on punainen, saadaan sama todennäköisyys, joten
P(joka toinen kortti on punainen ja joka toinen musta)

$$=2\cdot\frac{650}{39\,151}=\frac{1300}{39\,151}=0{,}0332...\approx 0{,}033.$$

Vastaus: 0,033

301A. **a)** Riippumattomilla tapahtumilla tarkoitetaan tapahtumia, jotka eivät vaikuta toistensa todennäköisyyksiin. Esimerkiksi, jos heitetään ensin kolikkoa ja sitten noppaa, tapahtumat ovat riippumattomia.

Vastaus: Riippumattomilla tapahtumilla tarkoitetaan tapahtumia, jotka eivät vaikuta toistensa todennäköisyyksiin. Esimerkiksi heitetään ensin kolikkoa ja sitten noppaa.

b) Erilliset tapahtumat ovat toisensa poissulkevia eli ne eivät voi tapahtua yhtä aikaa. Esimerkiksi arpakuution heitossa tapahtumat ”saadaan silmäluku 1” ja ”saadaan silmäluku 2” ovat erillisiä tapahtumia.

Vastaus: Erilliset tapahtumat ovat toisensa poissulkevia eli ne eivät voi tapahtua yhtä aikaa. Esimerkiksi arpakuutiota heitettäessä tapahtumat ”saadaan silmäluku 1” ja ”saadaan silmäluku 2”.

302A. Merkitään A = ”henkilöllä on farkut” ja B = ”henkilöllä on villapaita”.

Käytetään yleistä yhteenlaskusääntöä.

P(A tai B tapahtuu) = P(A tapahtuu) + P(B tapahtuu) − P(A ja B tapahtuvat).

Sijoitetaan kaavaan P(A tai B tapahtuu) = 0,56,
$P(A \text{ tapahtuu}) = \frac{12}{25} = 0,48$ ja $P(B \text{ tapahtuu}) = \frac{4}{25} = 0,16$ ja ratkaistaan yhtälöstä P(A ja B tapahtuvat).

$$\begin{aligned} 0,56 &= 0,48 + 0,16 - P(A \text{ ja } B) \\ -P(A \text{ ja } B) &= 0,56 - 0,48 - 0,16 \\ -P(A \text{ ja } B) &= -0,08 \\ P(A \text{ ja } B) &= 0,08 \end{aligned}$$

Henkilöitä, joilla on farkut ja villapaita on 0,08 · 25 = 2.

Vastaus: kahdella henkilöllä

303A. Merkitään A =” suosikkijalkapallojoukkue voittaa” ja
B =” suosikkijääkiekkojoukkue voittaa”.
Tapahtumat ovat riippumattomat, joten P(A ja B) = P(A) · P(B).
Sijoitetaan kaavaan P(A) = 0,73 ja P(A ja B) = 0,36 ja ratkaistaan yhtälöstä P(B).

P(A ja B) = P(A) · P(B)
0,36 = 0,73 · P(B) ||: 0,73
P(B) = 0,493…
P(B) = 49,3… %
P(B) ≈ 49 %

Vastaus: 49 %

304A. **a)** Tapahtuman A = ”kaikki opiskelijat tulevat kouluun autolla” vastatapahtuma on $\overline{A}$ = ”on ainakin yksi opiskelija, joka ei tule kouluun autolla”.
$P(A) = 0,3^5$ ja
$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3^5 = 0,99757 \approx 0,998$

Vastaus: $\overline{A}$ = ”on ainakin yksi opiskelija, joka ei tule kouluun autolla”; 0,998

b) Tapahtuman A = ”ainakin yksi opiskelija tulee kouluun autolla” vastatapahtuma on $\overline{A}$ = ”kukaan ei tule kouluun autolla”.
Koska P(opiskelija tulee autolla kouluun) = 0,3, on
P(opiskelija ei tule autolla kouluun) = 1 − 0,3 = 0,7.

