4 LUKUJONOT JA SUMMAT

ALOITA PERUSTEISTA

145A. Määritetään lukujonon (a_n) kolme ensimmäistä jäsentä ja sadas jäsen a_{100} sijoittamalla jäsenten järjestysluvut yleisen jäsenen a_n lausekkeeseen.

a) Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 4n + 3$.

$a_1 = 4 \cdot 1 + 3 = 7$
$a_2 = 4 \cdot 2 + 3 = 11$
$a_3 = 4 \cdot 3 + 3 = 15$
$a_{100} = 4 \cdot 100 + 3 = 403$

Vastaus: $a_1 = 7$, $a_2 = 11$, $a_3 = 15$ ja $a_{100} = 403$

b) Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 4 \cdot 3^n$.

$a_1 = 4 \cdot 3^1 = 12$
$a_2 = 4 \cdot 3^2 = 36$
$a_3 = 4 \cdot 3^3 = 108$
$a_{100} = 4 \cdot 3^{100} = 2{,}061\ldots \cdot 10^{48} \approx 2{,}06 \cdot 10^{48}$

Vastaus: $a_1 = 12$, $a_2 = 36$, $a_3 = 108$ ja $a_{100} = 2{,}06 \cdot 10^{48}$

146A. **a)** Aritmeettisen lukujonon erotusluku d on peräkkäisten jäsen erotus, joten $d = 8 - 1 = 7$.

Vastaus: $d = 7$

b) Geometrisen lukujonon suhdeluku q on peräkkäisten jäsenten osamäärä, joten $q = \dfrac{12}{2} = 6$.

Vastaus: $q = 6$

147A. Merkintä $a_3 = 2$ tarkoittaa, että lukujonon kolmas jäsen on 2, joten merkintä A ja kuvaus IV kuuluvat yhteen.

Merkintä $a_2 = 3$ tarkoittaa, että lukujonon toinen jäsen on 3, joten merkintä B ja kuvaus I kuuluvat yhteen

Merkintä $a_n = 2$ tarkoittaa, että lukujonon jokainen jäsen on 2, joten merkintä C ja kuvaus V kuuluvat yhteen

Merkintä $d = 3$ tarkoittaa, että lukujonon erotusluku on 3, joten merkintä D ja kuvaus II kuuluvat yhteen.

Merkintä $a_n = n$ tarkoittaa, että lukujonon jäsen on sama kuin jäsenen järjestysluku, joten lukujono on 1, 2, 3, … eli positiivisten kokonaislukujen jono. Merkintä E ja kuvaus III kuuluvat siis yhteen.

Vastaus: A: IV, B: I, C: V, D: II ja E: III

148A. Määritetään jäsenet a_2, a_3 ja a_4.

$a_2 = 1{,}5 \cdot a_{2-1} = 1{,}5 \cdot a_1 = 1{,}5 \cdot 6 = 9$
$a_3 = 1{,}5 \cdot a_{3-1} = 1{,}5 \cdot a_2 = 1{,}5 \cdot 9 = 13{,}5$
$a_4 = 1{,}5 \cdot a_{4-1} = 1{,}5 \cdot a_3 = 1{,}5 \cdot 13{,}5 = 20{,}25$

Vastaus: $a_2 = 9$, $a_3 = 13{,}5$ ja $a_4 = 20{,}25$

149A. **a)** Aritmeettisen lukujonon 1, 4, … erotusluku on $d = 4 - 1 = 3$, joten sen yleinen termi on
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1 + (n - 1) \cdot 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$.

Lasketaan kymmenes termi sijoittamalla yleisen termin lausekkeeseen järjestysluku $n = 10$.

$a_{10} = 3 \cdot 10 - 2 = 28$

Kymmenes termi on siis $a_{10} = 28$.

Vastaus: $a_{10} = 28$

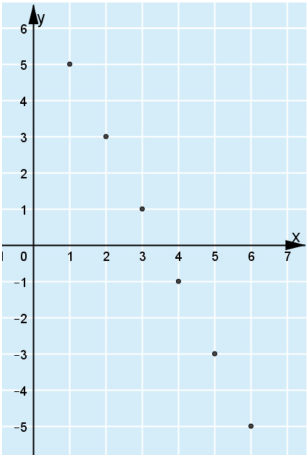
b) Geometrisen lukujonon $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$ suhdeluku on $q = \frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{2}{3}$,

joten kolmas termi on $a_3 = a_2 \cdot q = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.

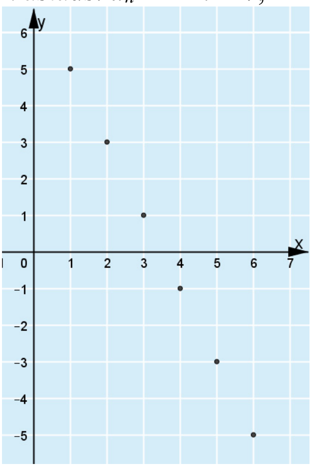
Vastaus: $a_3 = \frac{8}{27}$

150A. **a)** Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 5 + (n - 1) \cdot (-2) = 5 - 2n + 2 = -2n + 7.$

Havainnollistetaan lukujonoa koordinaatistossa.



Vastaus: $a_n = -2n + 7$,



b) Muodostetaan yleisen jäsenen lausekkeen avulla yhtälö ja tutkitaan sen avulla, onko luku -18 lukujonon jäsen.

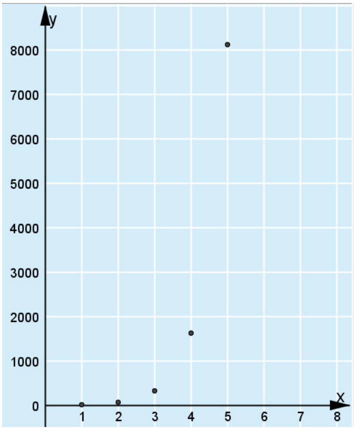
$$\begin{aligned} -18 &= -2n+7 \\ 2n &= 25 \qquad \| :2 \\ n &= 12,5 \end{aligned}$$

Koska n = 12,5 ei ole positiivinen kokonaisluku, luku −18 ei ole lukujonon jäsen.

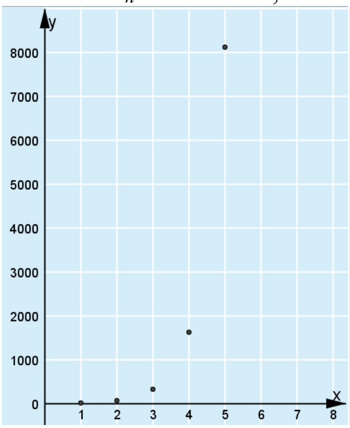
Vastaus: ei ole

151B. **a)** Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 13 \cdot 5^{n-1}$.

Havainnollistetaan lukujonoa koordinaatistossa.



Vastaus: $a_n = 13 \cdot 5^{n-1}$,



b) Muodostetaan yleisen jäsenen lausekkeen avulla yhtälö ja tutkitaan sen avulla, kuinka mones lukujonon jäsen luku 8125 on.

$$\begin{aligned} 8125 &= 13 \cdot 5^{n-1} \quad \| :13 \\ 5^{n-1} &= 625 \\ 5^{n-1} &= 5^4 \end{aligned}$$

Koska yhtälön vasemman ja oikean puolen potenssien kantaluvut ovat samat, on eksponenttienkin oltava samat.

$$\begin{aligned} n-1 &= 4 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Luku 8125 on lukujonon viides jäsen.

Vastaus: viides

152B. a) Geometrisen lukujonon 3, 6, 12, 24, … ensimmmäinen jäsen on $a_1 = 3$ ja suhdeluku $q = \frac{6}{3} = 2,$ joten sen analyyttinen sääntö on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Vastaus: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) Geometrisen lukujonon 3, 6, 12, 24, … ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$ ja a-kohdan perusteella suhdeluku $q = 2$. Lukujonon jäsen saadaan siis kertomalla edellinen jäsen luvulla 2, ja lukujonon rekursiivinen sääntö on $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

Vastaus: $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

c) Määritetään lukujonon 20. jäsen taulukkolaskentaohjelmalla käyttäen b-kohdan sääntöä. Lasketaan ensin soluviittauksen avulla toinen jäsen.

	A
1	3
2	=2*A1

Kopioidaan kaava alemmille riveille.

	A
1	3
2	6
3	12
4	24
5	48
⋮	⋮
18	393216
19	786432
20	1572864

Lukujonon 20. jäsen on $a_{20} = 1\ 572\ 864$.

Vastaus: $a_{20} = 1\ 572\ 864$

153B. **a)** Aritmeettisen lukujonon 4, 12, … erotusluku on $d = 12 - 4 = 8$. Lasketaan lukujonon kolmas jäsen soluviittausta käyttäen.

	A
1	4
2	12
3	=A2+8

Kopioidaan kaava riveille 1–10.

	A
1	4
2	12
3	20
4	28
5	36
6	44
7	52
8	60
9	68
10	76

Määritetään lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

	A
1	4
2	12
3	20
4	28
5	36
6	44
7	52
8	60
9	68
10	76
11	=SUMMA(A1:A10)

	A
1	4
2	12
3	20
4	28
5	36
6	44
7	52
8	60
9	68
10	76
11	400

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on 400.

