5 TASOGEOMETRIA

ALOITA PERUSTEISTA

190A. Muunnetaan 23,5 m eri yksiköihin.

23,5 m = 235 dm = 2350 cm = 23 500 mm ja
23,5 m = 0,0235 km

Vaihtoehdoista oikeita ovat I ja IV.

Vastaus: I ja IV

191A. **a)** 12 mm = 1,2 cm

b) 1,4 km = 1400 m

c) 56 m = 0,056 km

d) 28 m^2 = 280 000 cm^2

e) 345 ha = 3,45 km^2

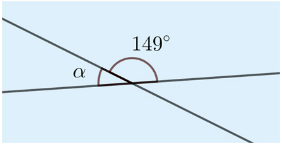
f) 2,0 a = 200 m^2

g) 180 g = 0,180 kg

h) 3,1 mg = 0,0031 g

i) 72,6 kg = 72 600 g

192A. **a)** Kulma α ja 149°:n kulma ovat vieruskulmia.

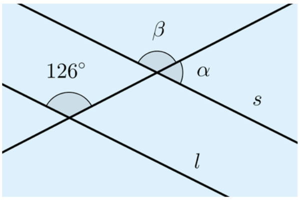


Vieruskulmien summa on 180°, joten

$$\begin{aligned} \alpha + 149° &= 180 \\ \alpha &= 180° - 149° \\ \alpha &= 31°. \end{aligned}$$

Vastaus: $\alpha = 31°$

b) Merkitään kulman α vieruskulmaa kirjaimella β.



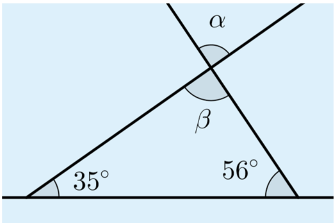
Kulma β on samankohtainen 126°:n kulman kanssa. Koska suorat s ja l ovat yhdensuuntaiset, niin $\beta = 126°$.

Kulmat α ja β ovat vieruskulmia. Vieruskulmien summa on 180°, joten

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 180° \\ \alpha + 126° &= 180° \\ \alpha &= 180° - 126° \\ \alpha &= 54°. \end{aligned}$$

Vastaus: $\alpha = 54°$

c) Kolmiossa on 35°:n ja 56°:n kulmat. Merkitään kolmion kolmatta kulmaa kirjaimella β.



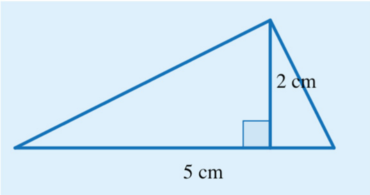
Kolmion kulmien summa on 180°, joten

$$35° + 56° + \beta = 180°$$
$$\beta = 180° - 35° - 56°$$
$$\beta = 89°.$$

Kulma β on kulman α ristikulma. Koska ristikulmat ovat yhtä suuret, kulma $\alpha = \beta = 89°$.

Vastaus: $\alpha = 89°$

193A. **a)** Kuvio on kolmio, jonka kanta on $a = 5$ cm ja korkeus $h = 2$ cm.

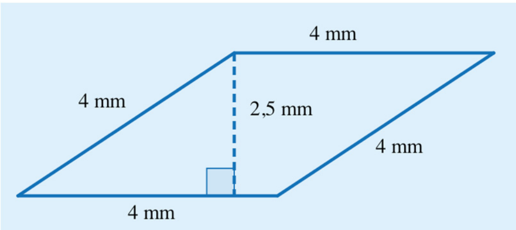


Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{5\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}}{2} = 5\text{ cm}^2.$$

Vastaus: 5 cm^2

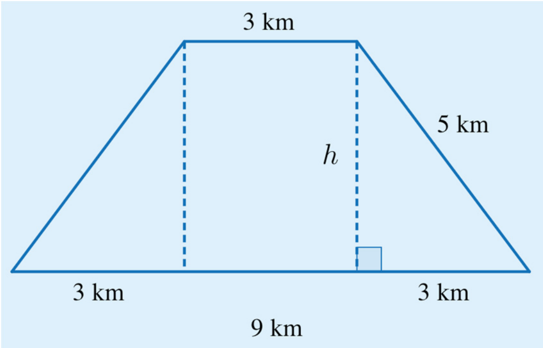
b) Kuvio on neljäkäs, jonka sivun pituus on $a = 4$ mm ja korkeus $h = 2{,}5$ mm.



Neljäkkään pinta-ala on
$A = a \cdot h = 4\text{ mm} \cdot 2{,}5\text{ mm} = 10\text{ mm}^2$.

Vastaus: 10 mm^2

c) Kuvio on puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat a = 3 km ja b = 9 km. Piirretään kuvioon korkeusjana ja merkitään sitä kirjaimella h.



Korkeusjana muodostaa päätyyn suorakulmaisen kolmion. Määritetään korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

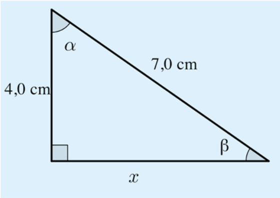
$$\begin{aligned} h^2 + 3^2 &= 5^2 \\ h^2 &= 25 - 9 \\ h^2 &= 16 \\ h &= _{(\pm)} 4 \end{aligned}$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{3\text{ km} + 9\text{ km}}{2} \cdot 4\text{ km} = 24\text{ km}^2 .$$

Vastaus: 24 km^2

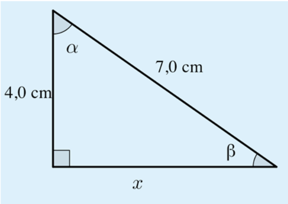
194A. **a)** Määritetään kateetin pituus x Pythagoraan lauseen avulla.



$$
\begin{aligned}
4^2 + x^2 &= 7^2 \\
x^2 &= 49 - 16 \\
x^2 &= 33 \\
x &= _{(}\pm_{)} 5,744... \\
x &\approx 5,7
\end{aligned}
$$

Vastaus: $x \approx 5{,}7$ cm

b) Määritetään kulman α suuruus kosinin avulla.

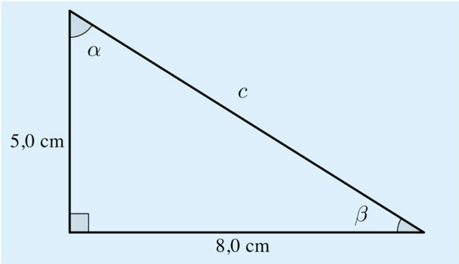


$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{4}{7} \\
\alpha &= 55{,}150...^\circ \\
\alpha &\approx 55^\circ
\end{aligned}
$$

Kolmion kulmien summa on 180°, joten
$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 55{,}150\ldots^\circ = 34{,}849\ldots^\circ \approx 35^\circ$.

Vastaus: $\alpha \approx 55^\circ$ ja $\beta \approx 35^\circ$

195A. Merkitään hypotenuusan pituutta kirjaimella *c*.



Määritetään hypotenuusan pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 5{,}0^2 + 8{,}0^2 &= c^2 \\ c^2 &= 25 + 64 \\ c^2 &= 89 \\ c &= _{(}\pm_{)} 9{,}433... \\ c &\approx 9{,}4 \end{aligned}$$

Hypotenuusan pituus on noin 9,4 cm.

Määritetään kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{8{,}0}{5{,}0} \\ \alpha &= 57{,}994...° \\ \alpha &\approx 58° \end{aligned}$$

Kolmion kulmien summa on 180°, joten
$\beta = 180° - 90° - 57{,}994...° = 32{,}005...° \approx 32°$.

Vastaus: 9,4 cm, 32° ja 58°

196A. **a)** Ympyrän säde on $r = 3{,}0$ cm.

Kehän pituus on
$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 3{,}0 \text{ cm} = 18{,}849\ldots \text{ cm} \approx 19 \text{ cm}.$

Pinta-ala on
$A = \pi r^2 = \pi \cdot (3{,}0 \text{ cm})^2 = 28{,}274\ldots \text{ cm}^2 \approx 28 \text{ cm}^2.$

Vastaus: 19 cm ja 28 cm^2

b) Kehän pituus on
$p = \pi d = \pi \cdot 4{,}6 \text{ cm} = 14{,}451\ldots \text{ cm} \approx 14 \text{ cm}.$

Ympyrän halkaisija on $d = 4{,}6$ cm, joten ympyrän säde on

$$r = \frac{4{,}6 \text{ cm}}{2} = 2{,}3 \text{ cm}.$$

Pinta-ala on
$A = \pi r^2 = \pi \cdot (2{,}3 \text{ cm})^2 = 16{,}619\ldots \text{ cm}^2 \approx 17 \text{ cm}^2.$

Vastaus: 14 cm ja 17 cm^2

197A. **a)** Sijoitetaan keskuskulman suuruus $\alpha = 72°$ ja ympyrän säde 3,0 cm kaaren pituuden laskukaavaan.

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot r = \frac{72°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 3{,}0 = 3{,}769... \approx 3{,}8$$

Sektorin kaaren pituus on noin 3,8 cm.

Vastaus: $b \approx 3{,}8$ cm

b) Sijoitetaan keskuskulman suuruus $\alpha = 72°$ ja ympyrän säde 3,0 cm sektorin pinta-alan laskukaavaan.