Tällöin $P(\overline{A}) = 0,7^5 = 0,1680\ldots \approx 0,168$

Vastaus: $\overline{A}$ = ”kukaan ei tule kouluun autolla”; 0,168

c) Tapahtuman A = ”täsmälleen yksi opiskelija tulee kouluun autolla” vastatapahtuma on $\overline{A}$ = ”0, 2, 3, 4 tai 5 opiskelijaa tulee kouluun autolla”.
Lasketaan ensin $P(A)$.

Todennäköisyys, että ensimmäinen kouluun tuleva tulee autolla ja muut eivät, on $0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7$.

Autolla kouluun tuleva voi olla kuka tahansa viidestä, joten tapahtuma, että ensimmäinen tulee kouluun autolla ja muut eivät voi tapahtua viidellä eri tavalla.
$P(A) = 5 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,36015$.

Tällöin $P(\overline{A}) = 1 - 0,36015 = 0,639.. \approx 0,640$

Vastaus: $\overline{A}$ = ”0, 2, 3, 4 tai 5 opiskelijaa tulee kouluun autolla”; 0,640

305A. TAPA 1:

Viisi pakettia 17:sta voidaan valita $\binom{17}{5} = 6188$ tavalla.

Neljästä Violan lahjapaketista voidaan 2 valita $\binom{4}{2} = 6$ tavalla.

Muiden 13:sta paketista voidaan 3 valita $\binom{13}{3} = 286$ tavalla.

Todennäköisyys, että Viola avaa täsmälleen kolme jonkun muun pakettia on $\dfrac{\binom{4}{2}\binom{13}{3}}{\binom{17}{5}} = \dfrac{1716}{6188} = 0,277... \approx 0,28$.

TAPA 2:

Todennäköisyys, että Violan avaamat kolme ensimmäistä pakettia ovat jonkun muun, on $\frac{13}{17} \cdot \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13}$. Kolme muille kuuluvaa pakettia voivat olla avaamisjärjestyksessä $\binom{5}{3} = 10$ eri tavalla, joten

P(Viola avaa täsmälleen kolme jonkun muun pakettia)

$= 10 \cdot \frac{13}{17} \cdot \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{33}{119} = 0,277... \approx 0,28.$

Vastaus: 0,28

306A. **a)** Tapahtumat ”hillo menee väärälle hyllylle” ja ”maito menee väärälle hyllylle” ovat riippumattomia. Esineen todennäköisyys mennä oikealle hyllylle on $\frac{1}{4}$ ja väärälle hyllylle $\frac{3}{4}$.

Lasketaan tapahtuman ”hillo tai maito menee väärälle hyllylle” todennäköisyys vastatapahtuman ” hillo ja maito menevät oikealle hyllylle” avulla.

P(hillo ja maito menevät oikealle hyllylle) $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

P(hillo tai maito menee väärälle hyllylle)

$= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375 \approx 0,94$

Vastaus: $\frac{15}{16} \approx 0,94$

b) Vastatapahtumaa ”hillo ja maito menevät oikealle hyllylle” laskettaessa on huomioitava, että maitoa ei laiteta samalle hyllylle kuin hillo, joten alkeistapauksia on silloin enää kolme.

P(hillo ja maito menevät oikealle hyllylle) $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

P(hillo tai maito menevät väärälle hyllylle)

$= 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} = 0,916... \approx 0,92$

Vastaus: $\frac{11}{12} \approx 0,92$

c) Jos valitsee sattumanvaraisesti hyllyn ja laittaa sekä hillon että maidon sille, jompikumpi tai molemmat menevät väärälle hyllylle. Tällöin P(hillo tai maito menee väärälle hyllylle) = 1.

Vastaus: 1

307A. Merkitään yksittäisen arvan voittotodennäköisyyttä kirjaimella p. Todennäköisyys, että viidestä arvasta jokainen voittaa, on p^5. Ratkaistaan p yhtälöstä

$$\begin{aligned} p^5 &= 0{,}006 \\ p &= \sqrt[5]{0{,}006} \\ p &= 0{,}359... \\ p &= 35{,}9...\,\% \\ p &\approx 36\,\% \end{aligned}$$

Vastaus: 36 %

308A. Merkitään A = ”saippua on lopussa” ja B = ”pefletit ovat lopussa”.

