

## 2 YHTÄLÖITÄ

### ALOITA PERUSTEISTA

**51A.** Luku on yhtälön ratkaisu, jos luku toteuttaa yhtälön.

a) Sijoitetaan luku  $x = 3$  yhtälöön.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 - 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälö on tosi, joten  $x = 3$  on yhtälön ratkaisu.

Vastaus: on

b) Sijoitetaan luku  $x = 3$  yhtälöön.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 5 &= 3 + 7 \\ 11 &= 10 \end{aligned}$$

Yhtälö on epätosi, joten  $x = 3$  ei ole yhtälön ratkaisu.

Vastaus: ei ole

**52A.** a)

$$\begin{aligned} 5x - 25 &= 0 \\ 5x &= 25 && \parallel :5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vastaus:  $x = 5$

b)

$$\begin{aligned} 2x + 9 &= 5x - 3 \\ 2x - 5x &= -3 - 9 \\ -3x &= -12 && \parallel :(-3) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Vastaus:  $x = 4$

**53A. a)**

$$\begin{aligned}
 2(x+4) - 3 &= 3x \\
 2x + 8 - 3 &= 3x \\
 2x - 3x &= -8 + 3 \\
 -x &= -5 \quad \| :(-1) \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

Tarkistetaan sijoittamalla ratkaisu alkuperäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned}
 2(5+4) - 3 &= 3 \cdot 5 \\
 2 \cdot 9 - 3 &= 15 \\
 15 &= 15
 \end{aligned}$$

Yhtälö on tosi, joten  $x = 5$  on yhtälön ratkaisu.

Vastaus:  $x = 5$

**b)**

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{3} + \frac{2x}{3} &= 2 \quad \| \cdot 3 \\
 x + 2x &= 6 \\
 3x &= 6 \quad \| :3 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

Tarkistetaan sijoittamalla ratkaisu alkuperäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 2}{3} &= 2 \\
 \frac{2}{3} + \frac{4}{3} &= 2 \\
 \frac{6}{3} &= 2 \\
 2 &= 2
 \end{aligned}$$

Yhtälö on tosi, joten  $x = 2$  on yhtälön ratkaisu.

Vastaus:  $x = 2$

c)

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} - \frac{6x-2}{4} &= 8 && \parallel \cdot 4 \\ x - (6x-2) &= 32 \\ x - 6x + 2 &= 32 \\ -5x &= 30 && \parallel :(-5) \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Tarkistetaan sijoittamalla ratkaisu alkuperäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} \frac{-6}{4} - \frac{6 \cdot (-6) - 2}{4} &= 8 \\ -\frac{6}{4} - \frac{-38}{4} &= 8 \\ -\frac{6}{4} + \frac{38}{4} &= 8 \\ \frac{32}{4} &= 8 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

Yhtälö on tosi, joten  $x = -6$  on yhtälön ratkaisu.

Vastaus:  $x = -6$

- 54A. a)** Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat  $a = 2$ ,  $b = 1$  ja  $c = -10$ . Sijoitetaan kertoimet ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$$x = \frac{-1 \pm 9}{4}$$

$$x = \frac{-1+9}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-9}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

Vastaus:  $x = 2$  tai  $x = -\frac{5}{2}$

- b)** Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat  $a = -1$ ,  $b = -3$  ja  $c = 4$ . Sijoitetaan kertoimet ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-2}$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{-2}$$

$$x = \frac{3+5}{-2} = \frac{8}{-2} = -4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-5}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Vastaus:  $x = -4$  tai  $x = 1$

- c) Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat  $a = 1$ ,  $b = -2$  ja  $c = 0$ . Sijoitetaan kertoimet ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Vastaus:  $x = 2$  tai  $x = 0$

**55A. a)** Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$  yhteenlaskumenetelmällä.

Eliminoidaan ensin muuttuja  $x$ .

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \quad \parallel \cdot (-2) \\ \hline \begin{cases} -2x - 4y = 8 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \\ \hline -2x + 2x - 4y - y = 8 - 3 \\ \quad \quad \quad -5y = 5 \quad \parallel : (-5) \\ \quad \quad \quad y = -1 \end{array}$$

Sijoitetaan  $y = -1$  ylempään alkuperäiseen yhtälöön  $x + 2y = -4$  ja ratkaistaan  $x$ .

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot (-1) &= -4 \\ x - 2 &= -4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Tarkistetaan sijoittamalla ratkaisu  $x = -2$ ,  $y = -1$  molempiin yhtälöparin yhtälöihin.

$$\begin{array}{r} -2 + 2 \cdot (-1) = -4 \\ \quad \quad \quad -4 = -4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \cdot (-2) - (-1) = -3 \\ \quad \quad \quad -3 = -3 \end{array}$$

Molemmat yhtälöt toteutuvat, joten yhtälöparin ratkaisu on  $x = -2$  ja  $y = -1$ .

Vastaus:  $x = -2$  ja  $y = -1$

b) Ratkaistaan yhtälöpari  $\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ 4y = 12 - x \end{cases}$  sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ 4y = 12 - x \\ y = x - 1 \\ 4y = 12 - x \end{cases}$$

Sijoitetaan ylempi yhtälö alempaan yhtälöön ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä muuttuja  $x$ .

$$\begin{aligned} 4 \cdot (x - 1) &= 12 - x \\ 4x - 4 &= 12 - x \\ 5x &= 16 \quad \| :5 \\ x &= \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Sijoitetaan  $x = \frac{16}{5}$  yhtälöön  $y = x - 1$  ja sievennetään.

$$y = \frac{16}{5} - 1 = \frac{16}{5} - \frac{5}{5} = \frac{11}{5}$$

Tarkistetaan sijoittamalla ratkaisu  $x = \frac{16}{5}$ ,  $y = \frac{11}{5}$  molempiin yhtälöparin yhtälöihin.

$$\begin{aligned} \frac{11}{5} - \frac{16}{5} + 1 &= 0 & 4 \cdot \frac{11}{5} &= 5) 12 - \frac{16}{5} \\ -\frac{5}{5} + 1 &= 0 & \frac{44}{5} &= \frac{60}{5} - \frac{16}{5} \\ 0 &= 0 & \frac{44}{5} &= \frac{44}{5} \end{aligned}$$

Molemmat yhtälöt toteutuvat, joten yhtälöparin ratkaisu on  $x = \frac{16}{5}$  ja  $y = \frac{11}{5}$ .