Vastaus: $S_{10} = 400$

b) Geometrisen lukujonon 4, 12, … suhdeluku on $q=\frac{12}{4}=3$. Lasketaan lukujonon kolmas jäsen soluviittausta käyttäen.

	A
1	4
2	12
3	=A2*3

Kopioidaan kaava riveille 1–10.

	A
1	4
2	12
3	36
4	108
5	324
6	972
7	2916
8	8748
9	26244
10	78732

Määritetään lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

	A
1	4
2	12
3	36
4	108
5	324
6	972
7	2916
8	8748
9	26244
10	78732
11	=SUMMA(A1:A10)

	A
1	4
2	12
3	36
4	108
5	324
6	972
7	2916
8	8748
9	26244
10	78732
11	118096

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on 118 096.

Vastaus: $S_{10} = 118\ 096$

154A. **a)** Aritmeettisen summan kaavan $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ perusteella lausekkeessa $12 \cdot \frac{2+24}{2}$ ensimmäinen yhteenlaskettava on 2, viimeinen yhteenlaskettava 24 ja yhteenlaskettavien määrä on 12. Summan arvo on $12 \cdot \frac{2+24}{2} = 12 \cdot \frac{26}{2} = 12 \cdot 13 = 156.$

Vastaus: 2, 24, 12, 156

b) Geometrisen summan kaavan $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ perusteella lausekkeessa $\frac{5\left(1-2^8\right)}{1-2}$ ensimmäinen yhteenlaskettava on 5, suhdeluku 2 ja yhteenlaskettavien lukumäärä 8. Summan arvo on
$\frac{5\left(1-2^8\right)}{1-2} = \frac{5(1-256)}{-1} = \frac{5(-255)}{-1} = 1275.$

Vastaus: 5, 2, 8, 1275

155A. **a)** Geometrisessa summassa
2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458 + 4374 + 13 122 ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 9$.

Vastaus: $a_1 = 2$, $n = 9$

b) Suhdeluku on $q = \frac{6}{2} = 3$.

Vastaus: $q = 3$

c) Lasketaan summa geometrisen summan kaavalla $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, kun ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2$, suhdeluku $q = 3$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 9$.

$$S_9 = \frac{2(1-3^9)}{1-3} = 19\,682$$

Vastaus: $S = 19\,682$

156A. **a)** Aritmeettisessa summassa $4 + 7 + \ldots + 31$ ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 4$ ja viimeinen $a_n = 31$.

Vastaus: $a_1 = 4$, $a_n = 31$

b) Yhteenlaskettavien lukumäärä on viimeisen yhteenlaskettavan $a_n = 31$ järjestysluku.

Sijoitetaan aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen kaavaan jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 4$, erotusluku $d = 7 - 4 = 3$ ja n:s jäsen $a_n = 31$.

Ratkaistaan yhtälöstä viimeisen yhteenlaskettavan järjestysluku n.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\
31 &= 4 + (n-1)\cdot 3 \\
31 &= 4 + 3n - 3 \\
3n &= 30 \qquad \|: 3 \\
n &= 10
\end{aligned}
$$

Vastaus: 10

c) Lasketaan summa aritmeettisen summan kaavalla $S_n = n\cdot\frac{a_1 + a_n}{2}$, kun yhteenlaskettavien määrä on $n = 10$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 4$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{10} = 31$.

$$S_{10} = 10\cdot\frac{4+31}{2} = 175$$

Vastaus: $S_{10} = 175$

VAHVISTA OSAAMISTA

157A. Aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.

a) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotukset.

$a_2 - a_1 = 9 - 1 = 8$
$a_3 - a_2 = 17 - 9 = 8$

Koska peräkkäisten jäsenten erotukset ovat yhtä suuria, lukujono voi olla aritmeettinen.

Vastaus: voi

b) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotukset.

$a_2 - a_1 = 14 - 9 = 5$
$a_3 - a_2 = 9 - 5 = 4 \neq 5$

Koska peräkkäisten jäsenten erotukset eivät ole yhtä suuria, lukujono ei voi olla aritmeettinen.

Vastaus: ei voi

c) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotukset.

$a_2 - a_1 = 4 - 4 = 0$
$a_3 - a_2 = 4 - 4 = 0$

Koska peräkkäisten jäsenten erotukset ovat yhtä suuret, lukujono voi olla aritmeettinen.

Vastaus: voi

158A. Geometrisessä lukujonossa peräkkäisten jäsenten suhde on vakio.

a) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{-4}{1}=-4$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{16}{-4}=-4$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhteet ovat yhtä suuria, lukujono voi olla geometrinen.

Vastaus: voi

b) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{1}{5}\neq\frac{1}{3}$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhteet eivät ole yhtä suuria, lukujono ei voi olla geometrinen.

Vastaus: ei voi

c) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{3}{2}:3=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhteet ovat yhtä suuria, lukujono voi olla geometrinen.

Vastaus: voi

159A. TAPA 1:

Lukujonon 8, 16, 32, 64, … ensimmäinen jäsen on $a_1 = 8$ ja suhdeluku
$q = \frac{16}{8} = 2$, joten sen yleinen jäsen on
$a_n = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^3 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^1 \cdot 2^{n-1} = 4 \cdot 2^{1+n-1} = 4 \cdot 2^n$.
Lukujono A ja sääntö II kuuluvat siis yhteen.

Lukujonon 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, … ensimmäinen jäsen on $a_1 = 4$ ja suhdeluku
$q = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, joten sen yleinen jäsen on $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
Lukujono B ja sääntö VI kuuluvat siis yhteen.

Lukujonon 2, 4, 8, 16, … ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2$ ja suhdeluku
$q = \frac{4}{2} = 2$, joten sen yleinen jäsen on $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{1+n-1} = 2^n$.
Lukujono C ja sääntö I kuuluvat siis yhteen.

Lukujonon $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ ensimmäinen jäsen on $a_1 = \frac{1}{2}$ ja suhdeluku
$q = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$, joten sen yleinen jäsen on
$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Lukujono D ja sääntö IV kuuluvat siis yhteen.

Lukujonon 4, 8, 16, 32, … ensimmäinen jäsen on $a_1 = 4$ ja suhdeluku
$q = \frac{8}{4} = 2$, joten sen yleinen jäsen on
$a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$.

Lukujono E ja sääntö III kuuluvat siis yhteen.

Lukujonon 2, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, … ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2$ ja suhdeluku $q = \frac{1}{2}$, joten sen yleinen jäsen on

$$a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Lukujono F ja sääntö V kuuluvat siis yhteen.

Vastaus: A: II, B: VI, C: I, D: IV, E: III ja F: V

TAPA 2:

Lasketaan lukujonojen I–VI ensimmäisiä jäseniä sääntöjen avulla ja yhdistetään säännöt jonoihin A–F.

Sääntö I

$a_n = 2^n$
$a_1 = 2^1 = 2$
$a_2 = 2^2 = 4$
$a_3 = 2^3 = 8$
$a_4 = 2^4 = 16$

Joten lukujono C ja sääntö I kuuluvat yhteen.

Sääntö II

$a_n = 4 \cdot 2^n$
$a_1 = 4 \cdot 2^1 = 8$
$a_2 = 4 \cdot 2^2 = 16$
$a_3 = 4 \cdot 2^3 = 32$
$a_4 = 4 \cdot 2^4 = 64$

Joten lukujono A ja sääntö II kuuluvat yhteen.

Sääntö III

$a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$

$a_1 = 4 \cdot 2^{1-1} = 4 \cdot 2^0 = 4$

$a_2 = 4 \cdot 2^{2-1} = 4 \cdot 2^1 = 8$

$a_3 = 4 \cdot 2^{3-1} = 4 \cdot 2^2 = 16$

$a_4 = 4 \cdot 2^{4-1} = 4 \cdot 2^3 = 32$

Joten lukujono E ja sääntö III kuuluvat yhteen.

Sääntö IV

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

Joten lukujono D ja sääntö IV kuuluvat yhteen.

Sääntö V

$a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$a_2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$

$a_3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$a_4 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

Joten lukujono F ja sääntö V kuuluvat yhteen.

Sääntö VI

$$a_n = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_1 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 4$$

$$a_2 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 2$$

$$a_3 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = 1$$

$$a_4 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{2}$$

Joten lukujono B ja sääntö VI kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: VI, C: I, D: IV, E: III ja F: V

160A. **a)** Sievennetään lukujonon lauseke
$a_n = 8 + (n - 1) \cdot 5 = 8 + 5n - 5 = 3 + 5n$.

Huomataan, että lukujonon jäsenen arvo kasvaa aina 5:llä, kun järjestysluku kasvaa 1:llä. Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 8 + (1 - 1) \cdot 5 = 8$, joten lukujonon rekursiivinen sääntö on $a_1 = 8$, $a_n = a_{n-1} + 5$.

Vastaus: $a_1 = 8$, $a_n = a_{n-1} + 5$

b) Huomataan, että lukujonon $a_n = 9 \cdot 7^{n-1}$ jäsenen arvo tulee aina 7-kertaiseksi, kun järjestysluku kasvaa 1:llä. Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 9 \cdot 7^{1-1} = 9 \cdot 1 = 9$, joten lukujonon rekursiivinen sääntö on siis $a_1 = 9$, $a_n = 7a_{n-1}$.