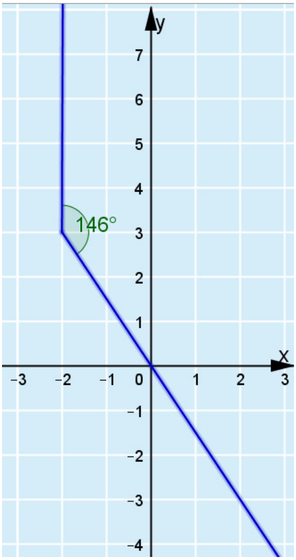
$P(A) = 0{,}10$
$P(B) = 0{,}15$
$P(A) \cdot P(B) = 0{,}10 \cdot 0{,}15 = 0{,}015$

Koska $P(A \text{ ja } B) = 0{,}06$ ei ole yhtä suuri kuin $P(A)$:n ja $P(B)$:n tulo, voidaan todeta, että tapahtumat ”saippua on lopussa” ja ”pefletit ovat lopussa” eivät ole riippumattomia.

Vastaus: eivät ole

309B. Hahmotellaan tilanteesta kuva ja käytetään todennäköisyyden mittana kulman suuruutta. Jos puolisuora on y-akselin suuntainen, se ei leikkaa y-akselia. Suotuisat puolisuoran tulee leikata y-akseli pisteessä, joka on origosta ylöspäin. Piirtämällä mallikuva huomataan, että puolisuoran ääriasentojen välinen kulma on 146 astetta.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{146°}{360°} = \frac{73}{180} = 0,405... \approx 0,41.$



Vastaus: 0,41

310A. **a)** Vastatapahtuma sisältää kaikki ne alkeistapaukset, jotka eivät ole tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia. Tapahtuman ja vastatapahtuman todennäköisyyksien summa on 1.

Vastaus: –

b) Pankkivirkailijoita, jotka ovat aktiivisia feministiliikkeessä on vähemmän kuin kaikkia pankkivirkailijoita, joten väitteen A todennäköisyys on suurempi kuin väitteen B.

Merkitään kaikkien alkeistapausten määrää kirjaimella *n,* feministiliikkeessä aktiivisten pankkivirkailijoiden määrää kirjaimella *f* ja pankkivirkailijoiden, jotka eivät ole feministiliikkeessä aktiivisia, määrää kirjaimella *e*.

$$P(A)=\frac{f+e}{n} \text{ ja } P(B)=\frac{f}{n}$$

Siis $P(A) > P(B)$.

Vastaus: –

311A. **a)** Koska 40:stä numerosta voidaan valita seitsemän $\binom{40}{7}=18\,643\,560$ eri tavalla ja on vain yksi oikea rivi, on kaikki seitsemän numeroa oikein todennäköisyydellä $\frac{1}{18\,643\,560}=0{,}0000000536...\approx 5{,}4\cdot 10^{-8}$.

Vastaus: $\frac{1}{18\,643\,560}\approx 5{,}4\cdot 10^{-8}$

b) Seitsemästä oikeasta numerosta voidaan valita neljä $\binom{7}{4}$ eri tavalla.

Vääriä numeroita on $40-7=33$ ja niistä voidaan kolme valita $\binom{33}{3}$ eri tavalla.

$$P(\text{täsmälleen 4 oikein})=\frac{\binom{7}{4}\cdot\binom{33}{3}}{\binom{40}{7}}=\frac{4774}{466089}=0{,}0102...\approx 0{,}01$$

Vastaus: $\frac{4774}{466089}\approx 0{,}01$

312B. **a)** Suotuisa mitta on taulun pinta-ala. Taulu on ympyrä, jonka säde *r* on millimetreinä $\frac{35}{2}+9\cdot 17=170,5.$ Taulun pinta-ala on neliömillimetreinä $\pi r^2=\pi\cdot 170,5^2.$