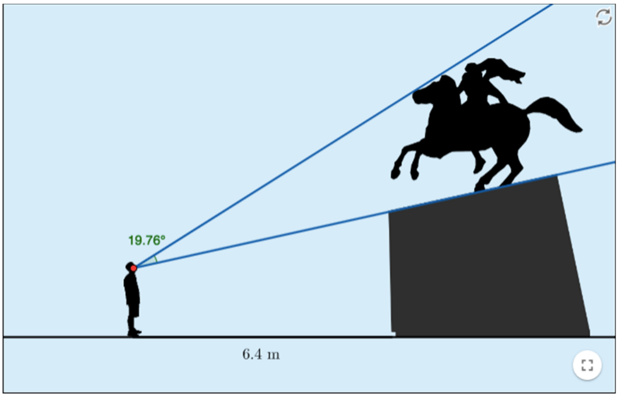
$$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{72°}{360°} \cdot \pi \cdot 3{,}0^2 = 5{,}654... \approx 5{,}7$$

Sektorin pinta-ala on noin 5,7 cm^2.

Vastaus: $A \approx 5{,}7$ cm^2

198B. Katselukulma on paras mahdollinen, kun henkilö näkee koko patsaan, eikä mitään muuta.

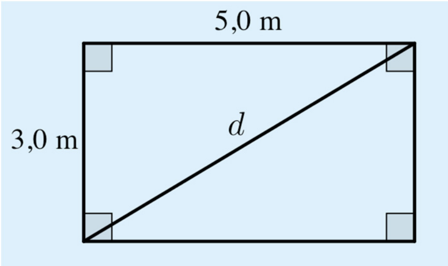
Määritetään katseluetäisyys appletin avulla.



Kohta, jossa patsasta katsovan kannattaa seistä, on 6,4 m patsaan edessä.

Vastaus: 6,4 m patsaan etupuolella

199A. Lasketaan suorakulmion lävistäjän *d* pituus Pythagoraan lauseen avulla.



$$
\begin{aligned}
3{,}0^2 + 5{,}0^2 &= d^2 \\
d^2 &= 9 + 25 \\
d^2 &= 34 \\
d &= _{(}\pm_{)} 5{,}830... \\
d &\approx 5{,}8
\end{aligned}
$$

Lävistäjän pituus on noin 5,8 m.

Vastaus: 5,8 m

200A. **a)** Merkitään janan päätepisteitä $(x_1, y_1) = (-2, 1)$ ja $(x_2, y_2) = (4, -1)$.

Lasketaan janan pituus.

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(4-(-2))^2 + (-1-1)^2} \\
&= \sqrt{(4+2)^2 + (-2)^2} \\
&= \sqrt{6^2 + (-2)^2} \\
&= \sqrt{36+4} \\
&= \sqrt{40} \\
&= 6{,}324... \\
&\approx 6{,}32
\end{aligned}
$$

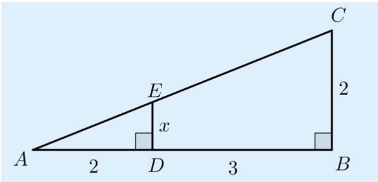
Vastaus: $\sqrt{40} \approx 6{,}32$

b) Lasketaan janan keskipiste M sijoittamalla $(x_1, y_1) = (-2, 1)$ ja $(x_2, y_2) = (4, -1)$ janan keskipisteen kaavaan.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}\right) = (1, 0)$$

Vastaus: (1, 0)

201A. a)



Kolmioissa ABC ja ADE on 90°:n kulmat ja kulma C on yhteinen, joten kk-lauseen perusteella kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinpituuksien suhde on vakio.

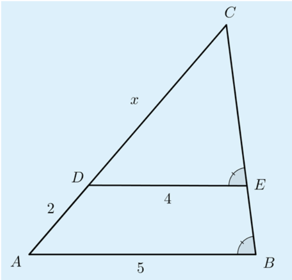
Kolmion ADE korkeutta x vastaa kolmion ABC korkeus 2 ja kantaa 2 vastaa kanta 2 + 3 = 5.

Muodostetaan vastinosien pituuksien avulla verranto ja ratkaistaan siitä pituus x.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \frac{2}{5} \\ 5x &= 4 \quad \| :5 \\ x &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Vastaus: $x = \frac{4}{5}$

b)



Kolmioissa ABC ja DEC on yhtä suuret kulmat B ja E ja lisäksi kulma C on yhteinen kulma. Kolmiot ABC ja DEC ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinpituuksien suhde on vakio.

Kolmion DEC sivun pituutta x vastaa kolmion ABC sivun pituus $x + 2$ ja sivun pituutta 4 vastaa sivun pituus 5.

Muodostetaan vastinosien pituuksien avulla verranto ja ratkaistaan siitä pituus x.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+2} &= \frac{4}{5}\\ 5x &= 4(x+2)\\ 5x &= 4x+8\\ x &= 8\end{aligned}$$

Vastaus: $x = 8$

202A. Kartan mittakaava on 1:2000, eli 1 mm kartalla vastaa 2000 mm luonnossa.

Täten
92 mm = 92 · 2000 mm = 184 000 mm = 184 m ≈180 m ja
73 mm = 73 · 2000 mm = 146 000 mm = 146 m ≈ 150 m.

Kolmion kahden pisimmän sivun pituudet ovat 92 mm ja 73 mm, joten kolmion hypotenuusan pituus on 92 mm ja tuntematon sivu x on kolmion toinen kateetti. Ratkaistaan sen pituus Pythagoraan lauseella.

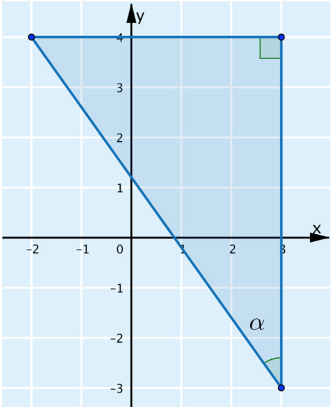
$$x^2 + 73^2 = 92^2$$
$$x^2 = 92^2 - 73^2$$
$$x^2 = 3135$$
$$x = 55{,}991\ldots$$

Kolmannen sivun pituus luonnossa on
55,991… · 2000 mm = 111 982,141… mm = 111,982… m ≈ 110 m.

Tontin pinta-ala on
$$A = \frac{146\text{ m} \cdot 111{,}982\ldots\text{ m}}{2} = 8174{,}696\ldots\text{ m}^2 \approx 8200\text{ m}^2.$$

Vastaus: 150 m, 110 m, 180 m ja 8200 m^2

203B. **a)** Piirretään kuva tilanteesta.



Kolmio on suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet voidaan laskea kärkipisteiden koordinaattien avulla.

Pisteiden (−2, 4) ja (3, 4) välillä olevan vakaasuuntaisen kateetin pituus on 3 − (−2) = 5.

Pisteiden (3, 4) ja (3, −3) välillä olevan pystysuuntaisen kateetin pituus on 4 − (−3) = 7.

Määritetään kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{5}{7} \\ \alpha &= 35{,}537...^\circ \\ \alpha &\approx 36^\circ \end{aligned}$$

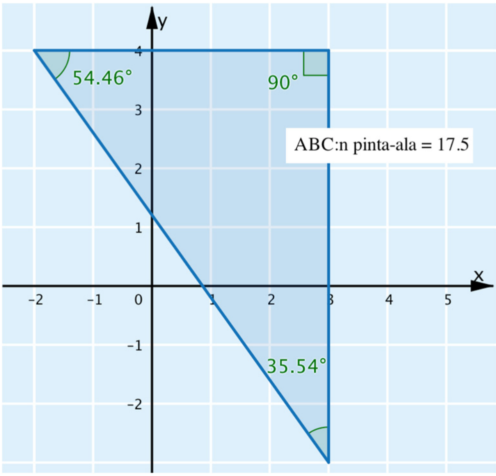
Toinen terävä kulma on
$180^\circ - 90^\circ - 35{,}537\ldots^\circ = 54{,}462\ldots^\circ \approx 54^\circ$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{5 \cdot 7}{2} = 17{,}5.$$

Vastaus: 36° ja 54°; 17,5

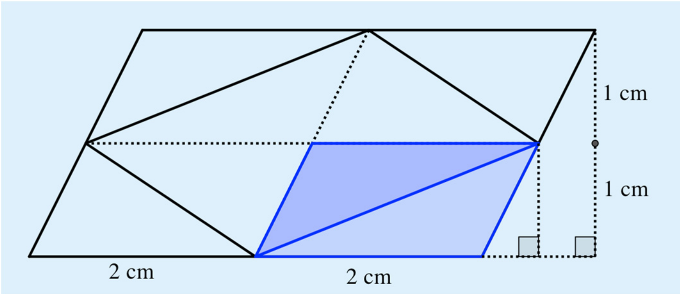
b) Piirretään kolmio sopivalla ohjelmalla ja määritetään kolmion kulmien suuruudet ja pinta-ala ohjelman avulla.



Videossa https://vimeo.com/280318825/9d7dbe9b7f näytetään, miten ratkaisu voidaan tehdä ohjelman avulla.

