7. Harmoninen värähdysliike

Tehtävä 7.1.

Väitteistä oikein: a), c), d), e)

Väitteistä väärin: b), f)

Korjaukset vääriin väitteisiin:

b) Värähdysliikkeen taajuus kuvaa, kuinka monta kertaa värähdys tapahtuu aikayksikössä. Värähtelyn amplitudi kuvaa värähdysliikkeen laajuutta.

f) Punnuksen nopeus ja siten myös liike-energia on suurimmillaan värähtelijän tasapainoaseman kohdalla.

Tehtävä 7.2

a) Kuvaajasta katsottuna yhden jakson aika on
T = 4,0 sekuntia

b) Värähtelyn taajuus on $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4{,}0\,\text{s}} = 0{,}25\,\text{Hz}.$

c) Amplitudi on maksimi poikkeama tasapainoasemasta.
Kuvaajasta luettuna värähtelyn amplitudi on A = 0,15 m.

Tehtävä 7.3

a) Ääniraudan taajuus on f = 440 Hz eli se tekee 440 värähdysliikettä sekunnissa.

b) Seitsemään värähdykseen kuluu aikaa 2,56 sekuntia. Lasketaan värähdyksen jaksonaika.

$$T = \frac{2{,}56\,\text{s}}{7} = 0{,}3657\,\text{s} \approx 0{,}37\,\text{s}.$$

Värähtelyn taajuus $f = \frac{1}{T} = \frac{7}{2{,}56\,\text{s}} = 2{,}7344\,\text{Hz} \approx 2{,}7\,\text{Hz}.$

c) Harmonisen värähtelijän jaksonaika saadaan yhtälöstä.

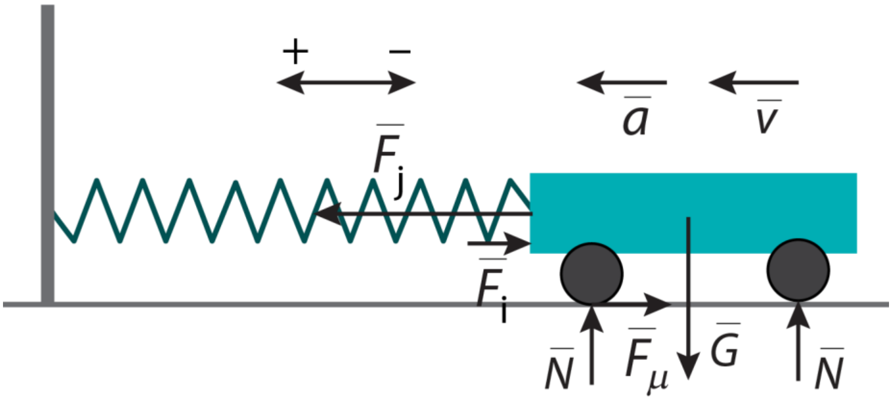
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Värähtelyn taajuus

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{140\,\text{N/m}}{0{,}42\,\text{kg}}} = 2{,}905758\,\text{Hz} \approx 2{,}9\ \text{Hz}.$$

Tehtävä 7.4

a)



$\overline{N}$ = pinnan tukivoima

$\overline{G}$ = vaunun paino

$\overline{F}_\mu$ = kitka

$\overline{F}_\mathrm{i}$ = ilmanvastus

$\overline{F}_\mathrm{j}$ = jousivoima

Vaunuun vaikuttaa vaakasuunnassa jousivoima, kitka ja ilmanvastus.

b) Jousen ääriasemassa vastusvoimat voidaan olettaa mitättömiksi. Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = m\bar{a}$.