Taustalevyn pinta-ala on 1,0 m^2 = 1 000 000 mm^2. Kysytty todennäköisyys on

$$\frac{\pi\cdot 170,5^2}{1\,000\,000}=0,0913...\approx 0,09$$

Vastaus: 0,09

b) Tikalla saa vähintään 8 pistettä, jos se osuu alueille 8-10. Näitä alueita vastaa ympyrä, jonka säde on millimetreinä $\frac{35}{2}+2\cdot 17=51,5.$ Ympyrän pinta-ala on neliömillimetreinä $\pi\cdot 51,5^2.$ Taulun pinta-ala on neliömillimetreinä $\pi r^2=\pi\cdot 170,5^2.$ Kysytty todennäköisyys on

$$\frac{\pi\cdot 51,5^2}{\pi\cdot 170,5^2}=0,0912...\approx 0,09.$$

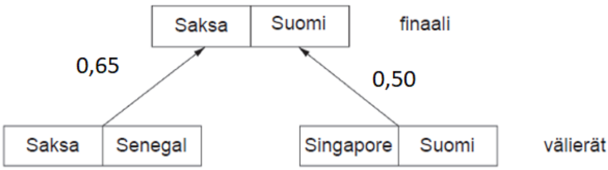
Vastaus: 0,09

c) Tikalla saa korkeintaan 5 pistettä, jos se osuu alueille 5-1. Näiden alueiden pinta-ala saadaan vähentämällä taulun pinta-alasta sisemmän ympyrän eli pisteiden 6-10 muodostaman ympyrän pinta-ala, jonka säde on millimetreinä $\frac{35}{2}+4\cdot 17=85,5.$ Kysytty todennäköisyys on

$$\frac{\pi\cdot 170,5^2-\pi\cdot 85,5^2}{\pi\cdot 170,5^2}=0,748...\approx 0,75$$

Vastaus: 0,75

313A. **a)** Saksa voittaa Senegalin todennäköisyydellä 0,65 ja Suomi voittaa Singaporen todennäköisyydellä 1 − 0,50 = 0,50. Merkitään todennäköisyydet kaavioon.



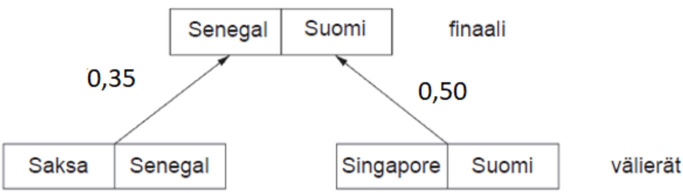
P(Suomi pelaa finaalissa Saksaa vastaan)
= 0,65 · 0,50 = 0,325 = 32,5 %.

Vastaus: 32,5 %

b) Tarkastellaan tilanteet, joissa Suomi ei kohtaa Saksaa, koska Saksa voittaisi Suomen 100 %:n todennäköisyydellä.

Senegal ja Suomi voittavat välierissä todennäköisyydellä
0,35· 0,50 = 0,175.

Suomi voittaa Senegalin todennäköisyydellä 1 − 0,60 = 0,40. Tällöin
P(Suomi voittaa koko kilpailun) = 0,40 · 0,35 · 0,50 = 0,07.

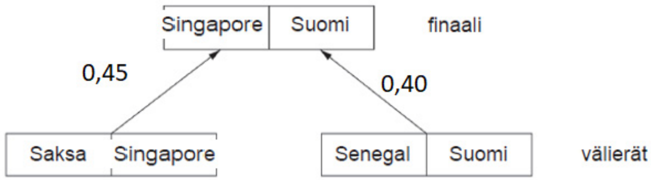


Toinen vaihtoehto, jossa Suomi ei kohtaa Saksaa on, jos pelataan välierät Saksa-Singapore ja Suomi-Senegal.

Singapore ja Suomi voittavat välierissä todennäköisyydellä 0,45· 0,40 = 0,18.

Suomi voittaa Singaporen todennäköisyydellä 0,50.

Tällöin
P(Suomi voittaa koko kilpailun) = 0,50 · 0,45 · 0,40 = 0,09.



Huomataan, että Suomen todennäköisyys voittaa koko kilpailu on suurin välieräpareilla Saksa–Singapore ja Senegal–Suomi. Todennäköisyys, että Suomi voittaa koko kilpailun on 0,09.