Vastaus:  $x = \frac{16}{5}$  ja  $y = \frac{11}{5}$

**56A. a)** Yhtälö on verranto. Ratkaistaan se kertomalla ristiin.

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{5} &= \frac{x-3}{6} \\ 6(x+2) &= 5(x-3) \\ 6x+12 &= 5x-15 \\ x &= -27\end{aligned}$$

Vastaus:  $x = -27$

**b)** Ratkaistaan verranto kertomalla ristiin.

$$\begin{aligned}\frac{x}{3} &= \frac{3}{x} \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm\sqrt{9} \\ x &= \pm 3\end{aligned}$$

Vastaus:  $x = \pm 3$

**c)** Ratkaistaan verranto kertomalla ristiin.

$$\begin{aligned}\frac{1}{27} &= \frac{x^3}{2^3} \\ 27x^3 &= 8 \quad ||: 27 \\ x^3 &= \frac{8}{27} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \\ x &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Vastaus:  $x = \frac{2}{3}$



**57A. a)**

$$4x^3 = 32 \quad \parallel : 4$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8}$$

$$x = 2$$

Vastaus:  $x = 2$ **b)**

$$5x^4 - 5 = 0$$

$$5x^4 = 5 \quad \parallel : 5$$

$$x^4 = 1$$

$$x = \pm \sqrt[4]{1}$$

$$x = \pm 1$$

Vastaus:  $x = \pm 1$ **c)**

$$\frac{1}{16}x^5 + 2 = 0$$

$$\frac{1}{16}x^5 = -2 \quad \parallel \cdot 16$$

$$x^5 = -32$$

$$x = \sqrt[5]{-32}$$

$$x = -2$$

Vastaus:  $x = -2$

**58A. a)**

$$x^2 = 64$$

$$x = \pm\sqrt{64}$$

$$x = \pm 8$$

Vastaus:  $x = \pm 8$

**b)**

$$2^y = 64$$

$$2^y = 2^6$$

$$y = 6$$

Koska kantaluvut (2) ovat yhtäsuuret myös eksponenttien (y ja 6) oltava yhtäsuuret

Vastaus:  $y = 6$

**c)**

$$z^3 = 64$$

$$z = \sqrt[3]{64}$$

$$z = 4$$

Vastaus:  $z = 4$

**59A. a)**

$$2^x = 2$$

$$2^x = 2^1$$

$$x = 1$$

Kun kantaluvut ovat yhtä suuret, myös eksponenttien oltava yhtä suuret.

Vastaus:  $x = 1$

**b)**

$$2^x = \frac{1}{2}$$

$$2^x = 2^{-1}$$

$$x = -1$$

Vastaus:  $x = -1$

**c)**

$$2^x = 8^2$$

$$2^x = (2^3)^2$$

$$2^x = 2^6$$

$$x = 6$$

Vastaus:  $x = 6$

**d)**

$$3^x = \frac{1}{3^5}$$

$$3^x = 3^{-5}$$

$$x = -5$$

Vastaus:  $x = -5$

e)

$$10^x = 1000$$

$$10^x = 10^3$$

$$x = 3$$

Vastaus:  $x = 3$

f)

$$10^x = 0,01$$

$$10^x = \frac{1}{100}$$

$$10^x = \frac{1}{10^2}$$

$$10^x = 10^{-2}$$

$$x = -2$$

Vastaus:  $x = -2$

**60A.** Merkitään matkan kokonaishintaa kirjaimella  $x$ . Alkuperäinen yhden matkustajan hinta oli  $\frac{x}{11}$ . Kun matkustajia tuli kaksi lisää, yhden matkustajan hinta pieneni 10 eurolla. Yhden matkustajan hinnan lauseke on siis  $\frac{x}{11} - 10$ . Toisaalta yhden matkustajan hinta saadaan lausekkeella  $\frac{x}{13}$ . Merkitään nämä lausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan matkan kokonaishinta  $x$ .

$$\begin{aligned} \frac{x}{11} - 10 &= \frac{x}{13} \\ 13) \frac{x}{11} - \overset{11)}{\frac{x}{13}} &= 10 \\ \frac{13x}{143} - \frac{11x}{143} &= 10 \\ \frac{2x}{143} &= 10 \quad || \cdot 143 \\ 2x &= 1430 \quad || : 2 \\ x &= 715 \end{aligned}$$

Matkan kokonaishinta oli 715 €, joten yhden matkustajan hinta oli  $\frac{715 \text{ €}}{13} = 55 \text{ €}$ .

Vastaus: 55 euroa

- 61A. a)** Merkitään osakkeen alkuperäistä arvoa kirjaimella  $x$ . Osakkeen arvo nousi 50 %, joten se tuli  $100 \% + 50 \% = 150 \% = 1,5$ -kertaiseksi. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä osakkeen alkuperäinen arvo  $x$ .

$$\begin{aligned} 1,50x &= 12 && \parallel : 1,50 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Osakkeen alkuperäinen arvo oli 8 euroa.

Vastaus: 8 euroa

- b)** Merkitään osakkeen alkuperäistä arvoa kirjaimella  $x$ . Osakkeen arvo nousi ensin 20 %, eli osakkeen arvo tuli 1,20-kertaiseksi ja laski sitten 20 %, eli osakkeen arvo tuli 0,80-kertaiseksi. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä osakkeen alkuperäinen arvo.

$$\begin{aligned} 0,80 \cdot 1,20x &= 8,30 \\ 0,96x &= 8,30 && \parallel : 0,96 \\ x &= 8,645\dots \\ x &\approx 8,65 \end{aligned}$$

Osakkeen alkuperäinen arvo oli 8,65 euroa.

Vastaus: 8,65 euroa

- 62A. a)** Merkitään kilohintaa kirjaimella  $x$  ja kirjataan tiedot taulukkoon.

Hinta (€)	Paino (g)
8,80	450
$x$	1000

Kahvipapujen hinta ja paino ovat suoraan verrannolliset. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä kilohinta  $x$ .

$$\frac{8,80}{x} = \frac{450}{1000}$$

$$450x = 8,80 \cdot 1000 \quad || : 450$$

$$x = 19,555\dots$$

$$x \approx 19,56$$

Kahvipapujen kilohinta on 19,56 €.

Vastaus: 19,56 €/kg

- b)** Merkitään koulumatkaan autolla kuluvaa aikaa kirjaimella  $x$  ja kirjataan tiedot taulukkoon.

Aika (min)	Nopeus (km/h)
15	35
$x$	55

Aika ja nopeus ovat kääntäen verrannolliset. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä aika  $x$ .

$$\frac{15}{x} = \frac{55}{35}$$

$$55x = 15 \cdot 35 \quad || : 55$$

$$x = 9,545\dots$$

$$x \approx 10$$

Autolla koulumatka kestää noin 10 minuuttia.

Vastaus: 10 min

## VAHVISTA OSAAMISTA

63B. a)

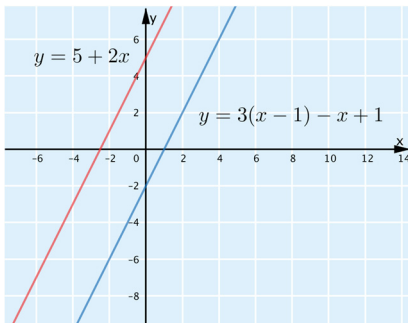
$$3(x-1) - x + 1 = 5 + 2x$$

$$3x - 3 - x + 1 = 5 + 2x$$

$$3x - 2x - x = 5 + 3 - 1$$

$$0 = 7$$

Piirretään alkuperäisen yhtälön vasemmalla puolella ja oikealla puolella olevia lausekkeita vastaavien funktioiden kuvaajat.



Suorat näyttäisivät olevan yhdensuuntaisia, joten niillä ei ole yhteisiä pisteitä ja yhtälöllä ei siten ole ratkaisua.