Vastaus: $a_1 = 9$, $a_n = 7a_{n-1}$

161A. **a)** Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, joten neljäs jäsen on $a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot d = a_1 + 3 \cdot (-4) = a_1 - 12$.

Toisaalta tehtävänannon tietojen mukaan neljäs jäsen on $a_4 = 13$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä ensimmäinen jäsen a_1.

$$\begin{aligned} a_1 - 12 &= 13 \\ a_1 &= 25 \end{aligned}$$

Lukujonon ensimmäinen jäsen on siis $a_1 = 25$.

Koska ensimmäinen jäsen on $a_1 = 25$ ja erotusluku $d = -4$, yleinen jäsen on $a_n = 25 + (n - 1) \cdot (-4) = 25 - 4n + 4 = -4n + 29$.

Vastaus: $a_1 = 25$, $a_n = -4n + 29$

b) Lasketaan lukujonon 80. jäsen sijoittamalla yleisen jäsenen lausekkeeseen järjestysluku $n = 80$.

$a_{80} = -4 \cdot 80 + 29 = -291$

Vastaus: $a_{80} = -291$

c) Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan sen avulla, kuinka mones lukujonon jäsen luku -163 on.

$$\begin{aligned} -4n + 29 &= -163 \\ -4n &= -192 \qquad \| :(-4) \\ n &= 48 \end{aligned}$$

Luku -163 on lukujonon 48. jäsen.

Vastaus: 48. jäsen

162B. TAPA 1:

Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ja sen peräkkäisten jäsenten suhde on $q = 4$, joten sen kolmas jäsen on
$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = a_1 \cdot q^2 = a_1 \cdot 4^2 = 16a_1$.
Toisaalta tehtävänannon mukaan kolmas jäsen on $a_3 = 96$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä lukujonon ensimmäinen jäsen a_1.

$$\begin{aligned} 16a_1 &= 96 \quad \| :16 \\ a_1 &= 6 \end{aligned}$$

Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 6$ ja sen peräkkäisten jäsenten suhde on $q = 4$, joten sen yleinen jäsen on $a_n = 6 \cdot 4^{n-1}$.
Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan sen avulla, onko luku 98 304 lukujonon jäsen.

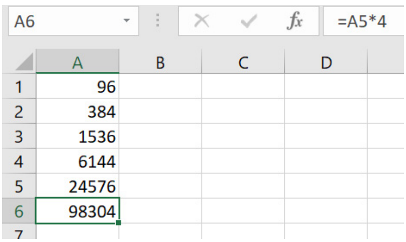
$$\begin{aligned} 6 \cdot 4^{n-1} &= 98\,304 \quad \| :6 \\ 4^{n-1} &= 16\,384 \\ n-1 &= \log_4 16\,384 \\ n-1 &= 7 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

Luku 98 304 on lukujonon 8. jäsen.

Vastaus: on

TAPA 2:

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon jäseniä kolmannesta jäsenestä 96 eteenpäin kertomalla edellinen jäsen luvulla 4. Huomataan, että luku 98 304 lukujonon jäsen.


A6 =A5*4

	A	B	C	D
1	96			
2	384			
3	1536			
4	6144			
5	24576			
6	98304			

Vastaus: on

163A. a) Kun aritmeettisen lukujonon viidenteen termiin $a_5 = -9$ lisätään erotusluku $13 - 5 = 8$ kertaa, saadaan 13. termi $a_{13} = -41$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä erotusluku d.

$$\begin{aligned} -9 + 8d &= -41 \\ 8d &= -32 \qquad \| :8 \\ d &= -4 \end{aligned}$$

Lukujonon erotusluku on $d = -4$.

Kun erotusluku $d = -4$ lisätään ensimmäiseen termiin a_1 neljä kertaa, saadaan 5. termi $a_5 = -9$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä ensimmäinen termi a_1.

$$\begin{aligned} a_1 + 4 \cdot (-4) &= -9 \\ a_1 - 16 &= -9 \\ a_1 &= 7 \end{aligned}$$

Lukujonon ensimmäinen termi on $a_1 = 7$.

Vastaus: $d = -4$, $a_1 = 7$

b) Kun geometrisen lukujonon neljäs jäsen $a_4 = 48$ kerrotaan neljästi suhdeluvulla q, saadaan kahdeksas jäsen $a_8 = 768$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suhdeluku q.

$$\begin{aligned} 48q^4 &= 768 \quad \| : 48 \\ q^4 &= 16 \\ q &= \pm\sqrt[4]{16} \\ q &= \pm 2 \end{aligned}$$

Suhdeluku on $q = 2$ tai $q = -2$.

Kun lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 kerrotaan suhdeluvulla $q = \pm 2$ kolmesti, saadaan neljäs jäsen $a_4 = 48$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä ensimmäinen jäsen a_1. Tutkitaan ensin tapaus $q = 2$.

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 2^3 &= 48 \\ 8a_1 &= 48 \quad \| : 8 \\ a_1 &= 6 \end{aligned}$$

Jos $q = 2$, niin ensimmäinen jäsen on $a_1 = 6$. Tällöin yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 6 \cdot 2^{n-1}$.

Tutkitaan sitten tapaus $q = -2$.

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (-2)^3 &= 48 \\ -8a_1 &= 48 \quad \| : (-8) \\ a_1 &= -6 \end{aligned}$$

Jos $q = -2$, niin ensimmäinen jäsen on $a_1 = -6$. Tällöin yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -6 \cdot (-2)^{n-1}$.

Vastaus: $q = 2$ ja $a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$ tai $q = -2$ ja $a_n = -6 \cdot (-2)^{n-1}$.

164A. **a)** Lasketaan yrityksen liikevaihto syyskuussa, joka on vuoden 9. kuukausi.

$L(9) = 25\,000 + 4000 \cdot 9 = 61\,000$

Liikevaihto oli 61 000 €.

Vastaus: 61 000 euroa

b) Liikevaihdon lausekkeessa kuukauden järjestysluku kerrotaan luvulla 4000, joten liikevaihto kasvoi kuukaudessa 4000 €.

Vastaus: 4000 euroa

c) Tutkitaan yhtälön avulla, missä kuussa liikevaihto ylitti 50 000 €.

$$\begin{aligned} 25\,000 + 4000n &= 50\,000 \\ 4000n &= 25\,000 \qquad \| :4000 \\ n &= 6{,}25 \end{aligned}$$

Kuudentena kuukautena eli kesäkuussa liikevaihto oli vielä alle 50 000 €. Liikevaihto ylitti 50 000 € seitsemäntenä kuukautena eli heinäkuussa.

Vastaus: heinäkuussa

165A. **a)** Lasketaan summa geometrisen summan kaavalla, kun ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1$, suhdeluku $q = 4$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 15$.

$$S_{15} = \frac{1\left(1-4^{15}\right)}{1-4} = 357\,913\,941$$

Vastaus: $S_{15} = 357\ 913\ 941$

b) Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 4 \cdot (-3)^1 = -12$ ja toinen jäsen $a_2 = 4 \cdot (-3)^2 = 36$, joten suhdeluku on $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{36}{-12} = -3$.

Lasketaan summa geometrisen summan kaavalla, kun ensimmäinen jäsen on $a_1 = -12$, suhdeluku $q = -3$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 15$.

$$S_{15} = \frac{-12\left[1-(-3)^{15}\right]}{1-(-3)} = -43\,046\,724$$

Vastaus: $S_{15} = -43\ 046\ 724$

c) Kun geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 kerrotaan suhdeluvulla $q = 3$, saadaan toinen jäsen $a_2 = 27$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä ensimmäinen jäsen a_1.

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 3 &= 27 \qquad \| :3 \\ a_1 &= 9 \end{aligned}$$

Lasketaan summa geometrisen summan kaavalla, kun ensimmäinen jäsen on $a_1 = 9$, suhdeluku $q = 3$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 15$.

$$S_{15} = \frac{9(1-3^{15})}{1-3} = 64\,570\,077$$

Vastaus: $S_{15} = 64\ 570\ 077$

d) Kun geometrisen lukujonon neljäs jäsen $a_4 = 24$ kerrotaan suhdeluvulla q kolmesti, saadaan seitsemäs jäsen $a_7 = 192$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suhdeluku q.

$$\begin{aligned} 24q^3 &= 192 \qquad \| :24 \\ q^3 &= 8 \\ q &= \sqrt[3]{8} \\ q &= 2 \end{aligned}$$

Suhdeluku on siis $q = 2$.

Kun lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 kerrotaan kolmesti suhdeluvulla $q = 2$, saadaan neljäs jäsen $a_4 = 24$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä ensimmäinen jäsen a_1.

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 2^3 &= 24 \\ 8a_1 &= 24 \qquad \| :8 \\ a_1 &= 3 \end{aligned}$$

Ensimmäinen jäsen on siis $a_1 = 3$.