Vastaus: välieräpareilla Saksa-Singapore ja Senegal-Suomi, todennäköisyys 0,09

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

314A. Jotta numeroiden summa olisi korkeintaan 3, luvussa voi olla vain numeroita 0, 1, 2 ja 3.
Jos luvussa on numero 3, on luku 300 ainoa mahdollinen kolminumeroinen positiivinen kokonaisluku.

Numerolla 2 alkavia ehdon täyttäviä lukuja ovat 200, 201 ja 210.

Numerolla 1 alkavia ehdon täyttäviä lukuja ovat 100, 101, 102, 110, 111 ja 120.

Kolminumeroisia positiivisia kokonaislukuja ovat luvut 100-999. Lukuja on yhteensä 999 − 99 = 900.
Kysytty todennäköisyys on $\frac{10}{900}=\frac{1}{90}=0{,}0111..\approx 0{,}011.$

Vastaus: 0,011

315A. **a)** Koko vuoden päivistä voidaan 13 päivää valita $\binom{365}{13}$ tavalla, joista yksi on suotuisa. Kysytty todennäköisyys on siis

$$\frac{1}{\binom{365}{13}} \approx 3{,}8 \cdot 10^{-24}.$$

Vastaus: $3{,}8 \cdot 10^{-24}$

b) Vanhoista pyhäpäivistä 2 voidaan valita $\binom{13}{2}$ tavalla. Muut 11 pyhäpäivää, jotka eivät ole samoja kuin vanhat, voidaan valita $\binom{365-13}{11} = \binom{352}{11}$ tavalla.

Kysytty todennäköisyys on $\dfrac{\binom{13}{2}\binom{352}{11}}{\binom{365}{13}} = 0{,}0649\ldots \approx 0{,}06.$

Vastaus: 0,06

c) Jos vuoden ensimmäinen päivä on maanantai, 52 täyteen viikkoon kuluu 52 · 7 = 364 päivää. 364. päivä on siis sunnuntai ja 365. päivä maanantai. Vuodessa on tällöin 53 maanantaita ja 52 kutakin muuta viikonpäivää.

Pyhäpäivät voidaan siis valita $6 \cdot \binom{52}{13} + \binom{53}{13}$ tavalla.

Kysytty todennäköisyys on

$$\frac{6 \cdot \binom{52}{13} + \binom{53}{13}}{\binom{365}{13}} = 1{,}761\ldots \cdot 10^{-11} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-11}.$$

Vastaus: $1{,}8 \cdot 10^{-11}$

316B. Tapahtuma ”ainakin yksi voittoarpa” on tapahtuman ”ei yhtään voittoarpaa” vastatapahtuma.

Todennäköisyys, että arpa ei voita on $1-\frac{1}{20}=0{,}95$. Todennäköisyys, että n:ssä arvassa ei ole yhtään voittoa, on $0{,}95^n$, joten
$P(\text{tulee ainakin yksi voitto}) = 1 - 0{,}95^n$.

Koska todennäköisyys pitää olla yli 50 %, saadaan epäyhtälö
$1 - 0{,}95^n > 0{,}50$.

Ohjelman symbolisen laskennan toiminnolla saadaan ratkaisuksi
$n > 13{,}513\ldots$
On ostettava vähintään 14 arpaa.

Vastaus: vähintään 14 arpaa

317A. 40:stä numerosta voidaan valita seitsemän $\binom{40}{7}=18\,643\,560$ eri tavalla ja

33:sta jäljellä olevasta numerosta voidaan valita yksi lisänumero 33:lla tavalla.

Seitsemästä oikeasta numerosta voidaan valita kolme $\binom{7}{3}$ eri tavalla.

Varsinaisessa rivissä tulee olla 33:sta väärästä neljä, jotka voidaan valita $\binom{33}{4}$. Oikean lisänumeron on oltava jokin pelaajan valitsemista neljästä

väärästä numerosta, joten lisänumero voidaan valita $\binom{4}{1}=4$ tavalla.