Vastaus: ei ratkaisua



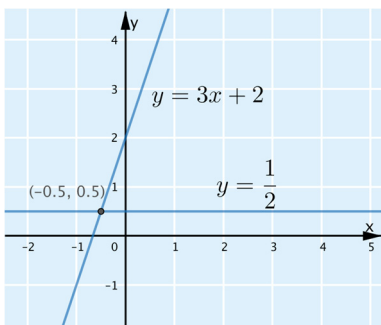
b)

$$3x + 2 = \frac{1}{2}$$

$$3x = -\frac{3}{2} \quad || :3$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Piirretään alkuperäisen yhtälön vasemmalla puolella ja oikealla puolella olevia lausekkeita vastaavien funktioiden kuvaajat.



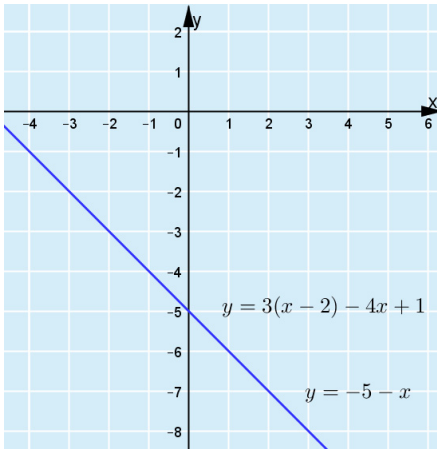
Suorat näyttävät leikkaavan kohdassa  $x = -\frac{1}{2}$ , joten ratkaisu on oikein.

Vastaus:  $x = -\frac{1}{2}$

c)

$$\begin{aligned}
 3(x-2) - 4x + 1 &= -5 - x \\
 3x - 6 - 4x + 1 &= -5 - x \\
 -5 - x &= -5 - x \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Piirretään alkuperäisen yhtälön vasemmalla puolella ja oikealla puolella olevia lausekkeita vastaavien funktioiden kuvaajat.



Suorat yhtyvät, joten yhtälö toteutuu kaikilla  $x$ :n arvoilla.

Vastaus: yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla

**64A. a)**

$$3x + 2 = x - 4(5x - 1)$$

$$3x + 2 = x - 20x + 4$$

$$3x - x + 20x = 4 - 2$$

$$22x = 2 \quad \parallel : 22$$

$$x = \frac{2}{22} = \frac{1}{11}$$

$$\text{Vastaus: } x = \frac{1}{11}$$

**b)**

$$^{15)} \frac{x}{10} + ^{10)} \frac{x}{15} = ^{150)} x + 1$$

$$\frac{15x}{150} + \frac{10x}{150} = \frac{150x}{150} + 1 \quad \parallel \cdot 150$$

$$15x + 10x = 150x + 150$$

$$-125x = 150 \quad \parallel : (-125)$$

$$x = -\frac{150}{125} = -\frac{6}{5}$$

$$\text{Vastaus: } x = -\frac{6}{5}$$

**65A.** Suorien leikkauspiste on yhtälöparin  $\begin{cases} x + 5y = 1 \\ x - 5y = 5 \end{cases}$  ratkaisu. Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + 5y = 1 \\ x - 5y = 5 \end{cases} \\ \hline x + x + 5y - 5y = 1 + 5 \\ 2x = 6 \quad \parallel : 2 \\ x = 3 \end{array}$$

Ratkaistaan leikkauspisteen  $y$ -koordinaatti sijoittamalla  $x = 3$  ylempään alkuperäiseen yhtälöön.

$$\begin{array}{r} 3 + 5y = 1 \\ 5y = -2 \quad \parallel : 5 \\ y = -\frac{2}{5} \end{array}$$

Vastaus: pisteessä  $\left(3, -\frac{2}{5}\right)$

**66A. a)**

$$3x(2x - 4) = -x(1 - x) - 12$$

$$6x^2 - 12x = -x + x^2 - 12$$

$$5x^2 - 11x + 12 = 0$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat  $a = 5$ ,  $b = -11$  ja  $c = 12$ . Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12}}{2 \cdot 5}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 240}}{10}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{-119}}{10}$$

Juurrettava on negatiivinen luku, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus: ei ratkaisua

**b)**

$$x(x-5) = 20$$
$$x^2 - 5x - 20 = 0$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat  $a = 1$ ,  $b = -5$  ja  $c = -20$ . Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 80}}{2}$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{2}$$

Vastaus:  $x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{2}$

c)

$$x^2 = \frac{1}{4}(4x - 1)$$

$$x^2 = x - \frac{1}{4} \quad \parallel \cdot 4$$

$$4x^2 = 4x - 1$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat  $a = 4$ ,  $b = -4$  ja  $c = 1$ . Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8}$$

$$x = \frac{4^{(4)}}{8} = \frac{1}{2}$$

Vastaus:  $x = \frac{1}{2}$

d)

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= 4 \\(x+2)(x+2) &= 4 \\x^2 + 2x + 2x + 4 &= 4 \\x^2 + 4x &= 0\end{aligned}$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat  $a = 1$ ,  $b = 4$  ja  $c = 0$ . Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} \\x &= \frac{-4 \pm 4}{2} \\x &= \frac{-4 + 4}{2} = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4 - 4}{2} = \frac{-8}{2} = -4\end{aligned}$$

Vastaus:  $x = 0$  tai  $x = -4$



**67A. a)**

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x - 1 &= \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x - 1 &= \frac{2}{3} & \parallel \cdot 3 \\ 2x - 3 &= 2 \\ 2x &= 5 & \parallel : 2 \\ x &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Vastaus:  $x = \frac{5}{2}$

**b)**

$$\begin{aligned}\frac{2x}{2x+3} &= \frac{2x+1}{8} \\ 16x &= (2x+3)(2x+1) \\ 16x &= 4x^2 + 2x + 6x + 3 \\ -4x^2 + 8x - 3 &= 0\end{aligned}$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat  $a = -4$ ,  $b = 8$  ja  $c = -3$ . Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-4)} \\ x &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-8} \\ x &= \frac{-8 \pm 4}{-8} \\ x &= \frac{-8+4}{-8} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-8-4}{-8} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Vastaus:  $x = \frac{1}{2}$  tai  $x = \frac{3}{2}$

**68A. a)** Ratkaistaan yhtälöt.

$$\frac{3}{5}x + 2 = 1$$

$$\frac{3}{5}x = -1 \quad \| \cdot 5$$

$$3x = -5 \quad \| : 3$$

$$x = -\frac{5}{3}$$

$$3x^2 - 7x - 20 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-20)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 240}}{6}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{289}}{6}$$

$$= \frac{7 \pm 17}{6}$$

$$= \frac{7+17}{6} = \frac{24}{6} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{7-17}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

Molemmilla yhtälöillä on ratkaisuna  $x = -\frac{5}{3}$ .