Lasketaan summa geometrisen summan kaavalla, kun ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$, suhdeluku $q = 2$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 15$.

$$S_{15} = \frac{3(1-2^{15})}{1-2} = 98\,301$$

Vastaus: $S_{15} = 98\ 301$

166A. **a)** Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 5$ ja erotusluku $d = 6$, joten 30. jäsen on $a_{30} = 5 + (30 - 1) \cdot 6 = 179$.

Lasketaan 30 ensimmäisen jäsenen summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 30$, ensimmäinen jäsen $a_1 = 5$ ja 30. jäsen $a_{30} = 179$.

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{5+179}{2} = 2760$$

Vastaus: $S_{30} = 2760$

b) Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3200$ ja erotusluku on $d = 3100 - 3200 = -100$, joten 30. jäsen on $a_{30} = 3200 + (30 - 1) \cdot (-100) = 300$.

Lasketaan 30 ensimmäisen jäsenen summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 30$, ensimmäinen jäsen $a_1 = 3200$ ja 30. jäsen $a_{30} = 300$.

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{3200+300}{2} = 52\,500$$

Vastaus: $S_{30} = 52\,500$

c) Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = -2$ ja erotusluku on $d = 3$. Lukujonon 30. jäsen on $a_{30} = -2 + (30 - 1) \cdot 3 = 85$.

Lasketaan 30 ensimmäisen jäsenen summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 30$, ensimmäinen jäsen $a_1 = -2$ ja 30. jäsen $a_{30} = 85$.

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{-2+85}{2} = 1245$$

Vastaus: $S_{30} = 1245$

167A. **a)** Aritmeettisen jonon erotusluku on $d = a_2 - a_1 = 7 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$. Lukujonon yleinen jäsen on siis $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = \frac{3}{2} + (n-1) \cdot \frac{11}{2}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä, kuinka monta jäsentä lukujonossa on.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + (n-1) \cdot \frac{11}{2} &= 117 && \| \cdot 2 \\ 3 + 11(n-1) &= 234 \\ 3 + 11n - 11 &= 234 \\ 11n - 8 &= 234 \\ 11n &= 242 && \| :11 \\ n &= 22 \end{aligned}$$

Yhteenlaskettavien määrä on siis $n = 22$.

Lasketaan summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien määrä $n = 22$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = \frac{3}{2}$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{22} = 117$.

$$S_{22} = 22 \cdot \frac{\frac{3}{2} + 117}{2} = \frac{2607}{2}$$

Kysytty summa on $\frac{2607}{2}$.

Vastaus: $S = \frac{2607}{2}$

b) Sijoitetaan aritmeettisen summan kaavaan $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ termien summa $S_n = 961$, jonon ensimmäinen termi $a_1 = 1$ ja n:s termi $a_n = 61$. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä yhteenlaskettavien määrä n.

$$\begin{aligned} 961 &= n \cdot \frac{1+61}{2} \\ 961 &= n \cdot \frac{62}{2} \\ 31n &= 961 \qquad \| :31 \\ n &= 31 \end{aligned}$$

Luku 61 on siis jonon 31. termi.

Sijoitetaan aritmeettisen jonon yleisen termin kaavaan $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ termin järjestysluku $n = 31$, ensimmäinen termi $a_1 = 1$ ja 31. termi $a_{31} = 61$. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä erotusluku d.

$$\begin{aligned} 61 &= 1 + (31 - 1)d \\ 61 &= 1 + 30d \\ 30d &= 60 \qquad \| :30 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

Jonon yleinen termi on siis $a_2 = a_1 + d = 1 + 2 = 3$, joten jonon toinen termi on $a_2 = 3$.

Vastaus: $a_2 = 3$

168B. Koska ponnahduksen korkeus on 0,8-kertainen edelliseen ponnahdukseen verrattuna, ponnahdusten korkeudet muodostavat geometrisen lukujonon, jonka suhdeluku on $q = 0{,}8$.

Kun pallo osuu kymmenennen kerran lattiaan, se on pudonnut alaspäin 10 kertaa ja pompannut lattiasta 9 kertaa.

Pallo kulkee alaspäin pudotessaan metreinä yhteensä matkan
$1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots\ 0{,}8^9$.

Lasketaan summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$, yhteenlaskettavien määrä $n = 10$ ja suhdeluku $q = 0{,}8$.

$$S_{10} = \frac{1\left(1-0{,}8^{10}\right)}{1-0{,}8} = 4{,}463...$$

Pallo kulkee ylöspäin noustessaan metreinä yhteensä matkan
$0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots\ 0{,}8^9$.

Lasketaan summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 0{,}8$, yhteenlaskettavien määrä $n = 9$ ja suhdeluku $q = 0{,}8$.

$$S_0 = \frac{0{,}8\left(1-0{,}8^{9}\right)}{1-0{,}8} = 3{,}463...$$

Pallo kulkee yhteensä 4,463… m + 3,463… m = 7,926… m ≈ 8 m.

Vastaus: 8 metriä

169A. Lukujen 1000 ja 2000 välissä olevien 13:lla jaolliset luvut muodostavat aritmeettisen lukujonon, koska peräkkäisten jäsenten erotus on luku 13. Pienin luvulla 13 jaollinen, lukujen 1000 ja 2000 välissä oleva luku on $1001 = 77 \cdot 13$ ja suurin $1989 = 153 \cdot 13$. Yhteenlaskettavien lukumäärä on viimeisen yhteenlaskettavan $a_n = 1989$ järjestysluku.

Sijoitetaan aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen kaavaan jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1001$, erotusluku $d = 13$ ja n:s jäsen $a_n = 1989$. Ratkaistaan yhtälöstä viimeisen yhteenlaskettavan järjestysluku n.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\
1989 &= 1001 + (n-1) \cdot 13 \\
1989 &= 1001 + 13n - 13 \\
13n &= 1001 && \| : 13 \\
n &= 77
\end{aligned}
$$

Lasketaan summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien määrä $n = 77$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1001$ ja viimeinen $a_{77} = 1989$.

$$S_{77} = 77 \cdot \frac{1001 + 1989}{2} = 115115$$

Kysytty summa on 115 115.

Vastaus: 115 115

170B. Rahaa siirtyy tilille euroina $100 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 3^2 + \ldots$

Joka vaiheessa tilille siirtyvien rahojen määrä kolminkertaistuu, joten siirretyt rahamäärät muodostavat geometrisen lukujonon, jonka suhdeluku on $q = 3$.

TAPA 1:
Muodostetaan n:ssä ensimmäisessä vaiheessa siirrettyjen rahamäärien summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 100$ ja suhdeluku $q = 3$.

$$S_n = \frac{100\left(1-3^n\right)}{1-3} = \frac{100\left(1-3^n\right)}{-2} = -50\left(1-3^n\right).$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan sen avulla, kuinka monen vaiheen jälkeen tilillä oleva rahasumma ylittää 54 100 000 000 euroa.

$$\begin{aligned} -50\left(1-3^n\right) &= 54\,100\,000\,000 && \| : (-50) \\ 1-3^n &= -1\,082\,000\,000 \\ -3^n &= -1\,082\,000\,001 && \| \cdot (-1) \\ 3^n &= 1\,082\,000\,001 \\ n &= \log_3 1\,082\,000\,001 \\ n &= 18{,}934\ldots \end{aligned}$$

Tilillä oleva rahasumma ylittää 54 100 000 000 euroa 19. vaiheen jälkeen.

Vastaus: 19 vaiheen jälkeen

TAPA 2:

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla tilille siirtyvän rahan määrä jokaisessa vaiheessa kertomalla edellinen luku aina 3:lla. Lasketaan viereiseen sarakkeeseen tilille kertyvän rahan määrä.

Havaitaan, että tilillä oleva rahasumma ylittää 54 100 000 000 euroa 19. vaiheen jälkeen.

B20 =B19+A20

	A	B	C
1	100	100	
2	300	400	
3	900	1300	
4	2700	4000	
5	8100	12100	
6	24300	36400	
7	72900	109300	
8	218700	328000	
9	656100	984100	
10	1968300	2952400	
11	5904900	8857300	
12	17714700	26572000	
13	53144100	79716100	
14	159432300	239148400	
15	478296900	717445300	
16	1434890700	2152336000	
17	4304672100	6457008100	
18	12914016300	19371024400	
19	38742048900	58113073300	
20	1,16226E+11	1,74339E+11	
21			

Vastaus: 19 vaiheen jälkeen

171B. a) TAPA 1:

Lukujonon erotusluku on $d = a_2 - a_1 = \frac{12}{5} - 2 = 2\frac{2}{5} - 2 = \frac{2}{5}$, joten

lukujonon yleinen termi on $a_n = 2 + (n-1) \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{5} + \frac{2}{5}n - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}n + \frac{8}{5}$.

Tällöin jonon sadas termi on $a_{100} = \frac{2}{5} \cdot 100 + \frac{8}{5} = 40 + 1\frac{3}{5} = 41\frac{3}{5} = \frac{208}{5}$.

Lasketaan sadan ensimmäisen termin summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien määrä $n = 100$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 2$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{100} = \frac{208}{5}$.