Vastaus: 36° ja 54°; 17,5

204A. Piirretään kuvaan apuviivoja.



Apuviivat jakavat suunnikkaan neljään yhtenevään pienempään suunnikkaaseen, joissa lävistäjä jakaa suunnikkaan puoliksi kolmioihin. Kunkin kolmion kannan pituus on puolet ison suunnikkaan sivun pituudesta eli 2 cm ja korkeus puolet ison suunnikkaan korkeudesta eli 1 cm.

Sisään piirretty suunnikas koostuu neljästä tällaisesta kolmiosta, joten sen pinta-ala saadaan kolmioiden pinta-alan avulla.

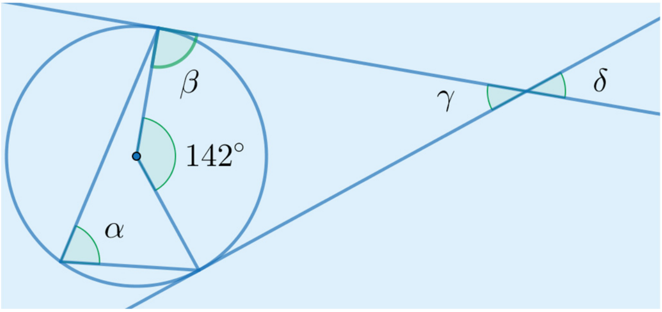
$$A = 4 \cdot \frac{2\text{ cm} \cdot 1\text{ cm}}{2} = 4\text{ cm}^2$$

Pienen suunnikkaan pinta-ala on 4 cm^2.

Vastaus: 4 cm^2

VAHVISTA OSAAMISTA

205A.



142°:een kulma on keskuskulma, jonka kanssa samaa kaarta vastaava kehäkulma on kulma α.

Kehäkulman suuruus on puolet sitä vastaavan keskuskulman suuruudesta, joten $\alpha = \frac{142°}{2} = 71°$.

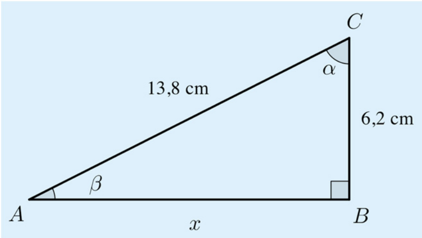
Koska suora s on ympyrän tangentti, se on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan. Siis kulma $\beta = 90°$.

Keskuskulman 142° ja tangenttikulman γ summa on 180°, joten $\gamma = 180° - 142° = 38°$.

Kulma δ on ristikulma kulman γ kanssa. Ristikulmat ovat yhtä suuret, joten $\delta = \gamma = 38°$.

Vastaus: $\alpha = 71°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 38°$ ja $\delta = 38°$

206B. Piirretään kuva.



a) Merkitään kateetin *AB* pituutta kirjaimella *x*. Määritetään kateetin *AB* pituus Pythagoraan lauseen avulla. Ratkaistaan yhtälö ohjelman avulla.

$$x^2 + 6{,}2^2 = 13{,}8^2$$
$$\ldots$$
$$x = _{(\pm)}12{,}328\ldots$$
$$x \approx 12{,}3$$

Kateetin *BC* pituus on noin 12,3 cm.

Vastaus: 12,3 cm

b) Määritetään kulman α suuruus kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{6{,}2}{13{,}8}$$
$$\alpha = 63{,}302\ldots^\circ$$
$$\alpha \approx 63^\circ$$

Kolmion kulmien summa on 180°, joten kulman β suuruus on $\beta = 180^\circ - 90^\circ - 63{,}302\ldots^\circ = 26{,}697\ldots^\circ \approx 27^\circ$.

Vastaus: 63° ja 27°

c) Valitaan kannaksi kateetti *AB*, jolloin korkeus on kateetin *BC* pituus.

Kolmion kanta on a = 12,328… cm ja korkeus h = 6,2 cm, joten pinta-ala on

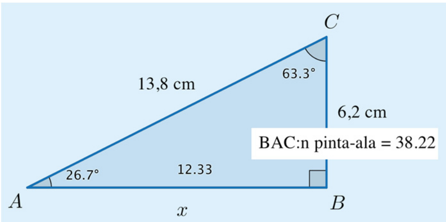
$$A = \frac{12{,}328...\text{ cm} \cdot 6{,}2\text{ cm}}{2} = 38{,}219...\text{ cm}^2 \approx 38\text{ cm}^2$$

Kolmion pinta-ala on noin 38 cm^2.

Vastaus: 38 cm^2

d) Piirretään kolmio sopivalla ohjelmalla, ja määritetään kateetin *BC* pituus, terävien kulmien suuruudet ja kolmion pinta-ala.

Videossa https://vimeo.com/280318598/c3612278c7 näytetään, miten kolmio voidaan piirtää sopivalla ohjelmalla.



Ohjelman avulla piirretystä kolmiosta huomataan, että a-c-kohdissa lasketut tulokset ovat oikeita.

Vastaus: –

207A. **a)** Kolmion sivut ovat 5,0 cm, 5,0 cm ja 8,9 cm. Tarkistetaan toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen. Kaksi lyhintä sivua olisivat suorakulmaisen kolmion kateetit ja pisin hypotenuusa.

kateettien neliöiden summa: $5^2 + 5^2 = 50$
hypotenuusan neliö: $8{,}9^2 = 79{,}21$

Pythagoraan lause ei toteudu, joten kolmio ei ole suorakulmainen. Kolmiossa on kuitenkin kaksi yhtä pitkää sivua, joten kolmio on tasakylkinen.

Vastaus: epätosi, tasakylkinen

b) Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60°, joten tasasivuinen kolmio ei voi olla suorakulmainen.

Vastaus: epätosi, ei voi olla

c) Tasakylkisessä kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua. Jos lisäksi kolmaskin sivu on yhtä pitkä, niin sanotaan, että kolmio on tasasivuinen. Väite on tosi.

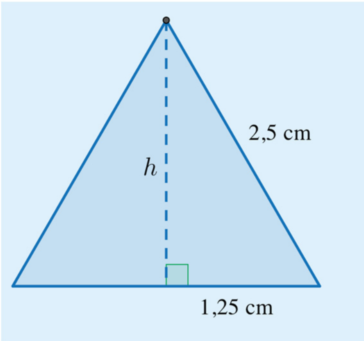
Vastaus: tosi

d) Säännöllisessä monikulmiossa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat yhtä suuria. Tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat ovat 60°.

Vastaus: tosi

208A. Merkitään tasasivuisen kolmion korkeusjanaa kirjaimella h. Korkeusjana jakaa kannan kahteen yhtä pitkään osaan. Kannan puolikas on

$$\frac{2,5\text{ cm}}{2} = 1,25\text{ cm}.$$



Ratkaistaan kolmion korkeus Pythagoraan lauseen avulla.

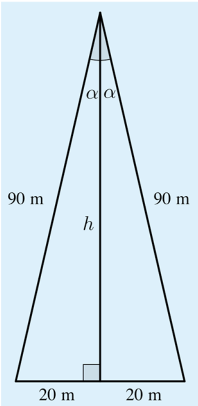
$$h^2 + 1{,}25^2 = 2{,}5^2$$
$$h^2 = 2{,}5^2 - 1{,}25^2$$
$$h^2 = 4{,}687\ldots$$
$$h = 2{,}165\ldots$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{2,5\text{ cm} \cdot 2{,}165\ldots\text{ cm}}{2} = 2{,}706\ldots\text{ cm}^2 \approx 2{,}7\text{ cm}^2.$$

Vastaus: $2{,}7\text{ cm}^2$

209A. Merkitään tasakylkisen kolmion korkeusjanaa kirjaimella h. Korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.



a) Määritetään huippukulman puolikas α suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla.

$$\sin\alpha = \frac{20}{90}$$
$$\alpha = 12{,}839...^\circ$$

Huippukulman suuruus on $2\alpha = 2 \cdot 12{,}839...^\circ = 25{,}679...^\circ \approx 26^\circ$

Vastaus: 26°

b) Määritetään kolmion korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

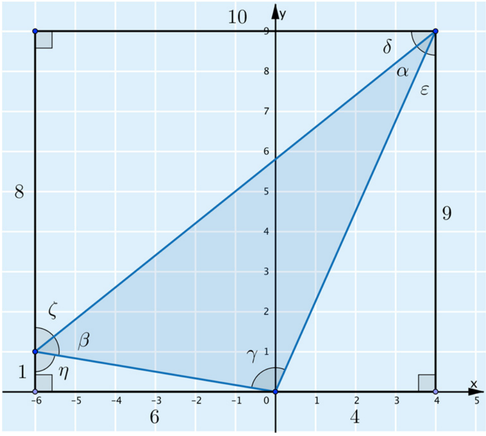
$$h^2 + 20^2 = 90^2$$
$$h^2 = 7700$$
$$h = _{(\pm)} 87{,}749....(\text{m})$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{40\ \text{m} \cdot 87{,}749...\ \text{m}}{2} = 1754{,}992...\ \text{m}^2 \approx 1755\ \text{m}^2.$$

Vastaus: 1755 m^2

210B. Piirretään kolmio koordinaatistoon ja täydennetään kuvioon suorakulmio, joka kulkee kolmion kärkien kautta ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.



a) Lasketaan kulman α suuruus kulmien δ ja ε avulla.

$$\tan\delta = \frac{8}{10}$$
$$\delta = 36,659...^\circ$$
$$\tan\varepsilon = \frac{4}{9}$$
$$\varepsilon = 23,962...^\circ$$
$$\alpha = 90^\circ - 36,659...^\circ - 23,962...^\circ = 27,377...^\circ \approx 27,4^\circ$$

Lasketaan kulman β suuruus kulmien ζ ja η avulla.

$$\tan\zeta = \frac{10}{8}$$
$$\zeta = 51,340...^\circ$$
$$\tan\eta = \frac{6}{1}$$
$$\eta = 80,537...^\circ$$
$$\beta = 180^\circ - 51,340...^\circ - 80,537...^\circ = 48,122...^\circ \approx 48,1^\circ$$

Kulman γ suuruus on
$180^\circ - 27,377\ldots^\circ - 48,122\ldots^\circ = 104,500^\circ \approx 104,5^\circ$.