Vastaus: on

**b)** Merkitään lausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan saatu yhtälö.

$$2x + 3 = -(x + 3)$$

$$2x + 3 = -x - 3$$

$$3x = -6 \quad \| : 3$$

$$x = -2$$

Vastaus:  $x = -2$

**69A.** Lausekkeen nollakohdat ratkaistaan yhtälöstä  $(x + 1)(2 - x) - 2 = 0$ .

$$\begin{aligned}(x + 1)(2 - x) - 2 &= 0 \\ 2x - x^2 + 2 - x - 2 &= 0 \\ -x^2 + x &= 0\end{aligned}$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat  $a = -1$ ,  $b = 1$  ja  $c = 0$ . Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)} \\ x &= \frac{-1 \pm 1}{-2} \\ x &= \frac{-1+1}{-2} = \frac{0}{-2} = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1\end{aligned}$$

Lausekkeen nollakohtia ovat  $x = 0$  ja  $x = 1$

Vastaus:  $x = 0$  tai  $x = 1$

**70A.** a) Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{array}{r}
 \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 1 \end{array} \right. \quad \parallel \cdot (-2) \\
 \left\{ \begin{array}{l} -4x - 2y = -8 \\ -x + 2y = 1 \end{array} \right. \\
 \hline
 -4x - x - 2y + 2y = -8 + 1 \\
 -5x = -7 \quad \parallel : (-5) \\
 x = \frac{7}{5}
 \end{array}$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  yhtälöstä  $2x + y = 4$ .

$$\begin{array}{l}
 2x + y = 4 \\
 y = 4 - 2x \\
 y = 4 - 2 \cdot \frac{7}{5} \\
 y = {}^5) 4 - \frac{14}{5} \\
 y = \frac{20}{5} - \frac{14}{5} \\
 y = \frac{6}{5}
 \end{array}$$

Vastaus:  $x = \frac{7}{5}$  ja  $y = \frac{6}{5}$

b) Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + y = 1 \\ \frac{1}{x} - y = 2 \end{array} \right. \\ \hline \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + y - y = 1 + 2 \\ \frac{2}{x} = 3 \quad \| \cdot x \\ 2x = 3 \quad \| : 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  yhtälöstä  $\frac{1}{x} + y = 1$ .

$$\begin{array}{l} \frac{1}{x} + y = 1 \\ y = 1 - \frac{1}{x} \\ y = 1 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 - 1 \cdot \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{array}$$

Vastaus:  $x = \frac{3}{2}$  ja  $y = \frac{1}{3}$

**71A. a)**

$$4x^5 + 36 = 3x^5 - 81$$

$$x^5 = -117$$

$$x = \sqrt[5]{-117}$$

$$\text{Vastaus: } x = \sqrt[5]{-117}$$

**b)**

$$x(3x + 4) = 2(2x + 6)$$

$$3x^2 + 4x = 4x + 12$$

$$3x^2 = 12 \quad || :3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

$$\text{Vastaus: } x = \pm 2$$

**c)**

$$(x^4)^2 + 15 = 14$$

$$x^8 = -1$$

Minkään reaaliluvun parillinen potenssi ei ole negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus: ei ratkaisua

- 72B. a)** Koska kantaluvut ovat yhtä suuret, myös eksponenttien oltava yhtä suuret.

$$\begin{aligned} 5^{2x+4} &= 5^{-x} \\ 2x+4 &= -x \\ 3x &= -4 \quad \parallel :3 \\ x &= -\frac{4}{3} \\ x &\approx -1,33 \end{aligned}$$

Vastaus:  $x = -\frac{4}{3} \approx -1,33$

- b)** Ratkaistaan yhtälö logaritmin avulla.

$$\begin{aligned} 10^x &= 12 \\ x &= \log_{10} 12 \\ x &= \lg 12 \\ x &\approx 1,08 \end{aligned}$$

Vastaus:  $x = \lg 12 \approx 1,08$

- c)** Koska  $2^3 = 8$ , yhtälön oikealle puolelle saadaan luvun 2 potenssi.

$$\begin{aligned} 2^{3x+1} &= 8 \\ 2^{3x+1} &= 2^3 \\ 3x+1 &= 3 \\ 3x &= 2 \quad \parallel :3 \\ x &= \frac{2}{3} \\ x &\approx 0,67 \end{aligned}$$

Vastaus:  $x = \frac{2}{3} \approx 0,67$

d) Koska  $3^3 = 27$ , yhtälön vasemmalle puolelle saadaan luvun 3 potenssi.

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 27^x &= \frac{1}{9^x} \\
 3 \cdot (3^3)^x &= 9^{-x} \\
 3 \cdot 3^{3x} &= (3^2)^{-x} \\
 3^{1+3x} &= 3^{-2x} \\
 1 + 3x &= -2x \\
 5x &= -1 \quad \| :5 \\
 x &= -\frac{1}{5} \\
 x &= -0,20
 \end{aligned}$$

Vastaus:  $x = -\frac{1}{5} = -0,20$

e)

$$\begin{aligned}
 5e^x - 15 &= 0 \\
 5e^x &= 15 \quad \| :5 \\
 e^x &= 3 \\
 x &= \log_e 3 \\
 x &= \ln 3 \\
 x &\approx 1,10
 \end{aligned}$$

Vastaus:  $x = \ln 3 \approx 1,10$

f)

$$\begin{aligned}
 10 \cdot 7^x + 40 &= 0 \\
 10 \cdot 7^x &= -40 \quad \| :10 \\
 7^x &= -4
 \end{aligned}$$

Luvun 7 potenssi ei voi olla negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus: ei ratkaisua



**73A. a)** Esimerkiksi yhtälön  $x^2 - 1 = 0$  yksi juuri on  $x = 1$ , koska

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Vastaus: esim.  $x^2 - 1 = 0$

**b)** Yhtälö toteutuu, kun  $x = 2$ . Sijoitetaan  $x = 2$  yhtälöön ja ratkaistaan kerroin  $a$ .

$$x(x - 5) + ax = 2$$

$$2 \cdot (2 - 5) + 2a = 2$$

$$2 \cdot (-3) + 2a = 2$$

$$-6 + 2a = 2$$

$$2a = 8 \quad || : 2$$

$$a = 4$$

Vastaus:  $a = 4$

**74B.** Merkitään Aadan ostaman kryptovaluutan määrää kirjaimella  $x$ . Kun valuutan arvo romahti 62 %, Aadan valuutan arvo väheni  $0,62x$ . Toisaalta arvo väheni 42 520 €.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä alkuperäinen kryptovaluutan määrä  $x$ .

$$0,62x = 42\,520 \quad || : 0,62$$

$$x = 68\,580,645\dots$$

$$x \approx 68\,580,65$$

Aada oli ostanut kryptovaluuttaa 68 580,65 eurolla.

Vastaus: 68 580,65 eurolla

- 75A.** Merkitään yhden BitCoinin kauppahintaa vuotta aiemmin kirjaimella  $x$ . BitCoinin arvo nousi 900 %, eli se tuli  $100 \% + 900 \% = 1000 \% = 10$ -kertaiseksi vuodessa.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä kauppahinta  $x$ .

$$10x = 16\,000 \quad || :10$$

$$x = 1600$$

Yhden BitCoinin kauppahinta vuotta aiemmin oli 1600 \$.

Vastaus: 1600 \$

- 76A. a)** Merkitään aikaa kirjaimella  $x$ . Merkitään tiedot taulukkoon.

Maalarien määrä	Aika (työpäivää)
2	5
1	$x$

Mitä enemmän työntekijöitä, sitä nopeammin urakka tulee tehdyksi. Suuret ovat siis kääntäen verrannolliset.

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä aika  $x$ .

$$\frac{2}{1} = \frac{x}{5}$$

$$x = 10$$

Yhdeltä maalarilta aikaa kuluisi 10 työpäivää.