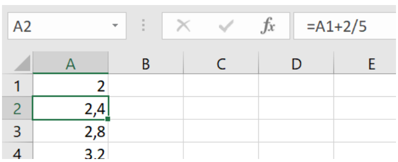
$$S_{100} = 100 \cdot \frac{2 + \frac{208}{5}}{2} = 2180$$

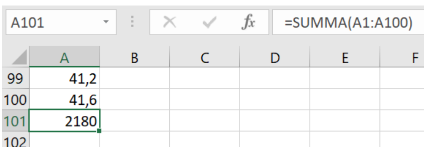
Jonon sadan ensimmäisen termin summa on 2180.

Vastaus: $S_{100} = 2180$

TAPA 2:
Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon 100 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

Havaitaan, että summa on 2180.





Vastaus: $S_{100} = 2180$

b) TAPA 1:

Lukujonon suhdeluku on $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{5} : 2 = \frac{6}{5}$.

Lasketaan sadan ensimmäisen termin summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 2$, suhdeluku $q = \frac{6}{5}$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 100$.

$$S_{100} = \frac{2\left[1-\left(\frac{6}{5}\right)^{100}\right]}{1-\frac{6}{5}} = 828\,179\,735{,}220...$$

Jonon sadan ensimmäisen termin summa on
828 179 735,220… ≈ 828 000 000.

Vastaus: $S_{100} = 828\ 000\ 000$

TAPA 2:

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon 100 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

Havaitaan, että summa on 828 179 735,2… ≈ 828 000 000.

A2 =A1*6/5

	A	B	C
1	2		
2	2,4		
3	2,88		

A101 =SUMMA(A1:A100)

	A	B	C	D
97	79878447,65			
98	95854137,18			
99	115024964,6			
100	138029957,5			
101	828179735,2			

Vastaus: $S_{100} = 828\ 000\ 000$

172A. a) Muodostetaan lukujonon (a_n) analyyttinen sääntö, kun $a_1 = 4$ ja $a_{n+1} = a_n - 2{,}5$. Vähentämällä lukujonon jäsenestä 2,5 saadaan lukujonon seuraava jäsen, joten lukujono on aritmeettinen ja sen erotusluku on $d = -2{,}5$.

Koska lisäksi lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 4$, niin lukujonon analyyttinen sääntö on

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 4 + (n-1)\cdot(-2{,}5) \\ &= 4 - 2{,}5n + 2{,}5 \\ &= -2{,}5n + 6{,}5. \end{aligned}$$

Vastaus: $a_n = -2{,}5n + 6{,}5$

b) Muodostetaan lukujonon (a_n) analyyttinen sääntö, kun $a_2 = 10$ ja $a_{n+1} = 2a_n$.
Kertomalla lukujonon jäsen luvulla 2 saadaan lukujonon seuraava jäsen, joten lukujono on geometrinen ja sen suhdeluku on $q = 2$.
$10 = a_2 = a_{1+1} = 2a_1$, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä lukujonon ensimmäinen jäsen a_1.

$$\begin{aligned} 2a_1 &= 10 \qquad \| :2 \\ a_1 &= 5 \end{aligned}$$

Koska lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 5$, niin lukujonon analyyttinen sääntö on
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}$.

Vastaus: $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

c) Muodostetaan lukujonon (a_n) analyyttinen sääntö, kun $a_1 = -2$ ja $a_{n+1} = a_n$.
Koska lukujonon jäsen on yhtä suuri kuin seuraava jäsen, lukujono on vakiojono −2, −2, −2, …
Lukujonon analyyttinen sääntö on siis $a_n = -2$.

Vastaus: $a_n = -2$

173B. Koska lukujonon seuraava termi on 5 % edellistä termiä suurempi, lukujono on geometrinen ja sen suhdeluku on $q = 1{,}05$. Koska lisäksi ensimmäinen termi on 2, n:s termi on $a_n = a_1q^{n-1} = 2 \cdot 1{,}05^{n-1}$.

TAPA 1:

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan sen avulla, kuinka moni jonon termi on pienempi kuin 1000 miljoonaa.

$$\begin{aligned} 2\cdot 1{,}05^{n-1} &= 1\,000\,000\,000 \quad \| :2 \\ 1{,}05^{n-1} &= 500\,000\,000 \\ n-1 &= \log_{1{,}05} 500\,000\,000 \\ n-1 &= 410{,}535... \\ n &= 411{,}535... \end{aligned}$$

Jonon 411 ensimmäistä termiä ovat pienempiä kuin 1000 miljoonaa. Lasketaan näiden termien summa geometrisen summan kaavalla sijoittamalla siihen ensimmäinen termi $a_1 = 2$, suhdeluku $q = 1{,}05$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 411$.

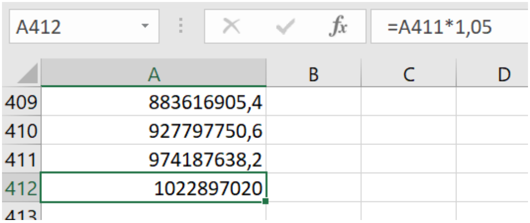
$$S_{411} = \frac{2\left(1-1{,}05^{411}\right)}{1-1{,}05} = 20\,457\,940\,361{,}2... \approx 20\,500\,000\,000$$

Kysytty summa on kolmen numeron tarkkuudella 20 500 000 000.

Vastaus: 411 termiä, $S_{411} = 20\,500\,000\,000$

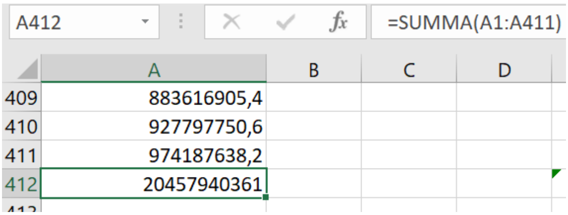
TAPA 2:
Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon termejä kertomalla aina edellinen termi luvulla 1,05, kunnes löydetään termi, joka ylittää luvun 1000 miljoonaa.

Havaitaan, että ensimmäinen termi, joka ylittää luvun 1000 miljoonaa, on 412.termi. Siis 411 termiä ovat pienempiä kuin 1000 miljoonaa.



Lasketaan näiden summa.

Havaitaan, että summa on 20 457 940 361,2… ≈ 20 500 000 000.



Kysytty summa on kolmen numeron tarkkuudella 20 500 000 000.

Vastaus: 411 termiä, 20 500 000 000

174B. Tutkitaan puun määrän kehitystä taulukkolaskentaohjelmalla.

Lasketaan ensin soluviittauksen avulla puun määrä vuoden kuluttua. Puun määrä alkuperäiseen verrattuna on 100 % + 17 % = 117 %. Kasvun jälkeen puun määrä vähenee 16 m^3.

A11 =A10*1,17-16

	A	B	C
1	100		
2	101		
3	102,17		
4	103,5389		
5	105,140513		
6	107,0144002		
7	109,2068482		
8	111,7720124		
9	114,7732546		
10	118,2847078		
11	122,3931082		
12			

Kymmenen vuoden kuluttua puuta on 122,393… ≈ 122.

Vastaus: 122 m^3

175B. **a)** Alkuperäisen janan pituus $l_1 = 1$. Seuraavassa kuviossa janan keskimmäinen kolmannes korvataan kahdella janalla, joista kummankin pituus on kolmasosa alkuperäisen janan pituudesta.

Tällöin käyrän kokonaispituus kasvaa yhdellä kolmasosalla ja on $\frac{4}{3}$ alkuperäisestä. Toisessa kuviossa käyrän pituus on $l_2 = \frac{4}{3}$.

Kolmannessa kuviossa jokaisen janan keskimmäinen kolmannes korvataan kahdella janalla, joista kummankin pituus on kolmasosa edellisen kuvionjanan pituudesta. Kolmannen kuvionkokonaispituus on $\frac{4}{3}$-kertainen edelliseen kuvioon verrattuna.

Näin jatkamalla käyrien pituudet muodostavat geometrisen lukujonon $l_n = 1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, missä n on kuvion järjestysnumero.

Vastaus: $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

b) Kirjoitetaan soluun A1 luku 1. Soluun A2 kirjoitetaan ”=4/3·A1” ja kopioidaan solua A2 alaspäin.

	A
1	1
2	1.33
3	1.78
4	2.37
5	3.16
6	4.21
7	5.62
8	7.49
9	9.99
10	13.32
11	17.76
12	23.68
13	31.57
14	42.09
15	56.12
16	74.83
17	99.77
18	133.03

Pituus on yli 100-kertainen alkuperäiseen nähden 18. kuviossa.

Vastaus: 18. kuviossa

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

176A. a) Summamerkintä $\sum_{n=0}^{22}(3+4n)$ tarkoittaa summaa, jossa lasketaan yhteen lukujonon $a_n = 3 + 4n$ jäseniä.

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_0 = 3 + 4 \cdot 0 = 3$.
Toinen yhteenlaskettava on $a_1 = 3 + 4 \cdot 1 = 7$.
Kolmas yhteenlaskettava on $a_2 = 3 + 4 \cdot 2 = 11$.
…
Viimeinen yhteenlaskettava $a_{22} = 3 + 4 \cdot 22 = 91$.