Vastaus: 27,4°, 48,1° ja 104,5°

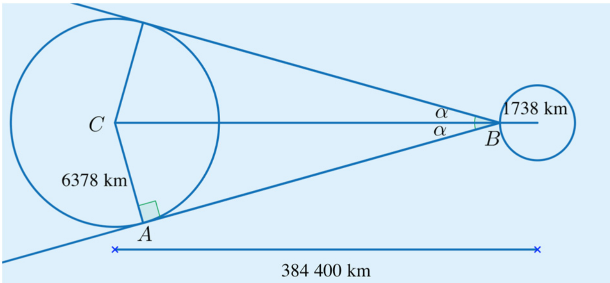
b) Kolmion pinta-ala saadaan vähentämällä suorakulmion pinta-alasta kulmiin jäävien suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat.

$$A = 10\cdot 9 - \frac{10\cdot 8}{2} - \frac{4\cdot 9}{2} - \frac{6\cdot 1}{2} = 29$$

Kolmion pinta-ala on 29,0.

Vastaus: 29,0

211B. Piirretään hahmotelma tilanteesta.



Maata katsellaan kuun pinnalta pisteessä B. Näkökulma on kuvion merkinnöillä 2α.

Kuvioon muodostuu suorakulmainen kolmio, kateetin pituus on maapallon säde 6378 km ja hypotenuusan
384 400 km − 1738 km = 382 662 km.

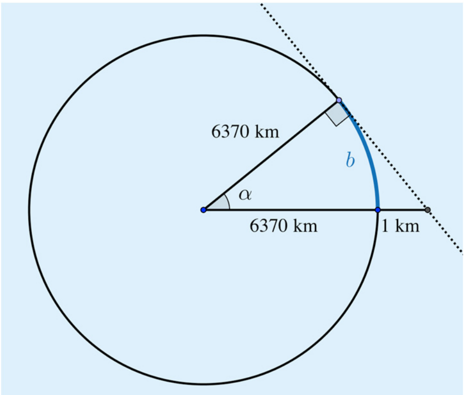
Ratkaistaan kulman α suuruus sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{6378}{382\,662}$$
$$\alpha = 0{,}990...^\circ$$

Maapallon näkyy kulmassa, jonka suuruus on
$2\alpha = 2\cdot 0{,}990\ldots^\circ = 1{,}910\ldots^\circ \approx 1{,}9^\circ$.

Vastaus: 1,9°

212B. Piirretään hahmotelma tilanteesta.



Etäisyys, joka tornista voidaan nähdä, on sektorin kaaren pituus b. Kuvioon muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka kateetin pituus on 6370 km ja hypotenuusan pituus on 6370 km + 1 km = 6371 km.

Sektorin keskuskulma α on suorakulmaisen kolmion terävä kulma. Lasketaan kulman α suuruus kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{6370\text{ km}}{6371\text{ km}}$$
$$\alpha = 1{,}0151...^\circ$$

Lasketaan sektorin kaaren pituus b.

$$b = \frac{1{,}0151...^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370\text{ km} = 112{,}864...\text{ km} \approx 113\text{ km}$$

Pilvenpiirtäjän huipulta voi enimmillään nähdä noin 113 km:n päähän merelle.

Vastaus: 113 km:n päähän

213A. Sijoitetaan sektorin kaaren pituus b = 15 cm ja keskuskulman suuruus α = 90° sektorin kaaren pituuden kaavaan ja ratkaistaan siitä ympyrän säde r.

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 2\pi r \\
15 &= \frac{90^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi r \\
15 &= 0,5\pi r \qquad \| : 0,5\pi \\
r &= 9,549... \\
r &\approx 9,5
\end{aligned}
$$

Ympyrän säteen pituus on noin 9,5 cm.

Vastaus: $r \approx 9,5$ cm

214B. Merkitään keittiön todellista pinta-alaa kirjaimella x ja taulukoidaan tehtävänannon tietoja.

Pinta-ala	Mittakaava
3	1
x	200

Pohjapiirustus on yhdenmuotoinen todellisen keittiön kanssa. Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä keittiön todellinen pinta-ala x.

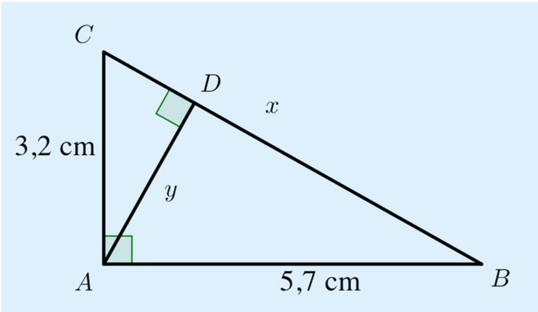
$$
\begin{aligned}
\frac{3}{x} &= \left(\frac{1}{200}\right)^2 \\
\frac{3}{x} &= \frac{1}{40\,000} \\
x &= 3\cdot 40\,000 \\
x &= 120\,000
\end{aligned}
$$

Keittiön todellinen pinta-ala on 120 000 cm^2 = 12 m^2.

Vastaus: 12 m^2

215B. Merkitään hypotenuusan pituutta kirjaimella x ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} x^2 &= 3,2^2 + 5,7^2 \\ x^2 &= 42,73 \\ x &= \sqrt{42,73} \\ x &= 6,536... \\ x &\approx 6,5 \end{aligned}$$



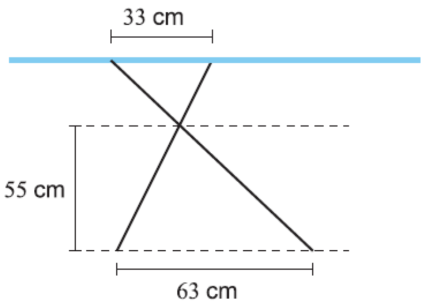
Kolmioissa ABC ja ADC on molemmissa 90°:een kulma ja kulma C on yhteinen. Kolmiot ovat siis yhdenmuotoisia kk-lauseen nojalla. Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinpituuksien suhde on vakio. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta y.

$$\begin{aligned} \frac{y}{3,2} &= \frac{5,7}{6,536...} \\ 6,536...y &= 3,2 \cdot 5,7 \qquad \| : 6,536... \\ y &= 2,790... \\ y &\approx 2,8 \end{aligned}$$

Hypotenuusan pituus on noin 6,5 cm ja suoran kulman kärjen etäisyys origosta on noin 2,8 cm.

Vastaus: 6,5 cm ja 2,8 cm

216A.



Koska silityslauta on yhdensuuntainen lattian kanssa, lattian ja pidemmän jalan välinen kulma on yhtä suuri kuin laudan ja pidemmän jalan välinen kulma. Myös alemman kolmion yläosassa oleva kulma on yhtä suuri kuin ylemmän kolmion alaosan kulma, koska kulmat ovat ristikulmia. Siis jalkojen muodostamat kolmiot ovat yhdenmuotoisia kk-lauseen nojalla.

Merkitään ylemmän kolmion korkeutta kirjaimella x ja muodostetaan verranto yhdenmuotoisuuden avulla.

$$\frac{x}{33} = \frac{55}{63}$$
$$63x = 55 \cdot 33 \qquad \| :63$$
$$x = 28{,}809...$$

Silityslaudan korkeus lattiasta on
55 cm + 28,809… cm = 83,809… cm ≈ 84 cm.

Vastaus: 84 cm

217A. a) Mittakaava on vastinpituuksien suhde. Määritetään mittakaava annettujen pituuksien avulla.

$$k = \frac{h_{\text{kuva}}}{h_{\text{Osmo}}} = \frac{75\text{ cm}}{165\text{ cm}} = \frac{5}{11}$$

Muotokuvan mittakaava on 5:11.