Vastaus: 10 työpäivää

b) Merkitään aikaa kirjaimella  $x$ . Merkitään tiedot taulukkoon.

Maalarien määrä	Aika (työpäivää)
2	5
15	$x$

Suureet ovat siis kääntäen verrannolliset.  
Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä aika  $x$ .

$$\begin{aligned} \frac{2}{15} &= \frac{x}{5} \\ 15x &= 10 && \parallel :15 \\ x &= \frac{10}{15} \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Viideltätoista maalarilta aikaa kuluisi  $\frac{2}{3}$  työpäivää. Tämä on

$$\frac{2}{3} \cdot 8 \text{ h} = 5,333\dots \text{h} = 5 \text{ h } 20 \text{ min.}$$

Vastaus: 5 h 20 min

**77B.** Merkitään autojen määrää kirjaimella  $a$  ja mopojen määrää kirjaimella  $m$ . Koska yhdessä autossa on 4 rengasta, niin  $a$ :ssa autossa on  $4a$  rengasta ja vastaavasti  $m$ :ssä mopossa on  $2m$  rengasta. Kulkuneuvojen ja renkaiden määristä saadaan yhtälöt. Muodostetaan yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan siitä autojen ja mopojen määrät.

$$\begin{cases} a + m = 30 \\ 4a + 2m = 96 \end{cases}$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla yhtälöparin ratkaisuksi saadaan  $a = 18$  ja  $m = 12$ .

Parkkipaikalla on 18 autoa ja 12 mopoa.

Vastaus: 18 autoa ja 12 mopoa

- 78B.** Merkitään minun ikääni nyt kirjaimella  $m$  ja lapseni ikää nyt kirjaimella  $l$ . ”Nyt ikäni on 7 vuotta enemmän kuin lapseni ikä kolminkertaisena” muodostaa valituilla kirjaimilla yhtälön  $m = 3l + 7$ .

Minun ikäni 9 vuotta sitten oli  $m - 9$  ja lapseni ikä  $l - 9$ . Tuolloin lapseni ikä 11-kertaisena oli  $11(l - 9)$ . Muodostetaan tiedoista yhtälöpari ja ratkaistaan siitä iät  $m$  ja  $l$ .

$$\begin{cases} m - 9 = 11(l - 9) + 1 \\ m = 3l + 7 \end{cases}$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla yhtälöparin ratkaisuksi saadaan  $m = 43$  ja  $l = 12$ .

Minä olen nyt 43-vuotias ja lapseni 12-vuotias.

Vastaus: 43 vuotta, 12 vuotta

- 79B.** Merkitään talvinopeusrajoitusta kirjaimella  $x$ . Kirjataan tiedot taulukkoon.

Nopeus (km/h)	Aika (min)
$x$	15
$x + 20$	12

Nopeus ja aika ovat kääntäen verrannolliset. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä nopeus  $x$ .

$$\frac{x}{x + 20} = \frac{12}{15}$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan  $x = 80$  km/h.

Talvinopeusrajoitus on 80 km/h.

Vastaus: 80 km/h

- 80A.** Merkitään varren halkaisijaa 90 vrk:n ikäisenä kirjaimella  $x$ . Merkitään tehtävän tiedot taulukkoon.

Halkaisija (mm)	$\sqrt{\text{ikä}} (\sqrt{\text{vrk}})$
12	$\sqrt{40}$
$x$	$\sqrt{90}$

Varren halkaisija on suoraan verrannollinen kasvin iän neliöjuureen. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä varren halkaisija  $x$ .

$$\frac{12}{x} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{90}}$$

$$\sqrt{40}x = 12 \cdot \sqrt{90} \quad \parallel : \sqrt{40}$$

$$x = 18$$

Kasvin varsi on 18 mm paksu.

Vastaus: 18 mm

**81B.** Loppumatkaan kuluva aika on  $t = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}} = \frac{30 \text{ km}}{80 \text{ km/h}} = \frac{3}{8} \text{ h}$ .

$$15 \text{ min} = \frac{1}{4} \text{ h}$$

Kokouksen alkuun on aikaa  $\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) \text{ h} = \frac{1}{8} \text{ h}$ .

Nopeudella 70 km/h loppumatkaan kuluu aikaa

$$t = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}} = \frac{30 \text{ km}}{70 \text{ km/h}} = \frac{3}{7} \text{ h}.$$

Herra Hoppulainen myöhästyisi siis

$$\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{8}\right) \text{ h} = 0,3035... \text{ h} = 18,214... \text{ min} \approx 18 \text{ min}.$$

Jotta hän olisi ajoissa perillä, hänen tulisi ajaa nopeudella

$$v = \frac{\text{matka}}{\text{aika}} = \frac{30 \text{ km}}{\frac{1}{8} \text{ h}} = 240 \text{ km/h}.$$

Vastaus: noin 18 minuuttia, 240 km/h

- 82B.** Merkitään Diofantoksen elinikää kirjaimella  $x$ . Muodostetaan tarinan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä  $x$ .

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan  $x = 84$ .

Diofantos saavutti 84 elinvuotta.

Vastaus: 84 vuotta

- 83B.** Merkitään lisättävän veden määrää kirjaimella  $x$ . Suolan määrä 10-prosenttisessa liuoksessa on  $0,1 \cdot 4 \text{ kg} = 0,4 \text{ kg}$ .

Uuden liuoksen kokonaismassa on  $4 + x \text{ kg}$ , ja suolan määrä uudessa liuoksessa on  $0,08(4 + x)$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä tilavuus  $x$ .

$$\begin{aligned}0,4 &= 0,08(4 + x) \\0,4 &= 0,32 + 0,08x \\0,08x &= 0,08 \\x &= 1\end{aligned}$$

Vettä on lisättävä 1 kg.

Vastaus: 1 kg

**84B.** Merkitään lisättävän kuohuviinin määrää kirjaimella  $x$ . Kirjataan tiedot taulukkoon.

	Mansikkamehu (l)	Kuohuviini (l)	Yhteensä
Sekoitus alussa	$0,3 \cdot 4,0 = 1,2$	$0,7 \cdot 4,0 = 2,8$	4,0
Lisäys	0	$x$	$x$
Sekoitus lopussa	1,2	$2,8 + x$	$4 + x$

Lopullisessa sekoituksessa on oltava 20 % mansikkamehua, eli  $0,2 \cdot (4 + x)$  litraa.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä lisättävän kuohuviinin määrä  $x$ .

$$\begin{aligned}
 0,2(4 + x) &= 1,2 & \parallel : 0,2 \\
 4 + x &= 6 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

Kuohuviiniä täytyy lisätä 2 litraa.

Vastaus: 2 litraa



**85B.** Merkitään meetvurstin massaa kirjaimella  $a$ , jolloin rasvan massa on  $0,36a$ . Merkitään poistettavan rasvan määrää kirjaimella  $x$ .

Uutta meetvurstia on tällöin  $a - x$  ja siinä on rasvaa  $0,36a - x$ .