Valitaan jousivoiman suunta positiiviseksi suunnaksi. Kirjoitetaan liikeyhtälö.

$$F_\mathrm{j} = ma$$
$$-kx = ma$$
$$a = \frac{-kx}{m}$$

Jousen venymän ja vaunun kiihtyvyyden suunnat ovat vastakkaiset.

c) Newtonin II lain mukaan vaunun kiihtyvän liikkeen aiheuttaa jousivoima ja suuruuksia tarkasteltuna $F_\mathrm{j} = ma$. Jousivoima riippuu venymästä x yhtälön $F_\mathrm{j} = kx$ mukaan. Tällöin kiihtyvyyden suuruudelle saadaan

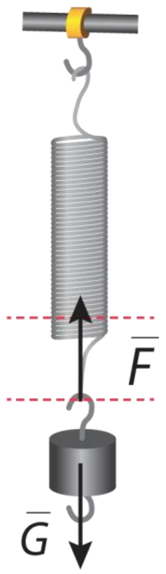
$$a = \frac{kx}{m}.$$

Kiihtyvyys on suoraan verrannollinen venymään tasapainoasemasta. Kiihtyvyys on suurin, kun etäisyys tasapainoasemasta on suurin eli jousen ääriasemassa.

d) Jouseen varastoitunut potentiaalienergia muuntuu vaunun liike-energiaksi ja edelleen jousen potentiaalienergiaksi. Systeemin kokonaisenergia vuorottelee loputtomasti näiden kahden energialajin välillä eikä muunnu muiksi energialajeiksi, jos vastusvoimia ei ole.

Tehtävä 7.5

a)

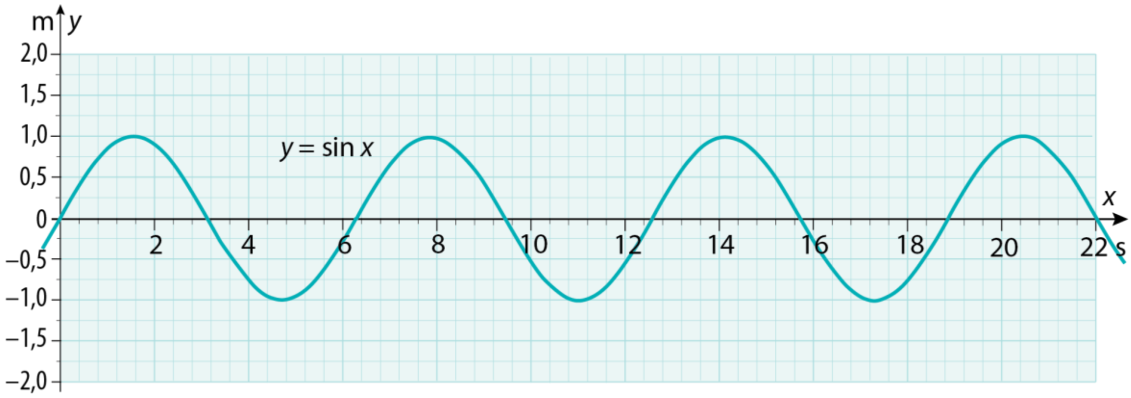


Punnukseen vaikuttaa painovoima $\overline{G}$ ja jousivoima $\overline{F}$.

b) Newtonin II lain mukaisesti $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Punnus on paikallaan, joten siihen vaikuttavien voimien summa on nolla ja kiihtyvyys on nolla. Valitaan jousivoiman suunta positiiviseksi suunnaksi. Liikeyhtälö on $F_j - G = 0$.

Tehtävä 7.6

a)



Sinifunktio voi saada arvoja välillä [−1, 1] eli jos pystyakselin yksikkö on metri, niin arvot ovat välillä [−1 m, 1 m].

b) Kuvaajasta luettuna amplitudin suuruus on A = 1,0 m.

c) Kuvaajasta luettuna aikavälillä 0–22 sekuntia on 3,5 jaksoa. Jaksonaika on siis $T = \frac{22\,\text{s}}{3,5} = 6,2857\,\text{s} \approx 6,3\,\text{s}.$

d) Värähtelyn taajuus on $f = \frac{1}{T} = \frac{3,5}{22\,\text{s}} = 0,1591\,\text{Hz} \approx 0,16\,\text{Hz}.$

Tehtävä 7.7.

a) Resonanssi havaitaan, jos ulkoinen voima vaikuttaa kappaleeseen kappaleen ominaistaajuuksilla.

b) Resonanssissa kappaleen värähtelyn amplitudi kasvaa.

c) Esimerkiksi kävelysillat saattavat resonoida tuulen tai sillalla kävelevien ihmisten takia. Jos ulkoinen voima vaikuttaa sillan ominaistaajuudella, sillan värähtelyn laajuus eli amplitudi kasvaa.