Vastaus: 5:11

b) Lasketaan Osmon pituus pienennöksessä.

$$\begin{aligned}
\frac{h_{\text{pieni}}}{h_{\text{iso}}} &= \frac{1}{6} \\
6h_{\text{pieni}} &= h_{\text{iso}} \qquad \| :6 \\
h_{\text{pieni}} &= \frac{h_{\text{iso}}}{6} \\
h_{\text{pieni}} &= \frac{75\text{ cm}}{6} \\
h_{\text{pieni}} &= 12{,}5\text{ cm}
\end{aligned}$$

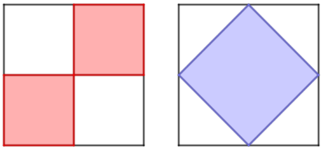
Määritetään pienennöksen mittakaava Osmon pituuden pienessä kuvassa ja todellisuudessa avulla.

$$\frac{h_{\text{pieni}}}{h_{\text{Osmo}}} = \frac{12{,}5\text{ cm}}{165\text{ cm}} = \frac{5}{66}$$

Pienennös on suhteessa 5:66.

Vastaus: 5:66

218B.



Punaisen neliön sivun pituus on puolet ison neliön sivun pituudesta, joten $A_{\text{punaiset neliöt}} = 2 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$.

Sinisen neliön sivun pituus on kulmaan jäävän suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus. Merkitään sinisen neliön sivun pituutta kirjaimella s. Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan siitä sivun pituus s.

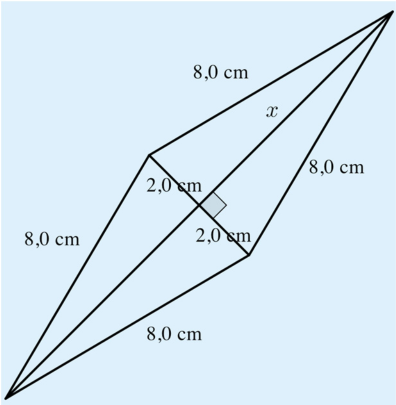
$$\begin{aligned} 2{,}5^2 + 2{,}5^2 &= s^2 \\ s^2 &= 12{,}5 \\ s &= \sqrt{12{,}5} \end{aligned}$$

Sinisen neliön pinta-ala on
$A_{\text{sininen neliö}} = \sqrt{12{,}5} \cdot \sqrt{12{,}5} = 12{,}5$

Pinta-alat ovat yhtä suuret.

Vastaus: –

219B. Piirretään kuva tilanteesta.



Neljäkkään lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti, joten lävistäjä jakaa neljäkkään kahteen tasakylkiseen kolmioon.

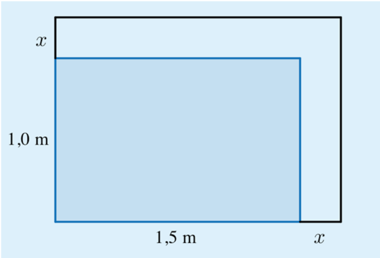
Merkitään lävistäjän puolikkaan pituutta kirjaimella x. Lasketaan lävistäjän puolikkaan pituus x Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 2{,}0^2 + x^2 &= 8{,}0^2 \\ x^2 &= 60{,}0 \\ x &= _{(}\pm_{)} 7{,}745... \end{aligned}$$

Lävistäjän pituus on $2x = 2 \cdot 7{,}745\ldots$ cm $= 15{,}491\ldots$ cm ≈ 15 cm.

Vastaus: 15 cm

220B. Merkitään sivun pituuden lisäystä kirjaimella x.



Alkuperäisen ikkunan pinta-ala on 1,0 m · 1,5 m = 1,5 m^2.

Uuden ikkunan pinta-ala on tällöin 2 · 1,5 m^2 = 3,0 m^2.

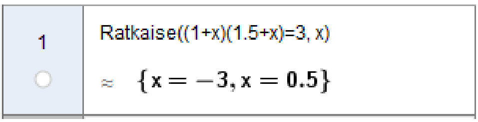
Uuden ikkunan sivut ovat $1 + x$ ja $1{,}5 + x$.

Uuden ikkunan pinta-ala sivujen avulla lausuttuna on $(1 + x)(1{,}5 + x)$.

Muodostetaan yhtälö ikkunan pinta-alan avulla ja ratkaistaan siitä sivun pituuden lisäys x.

$(1 + x)(1{,}5 + x) = 3$

Ratkaistaan yhtälö symbolisen laskennan ohjelmalla.



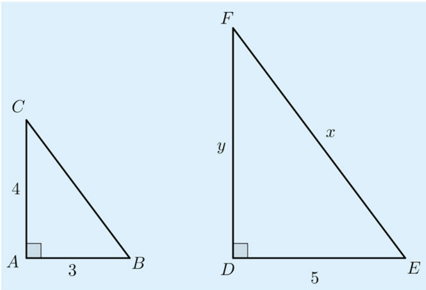
Hylätään negatiivinen ratkaisu.

Sivua on kasvatettava 0,5 m = 50 cm.

Uuden ikkunan sivujen pituudet ovat
1 m + 0,5 m = 1,5 m = 150 cm ja
1,5 m + 0,5 m = 2,0 m = 200 cm.

Vastaus: 150 cm ja 200 cm

221B. Piirretään kuva tilanteesta. Merkitään kolmion *DEF* hypotenuusan pituutta kirjaimella x ja kateetin *DF* pituutta kirjaimella y.



Ratkaistaan ensin kolmion *DEF* kateetin *DF* pituus. Kolmiot *ABC* ja *DEF* ovat yhdenmuotoisia, joten vastinsivujen pituuksista saadaan verranto $\frac{4}{y}=\frac{3}{5}$.

Ratkaistaan verrannosta kateetin y pituus.

$$\begin{aligned} \frac{4}{y} &= \frac{3}{5} \\ 3y &= 20 \qquad \parallel :3 \\ y &= \frac{20}{3} \\ y &\approx 6,666... \end{aligned}$$

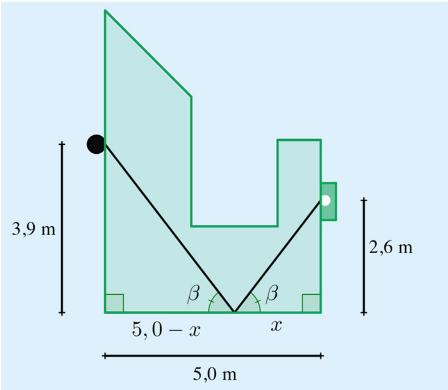
Lasketaan kolmion *DEF* hypotenuusan pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 5^2 + 6,666...^2 &= x^2 \\ x^2 &= 69,444... \\ x &= _{(}\pm_{)} 8,333... \\ x &\approx 8,3 \end{aligned}$$

Kolmion *DEF* hypotenuusan pituus on noin 8,3.

Vastaus: 8,3

222B. Merkitään kimpoamiskohdan etäisyyttä aloitusalustan reunasta kirjaimella x.



Kuvassa on kaksi suorakulmaista kolmioita, joissa on yhtä suuret terävät kulmat β. kk-lauseen perusteella kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Vasemmanpuoleisen kolmion 3,9 metrin pituista kateettia vastaa oikeanpuoleisessa kolmiossa 2,6 metrin pituinen kateetti. Vastaavasti $5{,}0 - x$ ja x ovat vastinpituuksia.

Muodostetaan vastinsivujen pituuksista verranto ja ratkaistaan siitä etäisyys x ohjelmalla.

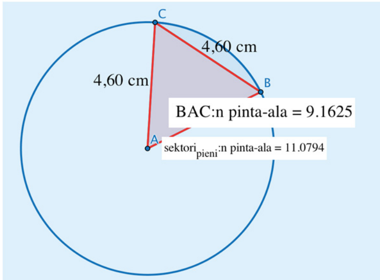
$$\frac{5{,}0 - x}{x} = \frac{3{,}9}{2{,}6}$$
$$\vdots$$
$$x = 2$$

Tähtäyskohta on 2,0 metrin päässä aloituspaikan reunasta.

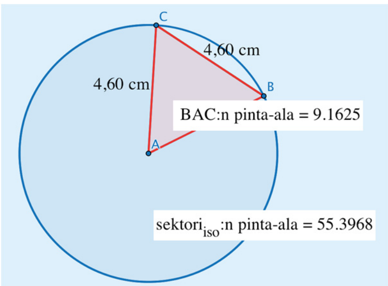
Vastaus: 2,0 metrin päähän aloituspaikan reunasta

223B. **a)** Piirretään ympyrä, jonka säde on 4,60 cm ja ympyrälle jänne, jonka säde on 4,60 cm. Piirretään sitten sektori, jonka kaaren pituus on jänteen rajoittama lyhempi osuus ympyrän kehästä. Piirretään lopuksi kolmio, jonka kärjet ovat ympyrän keskipisteessä ja jänteen päätepisteissä. Määritetään sektorin ja kolmion pinta-alat pinta-alatyökalulla. Jänteen erottaman pienemmän segmentin pinta-ala on sektorin ja kolmion pinta-alojen erotus.

Pienemmän segmentin pinta-ala on
$11{,}0794\ \text{cm}^2 - 9{,}1625\ \text{cm}^2$
$= 1{,}9169\ \text{cm}^2 \approx 1{,}92\ \text{cm}^2$.



Piirretään suuremman segmentin pinta-alan määrittämistä varten sektori, jonka kaaren pituus on jänteen rajoittama pidempi osuus ympyrän kehästä. Jänteen erottaman suuremman segmentin pinta-ala on sektorin ja kolmion pinta-alojen summa.