Muodostetaan yhtälö, kun tiedetään, että uuden meetvurstin rasvapitoisuus on  $30\% = 0,3$ . Ratkaistaan yhtälöstä ohjelman avulla poistettavan rasvan määrä  $x$ .

$$0,3(a - x) = 0,36a - x$$

	Ratkaise(0.3(a-x)=0.36a-x)
1	$\rightarrow \left\{ x = \frac{3}{35} a \right\}$
2	{x = 0.08571428571429a}

Lasketaan kuinka monta prosenttia vähennettävän rasvan määrä  $0,0857...a$  on alkuperäisestä rasvan määrästä  $0,36a$ .

$$\frac{0,0857...a}{0,36a} = 0,238...$$

Alkuperäisestä rasvan määrästä on vähennettävä  $23,8... \% \approx 24\%$  rasvaa.

Vastaus:  $24\%$

- 86B. a)** Sijoitetaan yhtälöön luvut kehon massa = 10,  $EQ$ -luku = 1,0 ja ratkaistaan ohjelman avulla koiran aivojen massa  $x$ .

$$1,0 = \frac{x}{0,012 \cdot 10^{\frac{2}{3}}}$$

1	Ratkaise(1=x/(0.012*10^(2/3)))
○	≈ { <b>x = 0.055699</b> }

Koiran aivojen massa on  $0,0556\dots \text{ kg} \approx 0,056 \text{ kg} = 56 \text{ g}$ .

Vastaus: 56 g

- b)** Sijoitetaan yhtälöön luvut  $EQ$ -luku = 7,5, aivojen massa = 1,35 ja ratkaistaan ohjelman avulla ihmisen keskimääräinen massa  $x$ .

1	Ratkaise(7.5=1.35/(0.012*x^(2/3)))
○	≈ { <b>x = -58.0947501931, x = 58.0947501931</b> }

Negatiivinen ratkaisu ei ole mahdollinen, joten ihmisen keskimääräisenä massana on käytetty lukuarvoa  $58,094\dots \text{ kg} \approx 58 \text{ kg}$ .

Vastaus: 58 kg

## SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

**87A.** Muokataan yhtälöä muotoon, jossa yhtälön toisella puolella on vain  $\frac{x}{y}$ .

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{x-y} &= \frac{5}{2} \\ 2(x+y) &= 5(x-y) \\ 2x+2y &= 5x-5y \\ -3x &= -7y \quad \| :(-3y) \\ \frac{x}{y} &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Vastaus:  $\frac{x}{y} = \frac{7}{3}$

**88A. a)** Yhtälöparilla on ääretön määrä ratkaisuja, jos yhtälöparin yhtälöt ovat sama yhtälö. Muokataan alempaa yhtälöä ja valitaan vakioille  $k$  ja  $b$  sellaiset arvot, että yhtälöt ovat samat.

$$\begin{cases} -12x + 4y = 20 \\ 4y = kx + b \end{cases} \quad \begin{cases} -12x + 4y = 20 \\ -kx + 4y = b \end{cases}$$

Huomataan, että, jos  $k = 12$  ja  $b = 20$  yhtälöt ovat samat ja yhtälöparilla on ääretön määrä ratkaisuja.

Vastaus:  $k = 12$ ,  $b = 20$

- b) Yhtälöparilla ei ole ratkaisua, jos yhtälöitä vastaavat suorat ovat yhdensuuntaiset, mutta eivät yhdy. Muutetaan molemmat yhtälöt ratkaistuun muotoon.

$$\begin{cases} -12x + 4y = 20 \\ 4y = kx + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y = 12x + 20 & \parallel : 4 \\ 4y = kx + b & \parallel : 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = \frac{k}{4}x + \frac{b}{4} \end{cases}$$

Jotta suorat olisivat yhdensuuntaiset, on kulmakertoimien oltava yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä  $k$ .

$$\frac{k}{4} = 3 \quad \parallel \cdot 4$$

$$k = 12$$

Jotta suorat eivät yhtyisi on suorien vakiotermien oltava eri suuret siis

$$\frac{b}{4} \neq 5 \quad \parallel \cdot 4$$

$$b \neq 20$$

Yhtälöparilla ei ole yhtään ratkaisua, jos  $k = 12$  ja  $b \neq 20$ .

Vastaus:  $k = 12, b \neq 20$

- c) Yhtälöparilla on yksi ratkaisu, jos yhtälöitä vastaavat suorat leikkaavat toisensa eli ovat eri suuntaiset. Tämä tapahtuu a- ja b- kohtien perusteella silloin, kun  $k \neq 12$ .

Vastaus:  $k \neq 12$

**89A.** Yhtälö toteutuu, kun  $x = -1$ . Sijoitetaan  $x = -1$  yhtälöön ja ratkaistaan vakio  $a$ .

$$\begin{aligned} ax^2 + (a^2 - 1)x + 1 &= 0 \\ a(-1)^2 + (a^2 - 1)(-1) + 1 &= 0 \\ a - a^2 + 1 + 1 &= 0 \\ -a^2 + a + 2 &= 0 \\ a &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} \\ a &= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} \\ a &= \frac{-1 - 3}{-2} = 2 \quad \text{tai} \quad a = \frac{-1 + 3}{-2} = -1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön ensin  $a = 2$  ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} ax^2 + (a^2 - 1)x + 1 &= 0 \\ 2x^2 + (2^2 - 1)x + 1 &= 0 \\ 2x^2 + 3x + 1 &= 0 \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} \\ x &= \frac{-3 - 1}{4} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 + 1}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Kun  $a = 2$ , on toinen juuri  $x = -\frac{1}{2}$ .

Sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön  $a = -1$  ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} ax^2 + (a^2 - 1)x + 1 &= 0 \\ -x^2 + ((-1)^2 - 1)x + 1 &= 0 \\ -x^2 + 1 &= 0 \\ -x^2 &= -1 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Kun  $a = -1$ , on toinen juuri  $x = 1$ .

Vastaus:  $a = 2$ ,  $x = -\frac{1}{2}$  ja  $a = -1$ ,  $x = 1$

- 90A.** a) Yhtälön juuret  $x_1$  ja  $x_2$  saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Lasketaan juurten summa.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Vastaus: –

- b) Kohdan a mukaan yhtälön  $x^2 - 3x + 1 = 0$  juurten summa on
- $$-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3.$$

Vastaus: 3

- 91A.** Yhtälön  $x^2 + x + a = 0$  diskriminantti on  $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot a$ .

Toisen asteen yhtälön juuret ovat yhtä suuret, kun diskriminantti on 0. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä vakio  $a$ .

$$\begin{aligned} 1 - 4a &= 0 \\ -4a &= -1 && \| :(-4) \\ a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö  $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ .

Ratkaisukaavalla saadaan:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 0}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}.$$

Vastaus:  $a = \frac{1}{4}$ ,  $x = -\frac{1}{2}$

**92A.** a) Sijoitetaan  $a = 5$  ja  $y = 3$  muunnoskaavaan  $\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}$ .

$$\log_5 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = \frac{\lg 3}{\lg 5}$$

Vastaus:  $\frac{\lg 3}{\lg 5}$

b) Yhtälön  $4^x = 6$  ratkaisu on  $x = \log_4 6 = \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 4} = \frac{\lg 6}{\lg 4}$ .