Tehtävä 7.8.

a) Punnuksen liike-energia on suurimmillaan silloin, kun punnuksen nopeus on suurin. Punnuksen nopeus on suurin systeemin tasapainoasemassa. Tasapainoasemassa punnuksen kiihtyvyys on nolla, koska vaikuttavien voimien summa on nolla. Nopeus kasvaa siis tasapainoasemaan asti, jonka jälkeen se alkaa pienentyä.

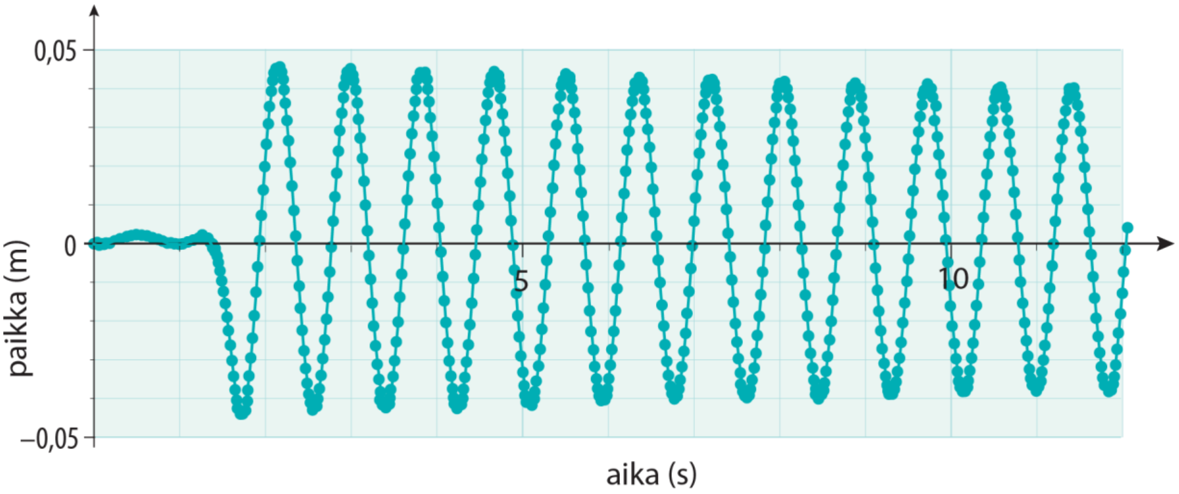
b) Punnuksen potentiaalienergia on suurimmillaan värähtelyn ääriasemassa, jolloin punnus-jousisysteemin energia on potentiaalienergiaa.

c) Jos vastusvoimia ei oteta huomioon, punnuksen kokonaisenergia on koko ajan yhtä suuri. Jos taas systeemin vastusvoimat otetaan huomioon, kokonaisenergia on suurimmillaan heti värähdysliikkeen alussa.

Tehtävä 7.9.

punnuksen massa m = 0,250 kg

a)



b) Kuvaajasta luettuna 12,5 jaksoon kuluu aikaa 10,64 s.