Huomataan, että seuraava yhteenlaskettava saadaan, kun edelliseen lisätään luku 4, joten kyseessä on aritmeettinen summa.
Koska summan laskeminen alkaa indeksistä $n = 0$ ja päättyy indeksiin 22, yhteenlaskettavien lukumäärä on $22 + 1 = 23$.

Lasketaan summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien määrä $n = 23$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_0 = 3$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{22} = 91$.

$$S_{23} = 23 \cdot \frac{3+91}{2} = 1081$$

Kysytty summa on 1081.

Vastaus: 1081

b) Summassa $\sum_{n=2}^{15}(-3)^n$ lasketaan yhteen lukujonon $a_n = (-3)^n$ jäseniä.
Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_2 = (-3)^2 = 9$.
Toinen yhteenlaskettava on $a_3 = (-3)^3 = -27$.
Kolmas yhteenlaskettava on $a_4 = (-3)^4 = 81$.
…
Viimeinen yhteenlaskettava $a_{15} = (-3)^{15} = -14348907$.

Huomataan, että seuraava yhteenlaskettava saadaan, kun edellinen kerrotaan luvulla –3, joten kyseessä on geometrinen summa ja suhdeluku on $q = -3$.

Koska summan laskeminen alkaa indeksistä $n = 2$ ja päättyy indeksiin 15, yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 15 - 1 = 14$.

Lasketaan summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_2 = 9$, suhdeluku $q = -3$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 14$.

$$S_{14} = \frac{9\left[1-(-3)^{14}\right]}{1-(-3)} = -10\,761\,678$$

Kysytty summa on –10 761 678.

Vastaus: –10 761 678

177B. **a)** Laskemalla taulukossa auton arvo edelliseen vuoden arvoon verrattuna huomataan, että auton arvo näyttää alenevan 20 % vuodessa.

C3 =B3/B2

	A	B	C
1	aika	arvo	
2	0	40000	
3	1	32000	0,8
4	2	25600	0,8
5	3	20480	0,8
6	4	16384	0,8
7	5	13107,2	0,8
8	6	10485,8	0,800003052
9	7	8388,61	0,799997139
10			

Vastaus: Auton arvo näyttää alenevan 20 % vuodessa.

b) Koska auton arvo alenee joka vuosi 20 %:lla, on auton arvo 100 % − 20 % = 80 % edellisen vuoden arvosta eli 0,80-kertainen edellisen vuoden arvoon nähden. Auton arvon vuonna n noudattaa siis geometrista lukujonoa. Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_0 = 40\ 000$ ja suhdeluku on $q = 0{,}8$. Auton arvon vuonna n on
$a_n = 40\ 000 \cdot 0{,}8^{n-1}$.

Vastaus: $a_n = 40\ 000 \cdot 0{,}8^{n-1}$

c) TAPA 1

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan sen avulla, kuinka monen vuoden jälkeen auton ostamisesta sen arvo on kaavan mukaan laskenut alle 2000 euron.

$$\begin{aligned} 40\,000 \cdot 0{,}8^{n-1} &= 2000 \qquad \| \cdot 40\,000 \\ 0{,}8^{n-1} &= 0{,}05 \\ n-1 &= \log_{0,8} 0{,}05 \\ n &= 13{,}425\ldots \end{aligned}$$

Auton arvo on kaavan mukaan laskenut alle 2000 euron 14 vuoden jälkeen auton ostamisesta.

Vastaus: 14 vuoden jälkeen

TAPA 2:

Käyttämällä b-kohdan kaavaa ja taulukkolaskenta ohjelmaa havaitaan, että auton arvo on kaavan mukaan laskenut alle 2000 euron 14 vuoden jälkeen auton ostamisesta.

A15 =A14*0,8

	A	B	C
1	40000		
2	32000		
3	25600		
4	20480		
5	16384		
6	13107,2		
7	10485,76		
8	8388,608		
9	6710,8864		
10	5368,70912		
11	4294,967296		
12	3435,973837		
13	2748,779069		
14	2199,023256		
15	1759,218604		
16			

Vastaus: 14 vuoden jälkeen

178A. Geometrisen lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde on vakio.

a) Lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat 3, x ja 12. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\frac{x}{3} = \frac{12}{x}$$
$$x^2 = 3 \cdot 12$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm\sqrt{36}$$
$$x = \pm 6$$

Kun $x = 6$, niin jonon suhdeluku on $q = \frac{6}{3} = 2$.

Kun $x = -6$, niin jonon suhdeluku on $q = \frac{-6}{3} = -2$.

Vastaus: $x = 6$ ja $q = 2$, tai $x = -6$ ja $q = -2$

b) Lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat 4, $x + 2$ ja 36. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\frac{x+2}{4} = \frac{36}{x+2}$$
$$(x+2)(x+2) = 4 \cdot 36$$
$$x^2 + 2x + 2x + 4 = 144$$
$$x^2 + 4x - 140 = 0$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-140)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 560}}{2}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{576}}{2}$$
$$x = \frac{-4 \pm 24}{2}$$
$$x = \frac{-4 + 24}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4 - 24}{2}$$
$$x = 10 \qquad\qquad x = -14$$

Kun $x = 10$, lukujonon toinen jäsen on $x + 2 = 10 + 2 = 12$, joten $q = \frac{12}{4} = 3$.

Kun $x = -14$, lukujonon toinen jäsen on $x + 2 = -14 + 2 = -12$, joten $q = \frac{-12}{4} = -3$.

Vastaus: $x = 10$ ja $q = 3$, tai $x = -14$ ja $q = -3$

c) Lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat 8, x ja $x-2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\frac{x}{8}=\frac{x-2}{x}$$
$$x^2=8(x-2)$$
$$x^2=8x-16$$
$$x^2-8x+16=0$$
$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 16}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{8\pm\sqrt{0}}{2}$$
$$x=\frac{8\pm 0}{2}$$
$$x=4$$

Koska $x=4$, niin $q=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Vastaus: $x=4$ ja $q=\frac{1}{2}$

179B. **a)** Kun aritmeettisen lukujonon ensimmäiseen termiin $a_1 = 4$ lisätään erotusluku d neljästi, saadaan viides termi $a_5 = 1$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä erotusluku d.

$$
\begin{aligned}
4 + 4d &= 1 \\
4d &= -3 \qquad \| :4 \\
d &= -\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Lukujonon yleinen termi on

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)d \\
&= 4 + (n-1)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) \\
&= 4 - \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} \\
&= -\frac{3}{4}n + \frac{19}{4}.
\end{aligned}
$$

Lasketaan lukujonon toinen, kolmas, neljäs ja kymmenes termi ohjelman avulla.

$$a_2 = \frac{13}{4}$$

$$a_3 = \frac{5}{2}$$

$$a_4 = \frac{7}{4}$$

$$a_{10} = -\frac{11}{4}$$

Vastaus: $a_2 = \frac{13}{4}$, $a_3 = \frac{5}{2}$, $a_4 = \frac{7}{4}$ ja $a_{10} = -\frac{11}{4}$

b) Kun geometrisen lukujonon ensimmäinen termi $a_1 = 4$ kerrotaan suhdeluvulla q neljästi, saadaan viides termi $a_5 = 1$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suhdeluku q ohjelman avulla.

1	Ratkaise(4*q^4=1,q)
	$\rightarrow \left\{ q = -\frac{\sqrt{2}}{2}, q = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

Suhdeluku on siis $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ tai $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Jos $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ niin lukujonon yleinen termi on

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}.$$

Lasketaan ohjelman avulla lukujonon toinen, kolmas, neljäs ja kymmenes termi tässä tapauksessa.

$$a_2 = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2-1} = -2\sqrt{2}$$

$$a_3 = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3-1} = 2$$

$$a_4 = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4-1} = -\sqrt{2}$$

$$a_{10} = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10-1} = -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{8}$$

Jos $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, niin lukujonon yleinen termi on

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}.$$

Lasketaan lukujonon toinen, kolmas, neljäs ja kymmenes termi tässä tapauksessa.

$$a_2 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2-1} = 2\sqrt{2}$$

$$a_3 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3-1} = 2$$

$$a_4 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4-1} = \sqrt{2}$$

$$a_{10} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10-1} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{8}$$

Vastaus: $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = -2\sqrt{2}$, $a_3 = 2$, $a_4 = -\sqrt{2}$, $a_{10} = -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{8}$

tai $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = 2\sqrt{2}$, $a_3 = 2$, $a_4 = \sqrt{2}$, $a_{10} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{8}$

180A. a) Lukujonon jäsen, jonka järjestysluku on $n - 1$, on
$a_{n-1} = k(n-1) + b = kn - k + b$.

Vastaus: $a_{n-1} = kn - k + b$

b) Lasketaan lukujonon (a_n) peräkkäisten jäsenten erotus.
$a_n - a_{n-1} = (kn + b) - (kn - k + b) = kn + b - kn + k - b = k$

Koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, lukujono (a_n) on aritmeettinen.