Vastaus: –

**93B.** Merkitään syntymäpäivää merkinnällä pvkkvv.  
Muodostetaan ajatustenlukemistempun laskutoimitusten lauseke.

$$1. \text{pv} + 18$$

$$2. (\text{pv} + 18) \cdot 25$$

$$3. ((\text{pv} + 18) \cdot 25) - 333$$

$$4. (((\text{pv} + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8$$

$$5. ((((\text{pv} + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8) - 554$$

$$6. \frac{((((\text{pv} + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8) - 554}{2}$$

$$7. \frac{((((\text{pv} + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8) - 554}{2} + \text{kk}$$

$$8. \left( \frac{((((\text{pv} + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8) - 554}{2} + \text{kk} \right) \cdot 5$$

$$9. \left( \left( \frac{((((\text{pv} + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8) - 554}{2} + \text{kk} \right) \cdot 5 \right) + 692$$

$$10. \left( \left( \left( \frac{((((\text{pv} + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8) - 554}{2} + \text{kk} \right) \cdot 5 \right) + 692 \right) \cdot 20$$

$$11. \left( \left( \left( \left( \frac{((((\text{pv} + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8) - 554}{2} + \text{kk} \right) \cdot 5 \right) + 692 \right) \cdot 20 \right) + \text{vv}$$

$$12. \left( \left( \left( \left( \left( \frac{((((\text{pv} + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8) - 554}{2} + \text{kk} \right) \cdot 5 \right) + 692 \right) \cdot 20 \right) + \text{vv} \right) + 32\,940$$

Sievennetään lauseke sopivalla ohjelmalla.

► CAS	
1	((((((((((pv+18)*25)-333)*8)-554)/2)+kk)*5)+692)*20)+vv)-32940
	PoistaSulkeet: <b>100 kk + 10000 pv + vv</b>

Tulokseksi saadaan  $10\,000 \text{pv} + 100 \text{kk} + \text{vv}$  eli luku pvkkvv.

Vastaus: –



**94A.** Välivaiheessa B on kirjain  $a$  korvattu yhtä suurella lausekkeella  $4a - 3a$  ja kirjain  $b$  korvattu yhtä suurella lausekkeella  $4b - 3b$  sekä kirjain  $c$  korvattu yhtä suurella lausekkeella  $4c - 3c$ .

Välivaiheessa C on termejä siirretty yhtälön puolelta toiselle.

Välivaiheessa D on yhtälön vasemmalla puolella otettu yhteinen tekijä 4 ja oikealla puolella yhteinen tekijä 3.

Välivaiheen D jälkeen on yhtälö jaettu puolittain lausekkeella  $(a + b - c)$  ja saatu välivaihe E.

Tässä vaiheessa on tehty virhe, koska jakajana olevan lausekkeen arvo on nolla, sillä vaiheesta A nähdään, että  $a + b - c = 0$ . Nollalla ei saa jakaa.

Vastaus: Välivaiheessa B on kirjain  $a$  korvattu yhtä suurella lausekkeella  $4a - 3a$  ja kirjain  $b$  korvattu yhtä suurella lausekkeella  $4b - 3b$  sekä kirjain  $c$  korvattu yhtä suurella lausekkeella  $4c - 3c$ .

Välivaiheessa C on termejä siirretty yhtälön puolelta toiselle.

Välivaiheessa D on yhtälön vasemmalla puolella otettu yhteinen tekijä 4 ja oikealla puolella yhteinen tekijä 3.

Välivaiheen D jälkeen on yhtälö jaettu puolittain lausekkeella  $(a + b - c)$  ja saatu välivaihe E. Tässä vaiheessa on tehty virhe, koska jakajana olevan lausekkeen arvo on nolla, sillä vaiheesta A nähdään, että  $a + b - c = 0$ . Nollalla ei saa jakaa.

- 95A. a)** Esimerkiksi yhtälöryhmällä  $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = 3x \end{cases}$  on vain yksi ratkaisu. Ratkaistaan

ensin yhtälöryhmän kahden ensimmäisen yhtälön muodostama yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ x = 2x \\ -x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Sijoitetaan  $x = 0$  yhtälöryhmän ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan  $y = 0$ . Sijoittamalla  $x = 0, y = 0$  yhtälöryhmän viimeiseen yhtälöön huomataan, että se toteutuu, joten yhtälöryhmän ainoa ratkaisu on  $x = 0$  ja  $y = 0$ .

Vastaus: esim.  $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = 3x \end{cases}$

- b)** Esimerkiksi yhtälöryhmällä  $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = x + 1 \end{cases}$  ei ole ratkaisua. Kahden

ensimmäisen yhtälön muodostaman yhtälöparin ratkaisu on a-kohdan perusteella  $x = 0$  ja  $y = 0$ .

Sijoittamalla  $x = 0, y = 0$  yhtälöryhmän viimeiseen yhtälöön huomataan, että se ei toteudu, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Vastaus: esim.  $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = x + 1 \end{cases}$

c) Kohta a:

Yhtälöryhmä, jolla on yksi ratkaisu, tarkoittaa graafisesti sitä, että yhtälöryhmän suorilla on täsmälleen yksi sellainen piste, jonka kautta kaikki kolme suoraa kulkevat.

Kohta b:

Yhtälöryhmä, jolla ei ole ratkaisua, tarkoittaa graafisesti sitä, että kaikki yhtälöryhmän suorat eivät leikkaa samassa pisteessä.

Kohdan b yhtälöryhmän kahden ylimmän suoran leikkauspiste on piste  $(0, 0)$ . Ylin suora ja alin suora eivät leikkaa toisiaan laisinkaan, koska ne ovat yhdensuuntaiset.

Vastaus: a-kohta: kaikilla kolmella suoralla on yhteinen leikkauspiste, b-kohta: kaikilla kolmella suoralla ei ole yhteistä leikkauspistettä

96A. a) Ratkaistaan yhtälöryhmä 
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y + z = 5 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} .$$

Kahdesta alimmasta yhtälöstä saadaan eliminoitua muuttujat  $x$  ja  $z$  ja ratkaistua muuttuja  $y$ .

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y + z = 5 & \| \cdot (-1) \\ x - 2y + z = 8 \\ -x - y - z = -5 \\ \hline x - 2y + z = 8 \end{cases} \\ -3y = 3 \quad \| : (-3) \\ y = -1 \end{array}$$

Sijoitetaan saatu muuttujan  $y$  arvo ylimpään yhtälöön, jolloin saadaan  $x - (-1) = 3$   
 $x = 2.$

Sijoitetaan  $x = 2$  ja  $y = -1$  keskimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan  $2 - 1 + z = 5$   
 $z = 4.$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \\ z = 4 \end{cases}$$

Vastaus: 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases}$$

b) Ratkaistaan yhtälöryhmä 
$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 \\ 10x - 6y - 5z = -6 \\ -7x + 2y + 5z = 5 \end{cases}$$

Eliminoidaan toisesta ja kolmannelta yhtälöstä muuttuja  $z$ .

$$\begin{cases} 10x - 6y - 5z = -6 \\ -7x + 2y + 5z = 5 \end{cases}$$


---


$$\begin{matrix} 10x - 6y & & = -6 \\ -7x + 2y & & = 5 \\ \hline 3x - 4y & & = -1 \end{matrix}$$

Eliminoidaan ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä muuttuja  $z$ .