Jaksonaika on $T = \dfrac{10{,}64\text{ s}}{12{,}5} = 0{,}8512\,\text{s} \approx 0{,}85\,\text{s}.$

c) Kuvaajasta luettuna värähtelyn amplitudi alussa on A = 4,5 cm.

d) Lasketaan jousen jousivakion arvo harmonisen värähtelijän jaksonajan avulla.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$$

$$k = 4\pi^2\frac{m}{T^2} = 4\pi^2\cdot\frac{0{,}250\,\text{kg}}{(0{,}8512\,\text{s})^2} = 13{,}621\,86\,\text{N/m} \approx 14\,\text{N/m}.$$

Tehtävä 7.10

Tasapainoasemastaan poikkeutettu kappale päätyy harmoniseen värähdysliikkeeseen, jos kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on harmoninen. Kokonaisvoima on harmoninen, jos voiman suunta on aina kohti tasapainoasemaa ja voiman suuruus on suoraan verrannollinen etäisyyteen tasapainoasemasta.

Esimerkiksi trampoliinin päällä seisovaan lapseen kohdistuu harmoninen voima, joten trampoliinin ja lapsen muodostamaa systeemiä voidaan pitää harmonisena värähtelijänä. Myös esimerkiksi kitaran värähtelevä kieli on harmoninen värähtelijä.

Tehtävä 7.11

kuminauhan pituus alussa l_1 = 17,0 cm
kuminauhan pituus taskulampun kanssa l_2 = 31,4 cm
kuminauhan venymä
$x = l_2 - l_1$ = 31,4 cm - 17,0 cm = 14,4 cm
taskulampun massa m = 0,202 kg

a) Tasapainoasemassa taskulamppuun vaikuttavien voimien summa on nolla eli $\sum \bar{F} = 0$.

Valitaan jousivoiman suunta positiiviseksi suunnaksi ja lasketaan kuminauhan jousivakio.

$$F - G = 0$$
$$kx = mg$$
$$k = \frac{mg}{x} = \frac{0{,}202\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}144\,\text{m}} = 13{,}76125\,\text{N/m}$$

Taskulampun ja kuminauhan systeemiä voidaan pitää harmonisena värähtelijänä. Lasketaan harmonisen värähtelyn taajuus.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{m}g}{x\cancel{m}}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}144\,\text{m}}} = 1{,}3136\,\text{Hz} \approx 1{,}31\,\text{Hz}.$$

b) Harmonisen värähtelyn taajuus ja jaksonaika ei riipu amplitudista. Taajuuden yhtälön mukaan taajuuteen vaikuttavia suureita ovat jousen jousivakio ja punnuksen massa.

Tehtävä 7.12

punnuksen massa m = 0,560 kg
kahdeksaan värähdykseen kuluva aika t = 11,2 s

a) Värähtelyn jaksonaika $T = \dfrac{11{,}2\,\mathrm{s}}{8} = 1{,}4\,\mathrm{s}.$

b) Jousen jousivakio voidaan määrittää harmonisen värähtelijän jaksonajan yhtälöstä.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$$

$$k = 4\pi^2\frac{m}{T^2} = 4\pi^2\frac{0{,}560\,\mathrm{kg}}{(1{,}4\,\mathrm{s})^2} = 11{,}27954\,\mathrm{N/m} \approx 11\,\mathrm{N/m}.$$

c) Jousivoiman suuruus on $F_{\text{j}} = kx$. Newtonin II lain mukaisesti $\sum \bar{F} = m\bar{a}$. Punnus on paikallaan, joten siihen vaikuttavien voimien summa on nolla ja kiihtyvyys on nolla. Valitaan jousivoiman suunta positiiviseksi suunnaksi. Kirjoitetaan liikeyhtälö ja ratkaistaan venymä.