Vastaus: –

181B. **a)** Geometrisen lukujonon suhdeluku on $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2x}{x}=2.$ Lasketaan lukujonon kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = x$, suhdeluku $q = 2$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 20$.

$$S_{20}=\frac{x\left(1-2^{20}\right)}{1-2}=1\,048\,575x$$

Vastaus: $S_{20} = 1\ 048\ 575x$

b) Geometrisen lukujonon suhdeluku on $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{x}{1}=x.$ Lasketaan lukujonon kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$, suhdeluku $q = x$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 20$.

$$S_{20}=\frac{1\left(1-x^{20}\right)}{1-x}=\frac{1-x^{20}}{1-x}$$

Vastaus: $S_{20}=\frac{1-x^{20}}{1-x}$

182A. a) Lasketaan ensin lukujonojen (a_n) ja (b_n) toinen ja kolmas jäsen.

$a_2 = 5a_1 = 5 \cdot 4 = 20$
$a_3 = 5a_2 = 5 \cdot 20 = 100$
$b_2 = 2b_1 = 2 \cdot 3 = 6$
$b_3 = 2b_2 = 2 \cdot 6 = 12$

Lasketaan lukujonon (c_n) kolme ensimmäistä jäsentä.

$c_1 = a_1b_1 = 4 \cdot 3 = 12$
$c_2 = a_2b_2 = 20 \cdot 6 = 120$
$c_3 = a_3b_3 = 100 \cdot 12 = 1200$

Vastaus: $c_1 = 12$, $c_2 = 120$ ja $c_3 = 1200$

b) Kertomalla lukujonon (a_n) jäsen luvulla 5 saadaan lukujonon (a_n) seuraava jäsen, joten lukujono (a_n) on geometrinen ja sen suhdeluku $q = 5$. Lukujonon (a_n) analyyttinen sääntö on siis $a_n = a_1q^{n-1} = 4 \cdot 5^{n-1}$.

Kertomalla lukujonon (b_n) jäsen luvulla 2 saadaan lukujonon (b_n) seuraava jäsen, joten lukujono (b_n) on geometrinen ja sen suhdeluku $q = 2$. Lukujonon (b_n) analyyttinen sääntö on siis $b_n = b_1q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Vastaus: $a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$ ja $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

c) Lukujonon (c_n) analyyttinen sääntö on
$c_n = a_nb_n = 4 \cdot 5^{n-1} \cdot 3 \cdot 2^{n-1} = 4 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 2)^{n-1} = 12 \cdot 10^{n-1}$.

Vastaus: $c_n = 12 \cdot 10^{n-1}$.

183B. Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$. Muodostetaan lausekkeet lukujonon ensimmäisille jäsenille.

$a_2 = a_1 + (2-1)\cdot d = a_1 + d$
$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot d = a_1 + 2d$
$a_4 = a_1 + (4-1)\cdot d = a_1 + 3d$
$a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d = a_1 + 4d$
$a_6 = a_1 + (6-1)\cdot d = a_1 + 5d$

Kolmen ensimmäisen jäsenen summa on −9, joten
$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = -9$.

Kolmen seuraavan jäsenen summa on 9, joten
$(a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 9$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan siitä erotusluku d.

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = -9 \\ (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = -9 \\ 3a_1 + 12d = 9 \end{cases} \qquad \| \cdot (-1)$$

$$+\begin{cases} -3a_1 - 3d = 9 \\ 3a_1 + 12d = 9 \end{cases}$$

$$9d = 18 \qquad \| :9$$

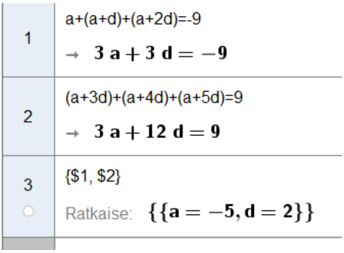
$$d = 2$$

Sijoitetaan $d = 2$ yhtälöön $3a_1 + 12d = 9$.

$$3a_1 + 12\cdot 2 = 9$$
$$3a_1 + 24 = 9$$
$$3a_1 = -15 \qquad \| :3$$
$$a_1 = -5$$

Yhtälöpari voidaan ratkaista myös ohjelman avulla.

Merkitään ohjelmaan $a_1 = a$.



Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = -5$ ja erotusluku $d = 2$, joten sen yleinen jäsen on
$a_n = -5 + (n - 1) \cdot 2 = -5 + 2n - 2 = 2n - 7.$

Vastaus: $a_n = 2n - 7$

184A. Luvut 1, 2, 3, …, m muodostavat aritmeettisen lukujonon, jonka erotusluku on $2 - 1 = 1$. Muodostetaan lauseke summalle $1 + 2 + 3 + \ldots + m$ sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien määrä m, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$ ja viimeinen yhteenlaskettava m.

$$S_m = m \cdot \frac{1+m}{2}$$

Muodostetaan edellisen lausekkeen avulla epäyhtälö ja ratkaistaan sen avulla suurin luonnollinen luku m, jolle $1 + 2 + 3 + \ldots + m \leq 462\,241$.

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{1+m}{2} &\leq 462\,241 \qquad \| \cdot 2 \\ m(1+m) &\leq 924\,482 \\ m + m^2 &\leq 924\,482 \\ m^2 + m - 924\,482 &\leq 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan vastaava yhtälö.

$$m^2 + m - 924\,482 = 0$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-924\,482)}}{2 \cdot 1} \\ m &= \frac{-1 \pm \sqrt{3\,697\,929}}{2} \\ m &= \frac{-1 \pm 1923}{2} \\ m &= \frac{-1 - 1923}{2} = -962 \quad \text{tai} \quad m = \frac{-1 + 1923}{2} = 961 \end{aligned}$$

Negatiivinen luku ei tule kysymykseen, koska m on luonnollinen luku. Kun $m = 961$, summa on 462 241. Summa kasvaa, kun siihen lisätään positiivisia yhteenlaskettavia, joten 961 on suurin sellainen luonnollinen luku m, että $1 + 2 + 3 + \ldots + m \leq 462\,241$.

Vastaus: $m = 961$

185B. **a)** Ensimmäisen kuution särmän pituus on 1 m.
Toisen kuution särmän pituus on 0,5 · 1 m = 0,5 m.
Kolmannen kuution särmän pituus on 0,5 · 0,5 · 1 m = 0,25 m.
n:nnen kuution särmän pituus on $0{,}5^{n-1} \cdot 1$ m.

Vastaus: 1 m, 0,5 m, 0,25 m ja $0{,}5^{n-1} \cdot 1$ m

b) Kuutioiden pituudet muodostavat geometrisen jonon, jonka suhdeluku on $q = 0{,}5$.

TAPA 1:
Lasketaan 10 ensimmäisen kuution muodostaman pinon korkeus sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$, suhdeluku $q = 0{,}5$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 10$.

$$S_{10} = \frac{1\left(1-0{,}5^{10}\right)}{1-0{,}5} = 1{,}9980...$$

Pinon korkeus on 1,9980… m ≈ 1,998 m.

Vastaus: 1,998 m

TAPA 2:
Lasketaan 10 ensimmäisen kuution muodostaman pinon korkeus taulukkolaskentaohjelman avulla.
Havaitaan, että pinon korkeus on 1,9980… m ≈ 1,998 m.

A10 =A9*0,5

	A	B	C
1	1		
2	0,5		
3	0,25		
4	0,125		
5	0,0625		
6	0,03125		
7	0,015625		
8	0,0078125		
9	0,00390625		
10	0,001953125		
11	1,998046875	summa	
12			

Vastaus: 1,998 m

c) TAPA 1:

Lasketaan vastaavalla tavalla niiden pinojen korkeudet, joissa on 11, 12, 13 ja 14 kuutiota.

$$S_{11} = \frac{1\left(1-0,5^{11}\right)}{1-0,5} = 1,99902... \approx 1,9990$$

$$S_{12} = \frac{1\left(1-0,5^{12}\right)}{1-0,5} = 1,99951... \approx 1,9995$$

$$S_{13} = \frac{1\left(1-0,5^{13}\right)}{1-0,5} = 1,99975... \approx 1,9998$$

$$S_{14} = \frac{1\left(1-0,5^{14}\right)}{1-0,5} = 1,99987... \approx 1,9999$$

Pinon korkeuden arvot ovat 1,9990 m; 1,9995 m; 1,9998 m ja 1,9999 m.

Kun kuutioiden lukumäärä kasvaa rajatta, pinon korkeus näyttää lähestyvän lukua 2 m.

Vastaus: 1,9990 m; 1,9995 m; 1,9998 m ja 1,9999 m; lukua 2 m

TAPA 2:

Lasketaan taulukkolaskentaohjelman niiden pinojen korkeudet, joissa on 11, 12, 13 ja 14 kuutiota.

B14 =B13+A14

	A	B	C
1	1	1	
2	0,5	1,5	
3	0,25	1,75	
4	0,125	1,875	
5	0,0625	1,9375	
6	0,03125	1,96875	
7	0,015625	1,984375	
8	0,0078125	1,9921875	
9	0,00390625	1,99609375	
10	0,001953125	1,998046875	
11	0,000976563	1,999023438	
12	0,000488281	1,999511719	
13	0,000244141	1,999755859	
14	0,00012207	1,99987793	
15			

Pinon korkeuden arvot ovat 1,9990 m; 1,9995 m; 1,9998 m ja 1,9999 m.

Kun kuutioiden lukumäärä kasvaa rajatta, pinon korkeus näyttää lähestyvän lukua 2 m.