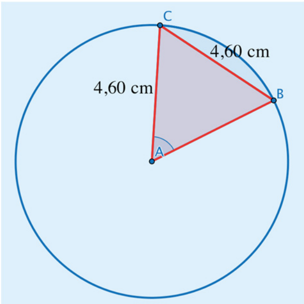


Suuremman segmentin pinta-ala on
$55{,}3968\ \text{cm}^2 + 9{,}1625\ \text{cm}^2 = 64{,}5593\ \text{cm}^2 \approx 64{,}6\ \text{cm}^2$.

Videossa https://vimeo.com/280318654/f6db896bf8 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelman avulla.

Vastaus: $1{,}92\ \text{cm}^2$ ja $64{,}6\ \text{cm}^2$

b) Kolmion sivut ovat yhtä pitkiä, joten kolmio on tasasivuinen. Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60°.

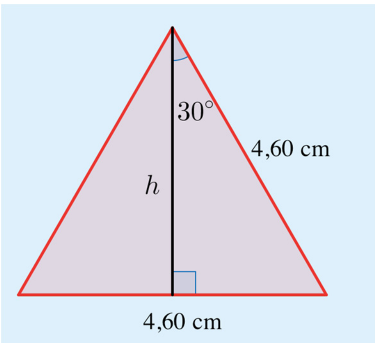


Pienemmän segmentin pinta-ala:

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A_{\text{sektori}} = \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot (4{,}60\text{ cm})^2 = 11{,}079...\text{cm}^2$$

Kolmion korkeusjana puolittaa keskuskulman, joten sen suuruus on 30°. Lasketaan kolmion korkeus h kosinin avulla.



$$\cos 30° = \frac{h}{4{,}60}$$
$$h = 3{,}983...$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{4,60\text{ cm} \cdot 3,983\ldots\text{ cm}}{2} = 9,162\ldots\text{ cm}^2.$$

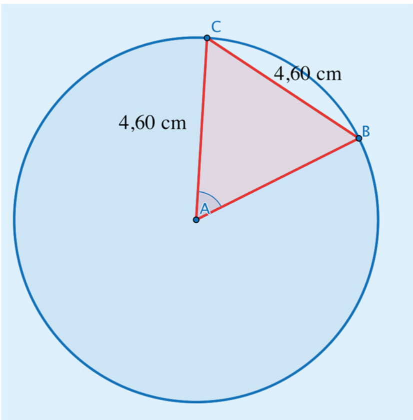
Pienemmän segmentin pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} \\ &= 11,079\ldots\text{ cm}^2 - 9,162\ldots\text{ cm}^2 \\ &= 1,916\ldots\text{ cm}^2 \\ &\approx 1,92\text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Suuremman segmentin pinta-ala:

Lasketaan sektorin pinta-ala. Sektorin keskuskulman suuruus on $360° - 60° = 300°$.

$$A_{\text{sektori}} = \frac{300°}{360°} \cdot \pi \cdot (4,60\text{ cm})^2 = 55,396\ldots\text{cm}^2$$

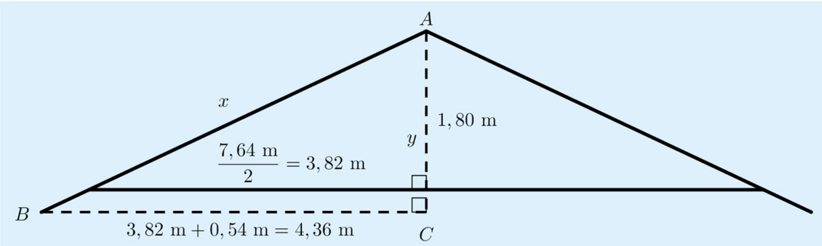


Suuremman segmentin pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} + A_{\text{kolmio}} \\ &= 55,396\ldots\text{ cm}^2 + 9,162\ldots\text{ cm}^2 \\ &= 64,559\ldots\text{ cm}^2 \\ &\approx 64,6\text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Vastaus: $1,92\text{ cm}^2$ ja $64,6\text{ cm}^2$

224B. Merkitään kuvaan räystään reunan korkeudelle suoraan pisteen A alapuolelle piste *C*. Merkitään pisteiden *A* ja *C* välistä etäisyyttä kirjaimella *y* ja janan *AB* pituutta kirjaimella *x*.



Kuvaan piirretty katon rajan ja katon lappeen osan rajaama kolmio on yhdenmuotoinen kolmion *ABC* kanssa.

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä katon lappeen korkeus *y*.

$$\frac{y}{1{,}80} = \frac{4{,}36}{3{,}82}$$
$$3{,}82y = 1{,}80 \cdot 4{,}36 \qquad \| : 3{,}82$$
$$y = 2{,}0544...$$

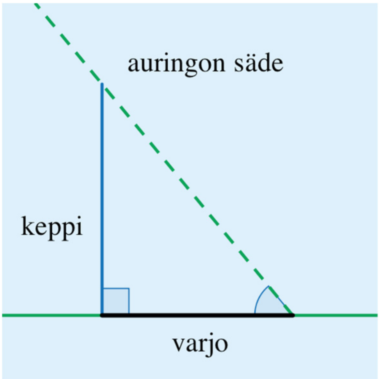
Kolmio *ABC* on suorakulmainen ja *x* on sen hypotenuusa. Ratkaistaan lappeen pituus *x* Pythagoraan lauseen avulla.

$$4{,}36^2 + 2{,}0544...^2 = x^2$$
$$x^2 = 23{,}230....$$
$$x = _{(}\pm_{)} 4{,}819...$$

Lappeen pituus on 4,819… m ≈ 4,82 m.

Vastaus: 4,82 m

225B.



a) Otto voi asettaa puukepin pystysuoraan maahan ja mitata puukepin maan päälle jäävän osan pituuden. Lisäksi Oton tulee mitata puukepistä syntyvän varjon pituus. Tämän jälkeen Otto voi laskea syntyvästä suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla Auringon säteiden ja maan välisen kulman suuruuden.

Vastaus: –

b) Oton tulee ensin selvittää a-kohdan tavalla Auringon säteiden ja maanpinnan välisen kulman suuruus. Tämän jälkeen Otto voi hyödyntää puun varjoa ja juuri määrittämäänsä kulmaa. Hänen tulee mitata puun varjon pituus ja muodostaa tangentin avulla yhtälö puun korkeuden laskemiseksi.

Toisaalta, puun korkeuden ja puun varjon pituuden muodostama kolmio on yhdenmuotoinen puukepin pituuden ja puukepin varjon pituuden muodostaman kolmion kanssa, joten Otto voi laskea puun korkeuden myös yhdenmuotoisten kolmioiden avulla.

Vastaus: –

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

226A. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella a. Neliön piirin on tällöin $p_{\text{neliö}} = 4a$.

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r. Ympyrän kehän pituus on $p_{\text{ympyrä}} = 2\pi r$.

Neliön piiri on yhtä pitkä kuin ympyrän kehän pituus, joten saadaan yhtälö $4a = 2\pi r$. Ratkaistaan yhtälöstä ympyrän säteen lauseke.

$$\begin{aligned} 4a &= 2\pi r \qquad \| :2\pi \\ r &= \frac{4a}{2\pi} \\ r &= \frac{2a}{\pi} \end{aligned}$$

Neliön pinta-ala on $A_{\text{neliö}} = a^2$ ja ympyrän pinta-ala on
$$A_{\text{ympyrä}} = \pi\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 = \pi \cdot \frac{4a^2}{\pi^2} = \frac{4a^2}{\pi}.$$

a) Lasketaan suhde.

$$\frac{a^2}{\frac{4a^2}{\pi}} = \frac{1}{\frac{4}{\pi}} = 0,78539...$$

Neliön pinta-ala on 100 % − 78,539… % = 21,460… % ≈ 21,5 % pienempi kuin ympyrän pinta-ala.

Vastaus: 21,5 %

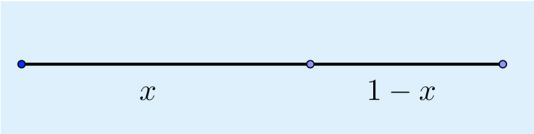
b) Lasketaan suhde.

$$\frac{\frac{4a^2}{\pi}}{a^2} = \frac{4}{\pi} = 1,27323...$$

Ympyrän pinta-ala on 127,323… % − 100 % = 27,323… % ≈ 27,3 % suurempi kuin neliön pinta-ala.

Vastaus: 27,3 %

227B. Piirretään jana, jonka pituus on 1. Rajataan janasta pituus x (> 0,5), jolloin janan toisen osan pituus on $1 - x$.



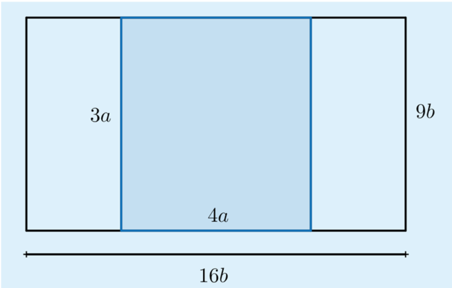
Muodostetaan yhtälö suhteiden avulla. Ratkaistaan yhtälö ohjelman avulla.