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 & \parallel \cdot 5 \\ 10x - 6y - 5z = -6 & \parallel \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 15y - 10z = 5 \\ -20x + 12y + 10z = 12 \end{cases}$$


---


$$\begin{matrix} 10x + 15y - 10z & = & 5 \\ -20x + 12y + 10z & = & 12 \\ \hline -10x + 27y & = & 17 \end{matrix}$$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan siitä muuttujat  $x$  ja  $y$ .

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 & \parallel \cdot 10 \\ -10x + 27y = 17 & \parallel \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30x - 40y = -10 \\ -30x + 81y = 51 \end{cases}$$


---


$$\begin{matrix} 30x - 40y & = & -10 \\ -30x + 81y & = & 51 \\ \hline 41y & = & 41 \\ y & = & 1 \end{matrix} \quad \parallel : 41$$

Sijoitetaan  $y = 1$  yhtälöön  $3x - 4y = -1$ , jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 3x - 4 \cdot 1 &= -1 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan  $x = 1$  ja  $y = 1$  ylimpään yhtälöön, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2z &= 1 \\ 5 - 2z &= 1 \\ -2z &= -4 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ .

Vastaus:  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

**97B.** Merkitään pienempää luonnollista lukua kirjaimella  $x$ . Seuraava luonnollinen luku on  $x + 1$ .

Muodostetaan lukujen neliöiden erotusten avulla yhtälö ja ratkaistaan ohjelman avulla siitä luku  $x$ .

$$(x+1)^2 - x^2 = 681$$

1	Ratkaise((x+1) <sup>2</sup> -x <sup>2</sup> =681)
○	→ {x = 340}

Luvut ovat 340 ja  $340 + 1 = 341$ .

Vastaus: 340 ja 341

**98B.** Muokataan yhtälöä.

$$a(x+1)^2 = x^2 + 1$$

$$a(x+1)(x+1) = x^2 + 1$$

$$a(x^2 + 2x + 1) = x^2 + 1$$

$$ax^2 + 2ax + a - x^2 - 1 = 0$$

$$ax^2 - x^2 + 2ax + a - 1 = 0$$

$$(a-1)x^2 + 2ax + a - 1 = 0$$

Toisen asteen yhtälöllä täsmälleen yksi juuri silloin, kun diskriminantti  $D = 0$ . Muodostetaan diskriminantin avulla yhtälö ja ratkaistaan ohjelman avulla siitä  $a$ .

$$D = b^2 - 4ac$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(2a)^2 - 4(a-1)(a-1) = 0$$

1	Ratkaise((2a)^2-4(a-1)(a-1)=0, a)
○	→ $\left\{ \mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \right\}$

Vastaus:  $a = \frac{1}{2}$

- 99A. a)** Yhtälön ratkaiseminen on aloitettu jakamalla yhtälö puolittain luvulla 2, jolloin on saatu välivaihe (F).  
 Vaiheen (F) jälkeen yhtälöstä on vähennetty puolittain termi  $x^2$ , jolloin on saatu välivaihe (C).  
 Vaiheen (C) jälkeen on avattu sulkeet, jolloin on saatu välivaihe (E).  
 Vaiheen (E) jälkeen yhtälöön on lisätty puolittain lauseke  $-4 - x$ , jolloin on saatu välivaihe (D).  
 Vaiheen (D) jälkeen on yhdistetty samanmuotoiset termit ja käännetty yhtälö ympäri, jolloin on saatu välivaihe (B).  
 Vaiheen (B) jälkeen on yhtälö jaettu puolittain luvulla  $-3$ , jolloin on saatu yhtälön ratkaisu (G).

Vastaus:

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6	7
Välivaihe	A	F	C	E	D	B	G

- b)** Yhtälön ratkaiseminen on aloitettu vaihtamalla yhtälön puolet keskenään. Tämän jälkeen on siirretty termit  $4x$  ja  $8$  puolelta toiselle, jolloin on saatu välivaihe (B).  
 Vaiheen (B) jälkeen yhtälöön on lisätty puolittain luku 4, jolloin on saatu välivaihe (E).  
 Vaiheen (E) jälkeen polynomi  $x^2 - 4x + 4$  on muutettu muotoon  $(x - 2)^2$  ja luku 16 on muutettu potenssiksi  $4^2$ , jolloin on saatu välivaihe (F).  
 Vaiheen (F) jälkeen on otettu neliöjuuri, jolloin on saatu välivaihe (D).  
 Vaiheen (D) jälkeen on yhtälöön lisätty puolittain luku 2, jolloin on saatu yhtälön ratkaisu (G).  
 Huomataan, että välivaihe (C) ei kuulu tämän yhtälön ratkaisuun.

Vastaus:

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6
Välivaihe	A	B	E	F	D	G



**100A.** Koska  $T = -\lg p$  eli  $T = -\log_{10} p$ , niin  $p = 10^{-T}$ .

- a) Alkoholinkäytöstä johtuvan kuoleman todennäköisyys on  
 $p = 10^{-3,8} = 0,000158\dots$

Tapaturmaisen kuoleman todennäköisyys on

$$p = 10^{-3,4} = 0,000398\dots$$

Tapaturmaisen kuoleman todennäköisyys on suurempi.

Vastaus: tapaturmaisen kuoleman

- b) Tielikenteessä loukkaantumisen todennäköisyys on

$$p = 10^{-3,2} = 0,000630\dots$$

Suomalaisia on noin 5,4 miljoonaa, joten suomalaisia loukkaantuu keskimäärin tielikenteessä vuosittain

$$0,000630\dots \cdot 5\,400\,000 = 3407,169\dots \approx 3400.$$

Vastaus: 3400

**101A. a)**

$$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0 \quad \parallel \cdot 2$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$= \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{tai} \quad t = \frac{5-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Vastaus:  $t = 2$  tai  $t = \frac{1}{2}$

**b) TAPA 1:**

Yhtälö  $[f(x)]^2 - \frac{5}{2}f(x) + 1 = 0$ , on sama kuin a-kohdan yhtälö, mutta nyt muuttujan  $t$  paikalla on funktio  $f(x)$ .

Kuvassa olevan suoran yhtälö on  $y = \frac{1}{2}x + 1$ , joten  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ .

Kohdassa a yhtälön ratkaisuksi saatiin  $t = 2$  ja  $t = \frac{1}{2}$ .

Nyt  $t = f(x)$ , joten muuttuja  $x$  saadaan ratkaistua yhtälöistä

$$f(x) = 2 \text{ ja } f(x) = \frac{1}{2}.$$

Ratkaistaan yhtälöt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + 1 &= 2 \\ \frac{1}{2}x &= 1 && \parallel \cdot 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + 1 &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x &= -\frac{1}{2} && \parallel \cdot 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

## TAPA 2:

Kuvassa olevan suoran yhtälö on  $y = \frac{1}{2}x + 1$ , joten  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ .

Sijoitetaan  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$  yhtälöön  $[f(x)]^2 - \frac{5}{2}f(x) + 1 = 0$ , jolloin saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 1 = 0 \\ \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 1 &= 0 \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + 1 - \frac{5}{4}x - \frac{5}{2} + 1 &= 0 \quad \parallel \cdot 4 \\ x^2 + 2x + 2x + 4 - 5x - 10 + 4 &= 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ x &= \frac{1 \pm 3}{2} \\ x &= \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1+3}{2} = 2 \end{aligned}$$

Vastaus:  $x = 2$  tai  $x = -1$