$$F_{\text{j}} - G = 0$$

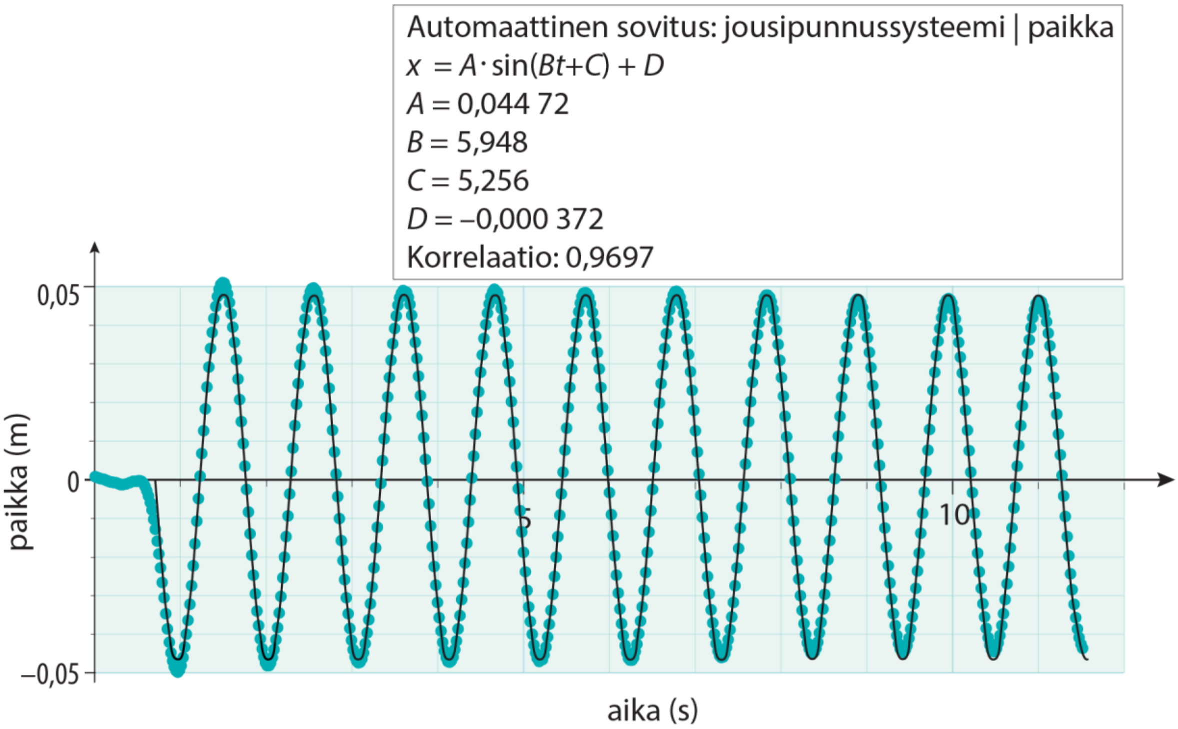
$$kx = mg$$

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{0{,}560\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{11{,}27954\,\frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0{,}48704114\,\text{m} \approx 49\,\text{cm}$$

Jousi lyhenee 49 cm.

Tehtävä 7.13

a)



b) sovitefunktio $x(t) = A \sin(Bt + C) + D$.

Vakioiden arvot sovitekuvaajan tiedoista

A = 0,04472

B = 5,948

C = 5,256

D = -0,0003722

c) Sovitefunktion parametreista A kuvaa amplitudia, joten amplitudin suuruus on 4,472 cm ≈ 4,5 cm.

Taajuutta kuvaa parametri B. Sinifunktion riippuvuus ajasta on ilmoitettu muodossa $x(t) = A \sin(2\pi ft)$.

$$B = 2\pi f$$

$$f = \frac{B}{2\pi} = \frac{5{,}948\,1/\mathrm{s}}{2\pi} = 0{,}94665\,\mathrm{Hz} \approx 0{,}95\,\mathrm{Hz}.$$

Tehtävä 7.14

a) Punnuksen massa vaikuttaa värähdysaikaan. Mitä suurempi punnuksen massa on, sitä pidempi on jaksonaika. Jaksonaika noudattaa yhtälöä $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Mitä suurempi punnuksen massa on, sitä pidempi on jaksonaika.

b) Värähtelyn amplitudi ei vaikuta taajuuteen, sillä värähtelijän jaksonaikaan vaikuttaa a-kohdan yhtälön mukaan vain punnuksen massa ja jousivakio.