Vastaus: 1,9990 m; 1,9995 m; 1,9998 m ja 1,9999 m; lukua 2 m

186B. Lasketaan luvun $\sqrt[3]{9}$ likiarvoja taulukkolaskentaohjelmalla eli jonon

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{9}{(x_n)^2}\right)$$ jäseniä.

Jonon ensimmäinen jäsen on tehtävänannon mukaan $x_1 = 1$.
Lasketaan toinen jäsen soluviittauksia käyttäen.

	A
1	1
2	=1 / 3 (2A1 + 9 / (A1)^2)

Kopioidaan kaava alemmille riveille.

	A
1	1
2	3.666666666666666
3	2.667584940312213
4	2.199974562694804
5	2.086498753023521
6	2.080103525509573
7	2.080083823238522
8	2.080083823051904

Indeksin arvolla $n = 7$ pitää ensimmäisen kerran paikkansa, että lukujen $x_n = x_7$ ja $x_{n+1} = x_8$ seitsemän ensimmäistä desimaalia ovat samat.

Vastaus: $n = 7$

187B. **a)** Kun lääkkeestä häviää 35 %, jäljelle jää 100 % − 35 % = 65 %. Tutkitaan taulukkolaskentaohjelmalla, kuinka paljon lääkettä on elimistössä toisen annoksen ottamisen jälkeen.

	A
1	60
2	=0.65*A1+60

Kopioidaan kaava alemmille riveille.

	A
1	60
2	99
3	124.35
4	140.8275
5	151.53788

Toisen lääkkeenottokerran lääkettä on elimistössä 99 mg ja viidennen kerran jälkeen 151,537… mg ≈ 150 mg.

Vastaus: 99 mg ja 150 mg

b) Taulukoidaan lääkkeen määriä välittömästi lääkkeen oton jälkeen.

Lääkkeenottokerta	Lääkkeen määrä (mg)
1	60
2	$0{,}65 \cdot 60 + 60$
3	$0{,}65(0{,}65 \cdot 60 + 60) + 60$ $= 0{,}65^2 \cdot 60 + 0{,}65 \cdot 60 + 60$
4	$0{,}65 \cdot (0{,}65^2 \cdot 60 + 0{,}65 \cdot 60 + 60) + 60$ $= 0{,}65^3 \cdot 60 + 0{,}65^2 \cdot 60 + 0{,}65 \cdot 60 + 60$
…	…
n	$0{,}65^{n-1} \cdot 60 + 0{,}65^{n-2} \cdot 60 + \ldots + 0{,}65 \cdot 60 + 60$

Taulukon viimeisellä rivillä on välittömästi n:nnen lääkkeenottokerran jälkeen elimistössä olevan lääkkeen määrä ja se saadaan laskettua geometrisena summana, jossa $a_1 = 60$ ja $q = 0{,}65$.

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{60 \cdot (1-0{,}65^n)}{1-0{,}65}\ \text{mg} = \frac{60 \cdot (1-0{,}65^n)}{0{,}35}\ \text{mg}$$

Vastaus: $\dfrac{60 \cdot (1-0{,}65^n)}{0{,}35}$ mg

c) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lisää lukujonon jäseniä.

6	158.49962
7	163.02475
8	165.96609
9	167.87796
10	169.12067
⋮	⋮
39	171.42856
40	171.42857
41	171.42857
42	171.42857
43	171.42857

Lääkkeen määrä näyttää lähestyvän arvoa 171,428… mg ≈ 171 mg.

Vastaus: 171 mg

188A. Yhtälöissä $2^2 = 1 + 3$ ja $3^2 = 1 + 3 + 5$ oikealla puolella on vasemman puolen kantaluvun verran peräkkäisiä parittomia luonnollisia lukuja, joten vastaava yhtälö luvulle 4 on $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$.

Parittomat luvut ovat muotoa $a_n = 2n - 1$, jossa $n = 1, 2, 3, \ldots$

Todistetaan, että $n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.

Summassa $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$ on peräkkäisiä parittomia luonnollisia lukuja, joten summa on aritmeettinen ja sen erotusluku on $d = 2$. Lasketaan summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien määrä n, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_n = 2n - 1$.

$S_n = n\frac{1+(2n-1)}{2} = n\frac{1+2n-1}{2} = n\frac{2n}{2} = n \cdot n = n^2$, mikä oli osoitettava.

Vastaus: $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$

189B. **a)** Esitetään lukujonon rekursiivinen sääntö $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n = 1,2,\ldots$ sanallisesti: Lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat molemmat 1, ja lukujonon jäsen on kahden edellisen jäsenen summa.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla soluviittausten avulla lukujonon kolmas jäsen.

	A
1	1
2	1
3	=A1+A2

Kopioidaan kaava alemmille riveille.

	A
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55

Kysytyt jäsenet ovat $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$, $f_6 = 8$, $f_7 = 13$, $f_8 = 21$, $f_9 = 34$ ja $f_{10} = 55$.

Vastaus: $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$, $f_6 = 8$, $f_7 = 13$, $f_8 = 21$, $f_9 = 34$ ja $f_{10} = 55$

b) TAPA 1:

Kun $n = 1$, niin kaava saa muodon

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^1 - (-\varphi)^{-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi - \frac{1}{-\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right).$$

Sijoitetaan tähän kaavaan $\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ ja sievennetään.

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) + {}^{2)}\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left({}^{1+\sqrt{5})}\frac{1+\sqrt{5}}{2} + {}^{2)}\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}{2\left(1+\sqrt{5}\right)} + \frac{4}{2\left(1+\sqrt{5}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{5}+5}{2\left(1+\sqrt{5}\right)} + \frac{4}{2\left(1+\sqrt{5}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{6+2\sqrt{5}}{2\left(1+\sqrt{5}\right)} + \frac{4}{2\left(1+\sqrt{5}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{10+2\sqrt{5}}{2\left(1+\sqrt{5}\right)} \\
&= \frac{10+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)} \\
&= \frac{10+2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+2\sqrt{5}^2} \\
&= \frac{2\sqrt{5}+10}{2\sqrt{5}+2\cdot 5} \\
&= \frac{2\sqrt{5}+10}{2\sqrt{5}+10} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Koska $f_1 = 1$, kaava pitää paikkansa.

Kun $n = 2$, kaava saa muodon $f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^2 - (-\varphi)^{-2}\right)$.

Sijoitetaan tähän kaavaan $\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ ja sievennetään.

$$
\begin{aligned}
f_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2 - \left[-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^{-2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\sqrt{5}\right)^2 - \frac{1}{\left[-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right) - \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\sqrt{5}\right)^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{5}+5\right) - \frac{1}{\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{5}+5\right)}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[{}^{6+2\sqrt{5})}\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - {}^{16)}\frac{1}{\frac{1}{4}\left(6+2\sqrt{5}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{36+12\sqrt{5}+12\sqrt{5}+20}{4\left(6+2\sqrt{5}\right)} - \frac{16}{4\left(6+2\sqrt{5}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{36+24\sqrt{5}+20-16}{4\left(6+2\sqrt{5}\right)} \\
&= \frac{40+24\sqrt{5}}{4\sqrt{5}\left(6+2\sqrt{5}\right)} \\
&= \frac{40+24\sqrt{5}}{24\sqrt{5}+8\sqrt{5}^2} \\
&= \frac{24\sqrt{5}+40}{24\sqrt{5}+40} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Koska $f_2 = 1$, kaava pitää paikkansa.

TAPA 2:

Kun n = 1, niin kaava saa muodon

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^1 - (-\varphi)^{-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi - \frac{1}{-\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right).$$

Sijoitetaan tähän kaavaan $\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ ja sievennetään.

Sievennetään lauseke sopivalla ohjelmalla muotoon 1.

Koska f_1 = 1, kaava pitää paikkansa.

Kun n = 2, kaava saa muodon $f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^2 - (-\varphi)^{-2}\right)$.

Sijoitetaan tähän kaavaan $\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ ja sievennetään.

Sievennetään lauseke $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2 - \left[-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^{-2}\right]$ sopivalla ohjelmalla muotoon 1.

Koska f_2 = 1, kaava pitää paikkansa.

Vastaus: –

c) TAPA 1:
Ratkaistaan yhtälö $x^2 - x - 1 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$$

Yhtälön ratkaisut ovat siis $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) = \varphi$ ja $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$.

Sievennetään lauseke $-\frac{1}{\varphi}$.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\varphi} &= -^{2)}\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)} \\
&= -^{1-\sqrt{5})}\frac{2}{1+\sqrt{5}} \\
&= -\frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)} \\
&= -\frac{2-2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}-5} \\
&= -\frac{2-2\sqrt{5}}{-4} \\
&= \frac{2-2\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{2}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right),
\end{aligned}$$

jonka jo todettiin olevan yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ toinen ratkaisu.

TAPA 2:

Ratkaistaan yhtälö $x^2 - x - 1 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$$

Yhtälön ratkaisut ovat siis $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) = \varphi$ ja $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$.

Sievennetään lauseke $-\frac{1}{\varphi}$.

Sievennetään lauseke $-^{2)}\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)}$ sopivalla ohjelmalla muotoon $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$, jonka jo todettiin olevan yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ toinen ratkaisu.

Vastaus: –