$P(\text{täsmälleen 3 ja lisänumero oikein})$

$$=\frac{\binom{7}{3}\cdot\binom{33}{4}\cdot 4}{\binom{40}{7}\cdot 33}=0{,}009311\ldots\approx 0{,}0093$$

Vastaus: 0,0093

318A. a) Käytetään alkeistapauksina viiden kortin joukkoja. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $\binom{52}{5}$. Jokaista arvoa vastaa neljä korttia, joista kolme voidaan valita $\binom{4}{3}$ tavalla. Eri arvoja ovat 1-13, siis 13 kpl. Loput kaksi korttia on oltava muun arvoisia ja niitä on 52 – 4 = 48. Kaksi 48:sta voidaan valita $\binom{48}{2}$ tavalla.

$$P(\text{täsmälleen kolme on samanarvoisia})$$
$$=\frac{13\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}}=\frac{58656}{2598960}=\frac{94}{4165}=0{,}0225...\approx 0{,}023$$

Vastaus: 0,023

b) Jokaista arvoa vastaa neljä korttia, joista neljä voidaan valita $\binom{4}{4}$ tavalla. Eri arvoja on 13 kappaletta. 48:sta muun arvoisesta kortista voidaan valita yksi kortti $\binom{48}{1}$ tavalla.

$$P(\text{täsmälleen neljä on samanarvoisia})$$
$$=\frac{13\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}=\frac{624}{2598960}=\frac{1}{4165}=0{,}000240...\approx 0{,}00024$$

Vastaus: 0,00024

c) On otettava huomioon, että kolmen muun arvoisen kortin joukossa ei saa olla kahta keskenään samanarvoista korttia. Kaksi samanarvoista voidaan valita $13 \cdot \binom{4}{2}$ tavalla.

Ensimmäinen muun arvoinen kortti voidaan valita 52 − 4 = 48 tavalla. Seuraava muun arvoinen kortti voidaan valita 52 − 8 = 44 tavalla ja kolmas muun arvoinen kortti voidaan valita 52 − 12 = 40 tavalla. Kolme muun arvoista korttia voidaan valita 48 · 44 · 40 tavalla. Koska korttien järjestyksellä ei ole väliä, valintatapoja on $\frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!} = 14\,080.$

$$P(\text{täsmälleen kaksi on samanarvoisia})$$
$$= \frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 14\,080}{\binom{52}{5}} = \frac{1\,098\,240}{2\,598\,960} = \frac{352}{833} = 0{,}422... \approx 0{,}42$$

Vastaus: 0,42

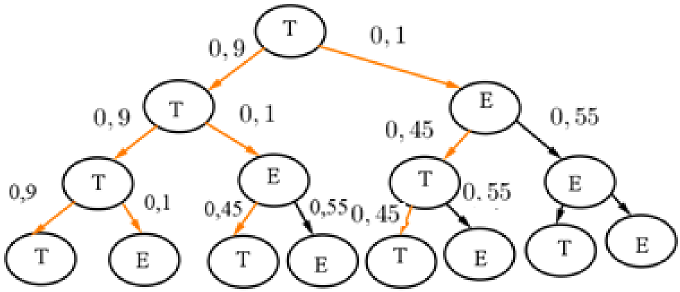
319A. Taulukoidaan jokaiseen kerrokseen liittyvä odotusaika.

Kerros	Odotusaika (s)
Kellari	$10 + 5 = 15$
1	0
2	$10 + 5 = 15$
3	$10 + 2 \cdot 5 = 20$
4	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
5	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
6	$10 + 2 \cdot 5 = 20$
7	$10 + 5 = 15$
8	0
9	$10 + 5 = 15$
10	$10 + 2 \cdot 5 = 20$
11	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
12	$10 + 4 \cdot 5 = 30$
13	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
14	$10 + 2 \cdot 5 = 20$
15	$10 + 5 = 15$
16	0
17	$10 + 5 = 15$
18	$10 + 2 \cdot 5 = 20$
19	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
20	$10 + 4 \cdot 5 = 30$

Kerrokset, joissa joutuu odottamaan yli 22 sekuntia, ovat 4, 5, 11, 12, 13, 19 ja 20, joten suotuisia kerroksia on 7. Jokaisen kerroksen kohdalla on todennäköisyys 0,025, joten kysytty todennäköisyys on $7 \cdot 0{,}025 = 0{,}175$

Vastaus: 0,175

320A. Piirretään tilanteesta puukaavio, jossa T = ”torjunta” ja E = ”ei torjunta”. Merkitään oranssilla ne vaihtoehdot, joissa on vähintään kolme torjuntaa.