Tehtävä 7.15

a) Kuminauhan varassa värähtelevän punnuksen jaksonaika noudattaa harmonisen värähtelijän yhtälöä.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

$$k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}.$$

Kun yhtälöön sijoitetaan mittauksissa saadut arvot *m* ja *T*, jousivakiolle saadaan arvo.

b) Punnuksen massa ei vaikuta jousivakion arvoon. Tuloksista pitäisi tulla mittaustarkkuuden rajoissa samat.

c) Jousivakion suuruus riippuu punnuksen massasta sekä värähtelijän jaksonajasta. Punnitus on helppo suorittaa. Tarkkuus on käytännössä vaa'an tarkkuus. Jaksonajan mittaamisessa tulee helposti virhettä. Esimerkiksi mittaajan reaktioaika sekä tulkinta ääriaseman kohdasta vaikuttavat tulokseen. Virhettä voi pienentää mittaamalla esimerkiksi kymmeneen värähdykseen kulunut aika ja jakamalla saatu tulos kymmenellä. Tällä keinolla jaksonajan virhe pienenee kymmenesosaan. Virhettä aiheuttaa myös kuminauhan oma massa sekä se, että kuminauhaa voi mallintaa jousena vain pienillä venymillä.

Tehtävä 7.17

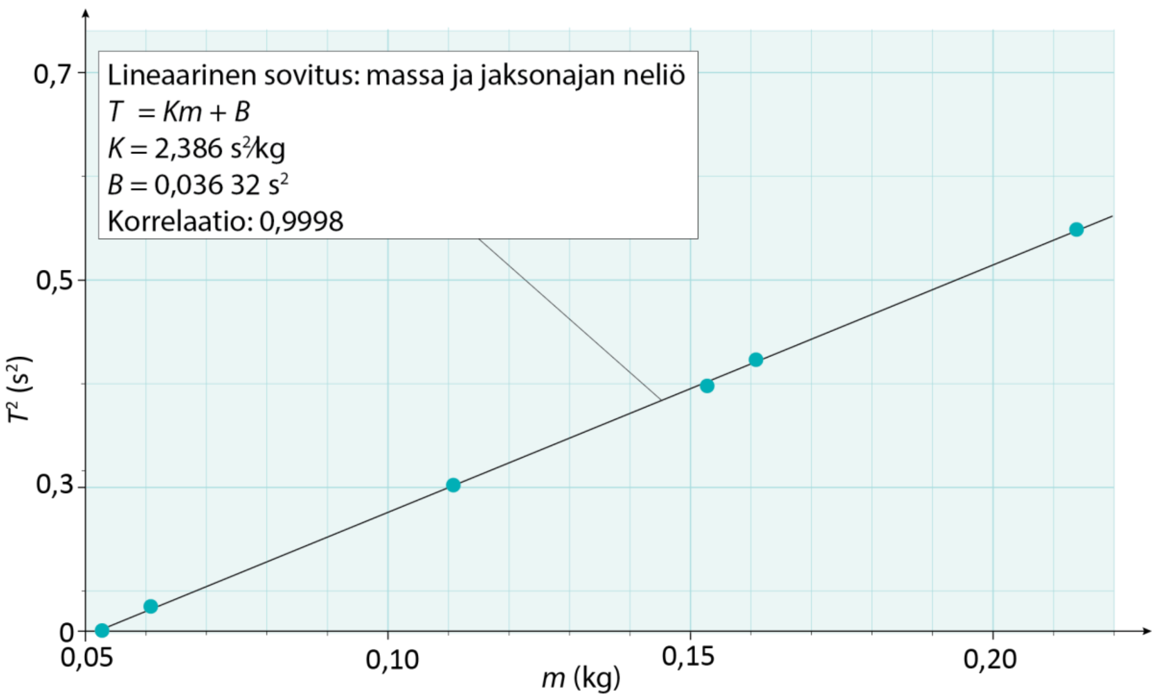
a) Jousen värähtely noudattaa harmonisen värähtelyn yhtälöä.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m.$$

Esitetään värähdysajan neliö massan funktiona.



