

FY5 Jaksollinen liike ja aallot, koe1

5.9.2018

1.

$$\text{a) } 48^\circ = 48^\circ \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \text{ rad} = 0,8377 \dots \text{ rad} \approx 0,84 \text{ rad}$$

$$\text{b) } \frac{3\pi}{2} \text{ rad} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 270^\circ$$

c) Kulmanopeudeksi saadaan

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \text{ rad} \cdot 6,5 \text{ 1/s} = 40,840 \dots \text{ rad/s.}$$

Joten ratanopeudeksi saadaan

$$v = \omega r = 40,840 \dots \text{ rad/s} \cdot 6,7 \text{ m} = 273,6327 \dots \text{ m/s} \approx 270 \text{ m/s.}$$

Vastaus: 270 m/s

d) Kiertokulma minuutissa

$$\varphi = \omega t = 13 \text{ rad/s} \cdot 60 \text{ s} = 780 \text{ rad.}$$

Yksi kierros on 2π rad, joten

$$\frac{780 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = 124,14085 \dots \approx 124$$

Vastaus: 124 kierrosta

2. Ympyräradalla keskihakuvoimana on gravitaatiovoima, joka aiheuttaa normaalikiikhtyvyyden. Newtonin toisen lain mukaan:

$$F = ma_n$$

$$\gamma \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$\gamma \frac{Mm}{r^2} = m \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}$$

$$\gamma \frac{Mm}{r^2} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \quad ||: m, \quad \text{kerrotaan ristiin}$$

$$4\pi^2 r^3 = \gamma MT^2 \quad ||: \gamma T^2$$

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (23\,460\,000\text{ m})^3}{6,6742 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot (109\,080\text{ s})^2}$$

$$= 6,418806 \dots \cdot 10^{23} \text{ kg} \approx 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

Vastaus: Marsin massa on $6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$.

3. Esimerkki 4 kirjan sivulta 57.

4. a) Ympyräradalla autoon vaikuttavan voiman suuruus on

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{1200 \text{ kg} \cdot \left(\frac{18}{3,6} \text{ m/s}\right)^2}{22 \text{ m}} = 1363,636 \dots \text{ N} \approx 1,4 \text{ kN}$$

Vastaus: 1,4 kN

b) Auto pysyy ympyräradalla kitkan ansiosta. Newtonin II lain mukaan on

$\sum \vec{F} = m\vec{a}_n$ eli $\vec{F}_\mu = m\vec{a}_n$, jossa kitkan suuruus on $F_\mu = \mu mg$ ja normaalikiih-

tyvyyden suuruus $a_n = \frac{v^2}{r}$. Yhtälöstä $\mu mg = m \frac{v^2}{r}$ saadaan kitkakertoimeksi

$$\mu = \frac{v^2}{gr} = \frac{\left(\frac{18}{3,6} \text{ m/s}\right)^2}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 22 \text{ m}} = 0,11583 \dots \approx 0,12$$

Riittävän suuri kitkakerroin auton pitämiseksi ympyräradalla on siis 0,12. Jos kitkakerroin on 0,20, auto pysyy ympyräradalla.

Vastaus: Pysyy

5. Annetusta lausekkeesta saadaan

$$\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = \frac{g_h}{g}$$

ja $\frac{g_h}{g} = 36\% = 0,36$. Nyt

$$\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = 0,36 \quad ||\sqrt{\quad}$$

$$\frac{R}{R+h} = \sqrt{0,36}$$

$$\frac{R}{R+h} = 0,6 \quad || \cdot (R+h)$$

$$R = 0,6(R+h)$$

$$R = 0,6R + 0,6h$$

$$R - 0,6R = 0,6h$$

$$h = \frac{R - 0,6R}{0,6} = \frac{0,4R}{0,6} = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3} \cdot 6378 \text{ km} = 4244,666 \dots \text{ km} \approx 4200 \text{ km}$$

Vastaus: 4200 kilometrin korkeudella Maan pinnasta.

6. Keplerin lait

- I. Planeetat liikkuvat ellipsiratoja pitkin. Ratojen toisessa polttopisteessä on aurinko.
- II. Auringosta planeettaan piirretty jana pyyhkäisee yhtä pitkinä aikaväleinä yhtä suuret pinta-alat.
- III. Planeettojen kiertoaikojen T Neliöt ovat verrannolliset niiden ja aurin gon välisten etäisyyksien kuutioihin

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \text{ eli } T^2 = kr^3, \text{ jossa } k \text{ on vakio.}$$