Kerto- ja yhteenlaskusääntöjä soveltaen saadaan todennäköisyydeksi

$$\begin{aligned}&P(\text{torjuu neljästä laukauksesta vähintään 3})\\ &=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9+0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}1\cdot 0{,}45+0{,}1\cdot 0{,}45\cdot 0{,}45\\ &=0{,}87075\\ &\approx 0{,}87\end{aligned}$$

Vastaus: 0,87

321A. a) Kahden täytteen pitsoja on $\binom{14}{2}$ erilaista. Vastaavasti erilaisia kolmen ja neljän täytteen pitsoja on $\binom{14}{3}$ ja $\binom{14}{4}$. Koska tonnikalan lisäksi on valittavissa 13 muuta täytettä, kahden täytteen pitsoja, joissa on tonnikalaa, on 13 erilaista. Kolmen täytteen pitsassa kaksi muuta täytettä tonnikalan lisäksi voidaan valita $\binom{13}{2}$ tavalla. Neljän täytteen pitsassa täytteet voidaan valita $\binom{13}{3}$ tavalla.

$$P(\text{pitsassa on tonnikalaa}) = \frac{13+\binom{13}{2}+\binom{13}{3}}{\binom{14}{2}+\binom{14}{3}+\binom{14}{4}} = \frac{377}{1456} = \frac{29}{112}$$

Todennäköisyys, että toisessa pitsassa on tonnikalaa ja toisessa ei ole, on

$$\frac{29}{112}\cdot\left(1-\frac{29}{112}\right) = \frac{2407}{12544} = 0{,}191\ldots \approx 0{,}19$$

Vastaus: 0,19

b) Tonnikalatäyte voidaan valita vain yhdellä tavalla ja muut täytteet voidaan valita alla lasketuilla määrillä tapoja.

Todennäköisyys, että kahden täytteen pitsassa on tonnikalaa, on $\dfrac{1\cdot 13}{\binom{14}{2}}$.

Todennäköisyys, että kolmen täytteen pitsassa on tonnikalaa, on $\dfrac{1\cdot\binom{13}{2}}{\binom{14}{3}}$.

Todennäköisyys, että neljän täytteen pitsassa on tonnikalaa, on $\dfrac{1\cdot\binom{13}{3}}{\binom{14}{4}}$.

Koska pitsan täytteiden määrä arvotaan, jokaisen täytteen määrän todennäköisyys on $\frac{1}{3}$.

$$P(\text{pitsassa on tonnikalaa})$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot 13}{\binom{14}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot\binom{13}{2}}{\binom{14}{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot\binom{13}{3}}{\binom{14}{4}}=\frac{3}{14}=0,214...\approx 0,21$$

Todennäköisyys, että toisessa pitsassa on tonnikalaa ja toisessa ei ole, on

$$\frac{3}{14}\cdot\left(1-\frac{3}{14}\right)=\frac{33}{196}=0,168...\approx 0,17$$

Vastaus: 0,17

322A. Kaksinumeroisia positiivisia kokonaislukuja ovat luvut 10-99.
Näitä on $99 - 9 = 90$ kpl. Parillisia niistä on puolet eli 45. Kolmella jaollisia on joka kolmas eli yhteensä 30. Markuksen ja Marikan valitsemia mahdollisia lukupareja on yhteensä $45 \cdot 30 = 1350$.

Kahdella ja kolmella jaollisia on joka kuudes luku eli $\frac{100}{6} \approx 15$ kpl. Näin ollen Markuksen ja Marikan valitsemia mahdollisia lukupareja, joissa kummallakin on sama luku, on 15 kpl.

$$P(\text{valitsevat saman luvun}) = \frac{15}{1350} = \frac{1}{90} = 0{,}0111 \approx 0{,}011$$

Vastaus: 0,011