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$
$$x^2 + x - 1 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$x = 0,618... \quad \text{tai} \quad x = -1,618...$$

Negatiivinen vastaus ei kelpaa, joten $x = 0,618\ldots$ ja kysytty suhde $\varphi = \frac{1}{x} = \frac{1}{0,618...}$.

Vastaus: 1:0,618

228B. Piirretään kuva tilanteesta. Merkitään kuvan korkeutta $3a$ ja leveyttä $4a$ ja television korkeutta $9b$ ja leveyttä $16b$.



Asetetaan kuva televisioruutuun niin, että kuva peittää ruudun pystysuunnassa. Tällöin vaakasuuntaan jää tyhjää tilaa.

Koska kuvan korkeus ja ruudun korkeus ovat yhtä pitkät, niin $3a = 9b$. Tästä ratkaisuna saadaan $a = 3b$.

Lausutaan kuvan pinta-ala kirjaimen b avulla:
$A_{\text{kuva}} = 3a \cdot 4a = 12a^2 = 12 \cdot (3b)^2 = 108b^2$

Lausutaan ruudun pinta-ala kirjaimen b avulla:
$A_{\text{ruutu}} = 9b \cdot 16b = 144b^2$

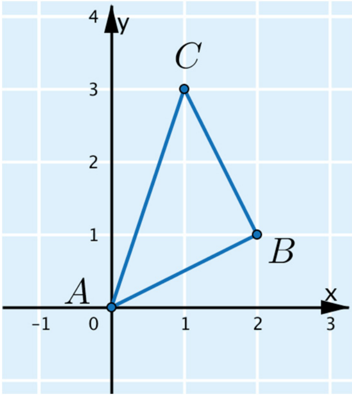
Lasketaan kuinka monta prosenttia kuva vie ruudusta.

$$\frac{A_{\text{kuva}}}{A_{\text{ruutu}}} = \frac{108b^2}{144b^2} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\ \%$$

Koska kuva peittää ruudusta 75 %, tyhjää tilaa jää 100 % − 75 % = 25 %.

Vastaus: 25 %

229B. Piirretään kuva.



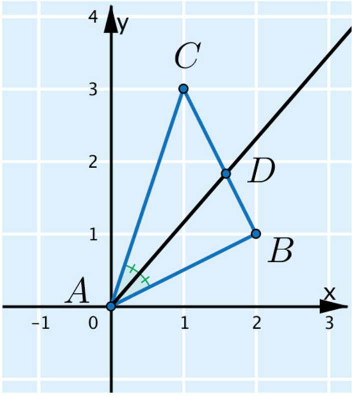
a) Lasketaan janojen AB ja AC pituudet.

$$|AB| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$
$$|AC| = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

Vastaus: $\sqrt{2}$

b)



Kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.
Näin ollen $\dfrac{|CD|}{|DC|} = \dfrac{\sqrt{2}}{1}$.

Janan jakopisteen koordinaatit saadaan oheisella kaavalla.

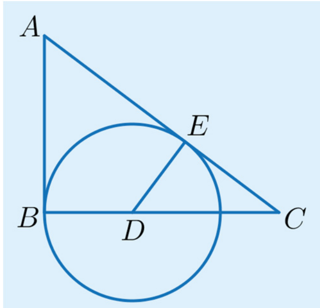
janapiste	$P=\left(\dfrac{px_1+qx_2}{p+q}, \dfrac{py_1+qy_2}{p+q}\right)$	

Pisteen D koordinaatit ovat

$$\left(\frac{1\cdot 1+\sqrt{2}\cdot 2}{1+\sqrt{2}}, \frac{1\cdot 3+\sqrt{2}\cdot 1}{1+\sqrt{2}}\right) = (1{,}585...;1{,}828..) \approx (1{,}59;1{,}83).$$

Vastaus: (1,59; 1,83)

230B. Merkitään ympyrän keskipistettä kirjaimella D ja hypotenuusan ja ympyrän sivuamispistettä kirjaimella E.



Kulmat CBA ja DEC ovat suoria kulmia.

Kulma BAE on kulmaa BDE vastaava tangenttikulma.

Näin ollen $\sphericalangle BAE = 180° - \sphericalangle BDE.$

Kulmat BDE ja CDE ovat vieruskulmia, joten $\sphericalangle CDE = 180° - \sphericalangle BDE.$ Siis $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CDE.$

Kolmioilla CED ja CBA on kaksi yhtä suurta vastinkulmaa, joten CED ja CBA ovat yhdenmuotoisia.

Pythagoraan lauseen nojalla:

$$\begin{aligned}
|BC|^2 + |AB|^2 &= |CA|^2 \\
4^2 + 3^2 &= |CA|^2 \\
|CA|^2 &= 25 \\
|CA| &= _{(}\pm_{)} 5.
\end{aligned}$$

$|AB| = |AE|$
Siis $|EC| = |CA| - |AE| = 5 - 3 = 2.$

Merkitään sädettä kirjaimella r ja muodostetaan verranto kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella. Sivun EC vastinsivu on sivu BC ja sivun DE vastinsivu on AB. Ratkaistaan verrannosta säteen pituus r.

$$\begin{aligned}
\frac{r}{3} &= \frac{2}{4} \\
4r &= 6 \qquad \| :4 \\
r &= \frac{6}{4} \\
r &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Vastaus: $\frac{3}{2}$

231B. Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Merkitään luonnon pinta-alaa A_1 ja A3-kokoisen kartan pinta-alaa A_2.

Tällöin pätee $\frac{A_2}{A_1}=\left(\frac{1}{25\,000}\right)^2$.

Ratkaistaan verrannosta pinta-ala A_1.

$$\frac{A_2}{A_1}=\left(\frac{1}{25\,000}\right)^2$$
$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{1}{25\,000^2}$$
$$A_1=25\,000^2\cdot A_2$$

Merkitään A2-kokoisen kartan pinta-alaa A_3. Kopioinnissa kartan pinta-ala kaksinkertaistuu, eli $A_3 = 2A_2$.

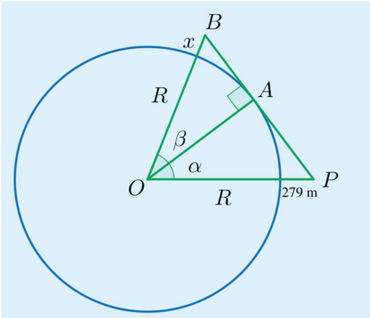
Muodostetaan suurennetun kartan pinta-alan ja luonnon pinta-alan välinen suhde ja ratkaistaan siitä mittakaava k.

$$\frac{A_3}{A_1}=k^2$$
$$\frac{2\cdot A_2}{A_1}=k^2$$
$$\frac{2\cdot A_2}{25\,000^2\cdot A_2}=k^2$$
$$k^2=\frac{2}{625\,000\,000}$$
$$k^2=\frac{1}{312\,500\,000}$$
$$k=\sqrt{\frac{1}{312\,500\,000}}$$
$$k=\frac{1}{17\,677{,}669...}$$

Suurennoksen mittakaava on likimain 1:17 678.

Vastaus: 1:17 678

232B. Piirretään kuva tilanteesta.



Piste B on kohta, joka juuri ja juuri nähdään Eiffel-tornin näköalatasanteelta 264 km:n päässä. Merkitään pisteen B etäisyyttä maanpinnasta kirjaimella x. Mikäli pituus x on korkeintaan 190 m, Etelätornin huippu voidaan nähdä. Katseen suuntaa kuvaava tangentti ja maapallo sivuavat toisiaan yhdessä pisteessä. Tangentti on kohtisuorassa maapallon sädettä vasten.

Merkitään $\gamma = \alpha + \beta$.

Koska Pariisin ja Brysselin välinen etäisyys on 264 km. Määritetään kulma γ sektorin kaaren pituuden avulla.

$$\begin{aligned} 264 &= \frac{\gamma}{360^\circ} \cdot 40\ 000 \quad \| : 40\ 000 \cdot 360^\circ \\ \gamma &= 2{,}376^\circ \end{aligned}$$

Määriterän kulman α suuruus suorakulmaisen kolmion OPA avulla.

Maapallon säde on $R = \dfrac{40\ 000 \text{ km}}{2\pi} = 6366{,}197... \text{ km}$.

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{6366{,}197...}{6366{,}197... + 0{,}279} \\ \cos\alpha &= 0{,}999956... \\ \alpha &= 0{,}536...^\circ \end{aligned}$$

Näin ollen $\beta = \gamma - \alpha = 2{,}376^\circ - 0{,}536...^\circ = 1{,}839...^\circ$

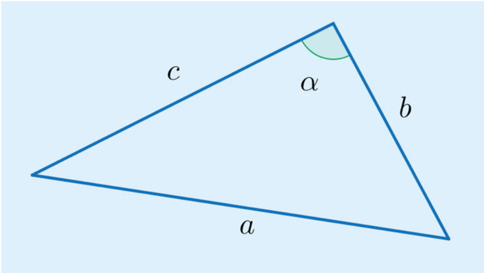
Muodostetaan suorakulmaisen kolmion *OAB* avulla yhtälö korkeuden *x* määrittämiseksi.

$$\begin{aligned}
\cos 1{,}839...° &= \frac{6366{,}197...}{6366{,}197... + x} && \| \cdot (6366{,}197... + x) \\
(6366{,}197... + x) \cdot \cos 1{,}839...° &= 6366{,}197... && \| : \cos 1{,}839...° \\
6366{,}197... + x &= \frac{6366{,}197...}{\cos 1{,}839...°} \\
x &= \frac{6366{,}197...}{\cos 1{,}839...°} - 6366{,}197... \\
x &= 3{,}282...
\end{aligned}$$

Koska $x = 3{,}282…$ km > 190 m, niin Eiffel-tornin näköalatasanteelta ei voida nähdä Etelätornin huippua.

Vastaus: Ei voida.

233B. Kosinilause on $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$.



a) Sijoitetaan $b = 5{,}8$, $c = 7{,}0$ ja $\alpha = 31°$ kosinilauseeseen ja määritetään kolmannen sivun pituus a.

$$a^2 = 5{,}8^2 + 7{,}0^2 - 2 \cdot 5{,}8 \cdot 7{,}0 \cdot \cos 31°$$
$$a^2 = 13{,}038...$$
$$a = _{(}\pm_{)} 3{,}610...$$
$$a \approx 3{,}6$$

Kolmannen sivun pituus on noin 3,6 m.

Vastaus: 3,6 m

b) Sijoitetaan a = 4,3 b = 2,0 ja c = 3,5 kosinilauseeseen ja määritetään sivun a vastakkaisen kulman suuruus.

$$\begin{aligned} 4{,}3^2 &= 2{,}0^2 + 3{,}5^2 - 2\cdot 2{,}0\cdot 3{,}5\cdot\cos\alpha \\ -14\cdot\cos\alpha &= 18{,}49 - 4{,}0 - 12{,}25 \\ -14\cos\alpha &= 2{,}24 \qquad \|:(-14) \\ \cos\alpha &= -0{,}16 \\ \alpha &= 99{,}206...^\circ \\ \alpha &\approx 99{,}2^\circ \end{aligned}$$

Sijoitetaan a = 2,0 b = 4,3 ja c = 3,5 kosinilauseeseen ja määritetään sivun a vastakkaisen kulman suuruus.

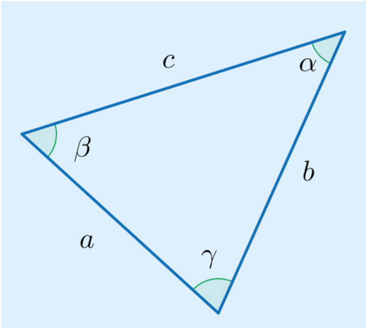
$$\begin{aligned} 2{,}0^2 &= 4{,}3^2 + 3{,}5^2 - 2\cdot 4{,}3\cdot 3{,}5\cdot\cos\beta \\ -30{,}1\cdot\cos\beta &= 4{,}0 - 18{,}49 - 12{,}25 \\ -30{,}1\cos\beta &= -26{,}74 \qquad \|:(-30{,}1) \\ \cos\beta &= 0{,}888... \\ \beta &= 27{,}330...^\circ \\ \beta &\approx 27{,}3^\circ \end{aligned}$$

Viimeisen kulman suuruus on
$180^\circ - 99{,}206...^\circ - 27{,}330...^\circ = 53{,}462...^\circ \approx 53{,}5^\circ$.

Kulmien suuruudet ovat 99,2°; 27,3° ja 53,5°.

Vastaus: 99,2°, 27,3° ja 53,5°

234B. Sinilause on $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.



Valitaan a = 4,7 cm, joten α = 54°. Olkoon β = 49°, joten sivun pituus b on kulmaa β vastapäätä olevan sivun pituus. Muodostetaan sinilauseen avulla yhtälö sivun pituuden b ratkaisemiseksi.

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin\alpha}&=\frac{b}{\sin\beta}\\ \frac{4,7}{\sin 54°}&=\frac{b}{\sin 49°}\\ \sin 54°\cdot b&=4,7\cdot\sin 49° \qquad \| :\sin 54°\\ b&=4,384....\\ b&\approx 4,4\end{aligned}$$

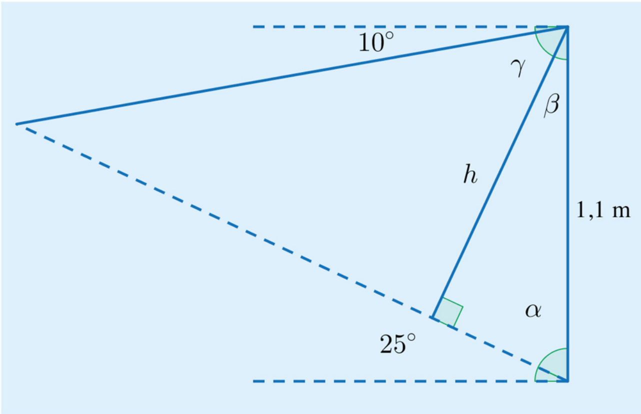
Olkoon γ = 77°, joten sivun pituus c on kulmaa γ vastapäätä olevan sivun pituus. Muodostetaan sinilauseen avulla yhtälö sivun pituuden c ratkaisemiseksi.

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin\alpha}&=\frac{c}{\sin\gamma}\\ \frac{4,7}{\sin 54°}&=\frac{c}{\sin 77°}\\ \sin 54° c&=4,7\cdot\sin 77° \qquad \| :\sin 54°\\ c&=5,660....\\ c&\approx 5,7\end{aligned}$$

Sivujen pituudet ovat 4,4 cm, 4,7 cm ja 5,7 cm.

Vastaus: 4,4 cm, 4,7 cm ja 5,7 cm

235B. Piirretään tehtävänannon kuvassa olevalle kolmiolle korkeusjana ja määritetään kulmien α, β ja γ suuruudet.



$\alpha = 90° - 25° = 65°$
$\beta = 180° - 90° - 65° = 25°$
$\gamma = 90° - 10° - 25° = 55°$

Lasketaan korkeusjanan pituus h suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla.

$$\sin 65° = \frac{h}{1,1}$$
$$h = 1,1 \cdot \sin 65°$$
$$h = 0,9969....$$

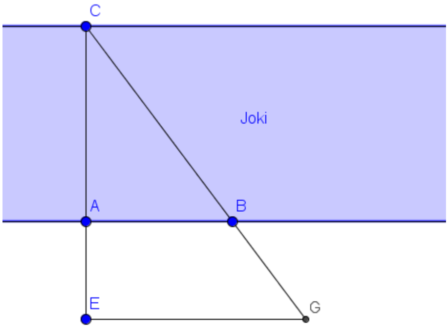
Merkitään markiisin pituutta kirjaimella x ja ratkaistaan se suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla.

$$\cos 55° = \frac{0,9969...}{x} \quad \| \cdot x$$
$$x \cdot \cos 55° = 0,9969... \quad \| : \cos 55°$$
$$x = 1,738...$$
$$x \approx 1,7$$

Markiisin pituuden tulee olla noin 1,7 m.

Vastaus: 1,7 m

236B. Piirretään kuva tilanteesta.



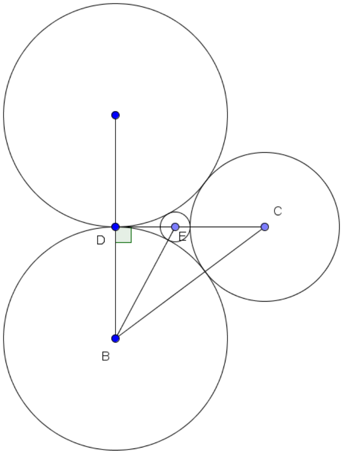
Jos kuvanmukaisessa tilanteessa tunnetaan janojen AB, AE ja EG pituudet, voidaan yhdenmuotoisten kolmioiden avulla muodostaa verranto janan CA pituuden ratkaisemiseksi.

$$\frac{CA}{CA + AE} = \frac{AB}{EG}$$

Näin ollen tulee pystyä mittaamaan likimain vastaavan kaltaiset mitat siten, että joen toisella puolella on käytettävänä kiintopiste C, johon kohdistetaan pisteiden B ja G kautta kulkeva jana BC ja pisteiden A ja E kautta kulkeva jana CE. Kolmion ECG ei tarvitse olla suorakulmainen.

Vastaus: −

237B. Piirretään kuvaan apuviivoja.



Olkoon pienen ympyrän säde r.
Janan BD pituus on 3 ja janan BC pituus 3 + 2 = 5. Merkitään jana CD pituutta kirjaimella s ja määritetään se Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 3^2 + s^2 &= 5^2 \\ s^2 &= 25 - 9 \\ s^2 &= 16 \\ s &= _{(}\pm_{)} 4 \end{aligned}$$

Janan BE pituus on $3 + r$ ja janan DE pituus on $4 - 2 - r = 2 - r$.
Kolmio BDE on suorakulmainen kolmio. Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö säteen r ratkaisemiseksi.

$$\begin{aligned} 3^2 + (2-r)^2 &= (3+r)^2 \\ 9 + 4 - 2r + r^2 &= 9 + 6r + r^2 \\ -8r &= -4 \qquad \| : (-8) \\ r &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vastaus: $\frac{1}{2}$