Kuvaajasta nähdään, että jaksonajan neliö ja punnuksien massa ovat suoraan verrannollisia. Suoran fysikaalinen kulmakerroin on $\frac{4\pi^2}{k} = 2{,}386\frac{\text{s}^2}{\text{kg}}$.

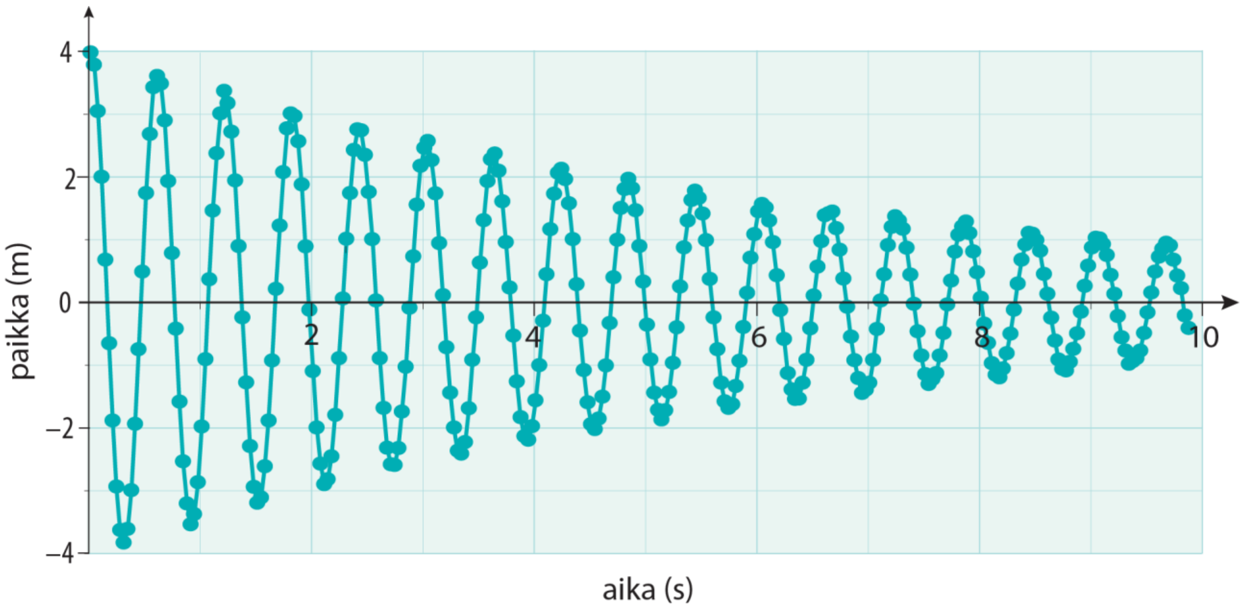
b) Värähdysajan neliö on suoraan verrannollinen punnuksen massaan. Lasketaan suoran fysikaalisen kulmakertoimen avulla jousivakion arvo. a-kohdassa määritetyn tuloksen mukaan jousivakioksi saadaan

$$k = \frac{4\pi^2}{2{,}386\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}} = 16{,}5458\ \mathrm{/m} \approx 17\,\mathrm{N/m}.$$

c) Mittaustarkkuuteen vaikuttaa jousen oma massa sekä värähdysaika. Mittaustarkkuutta parantaa useampi mittaus usealla eri punnuksen massan arvolla. Värähdyksen jaksonaika saadaan tarkemmaksi, kun mitataan esimerkiksi kymmeneen värähdykseen kulunut aika ja jaetaan tulos kymmenellä. Mitä suuremmilla massoilla mitataan, sitä pidempi on jaksonaika ja sitä pienempi virhe tulee ajan mittaukseen. Myös isompien massojen käyttö pienentää massan mittauksen virhettä.

Tehtävä 7.18.

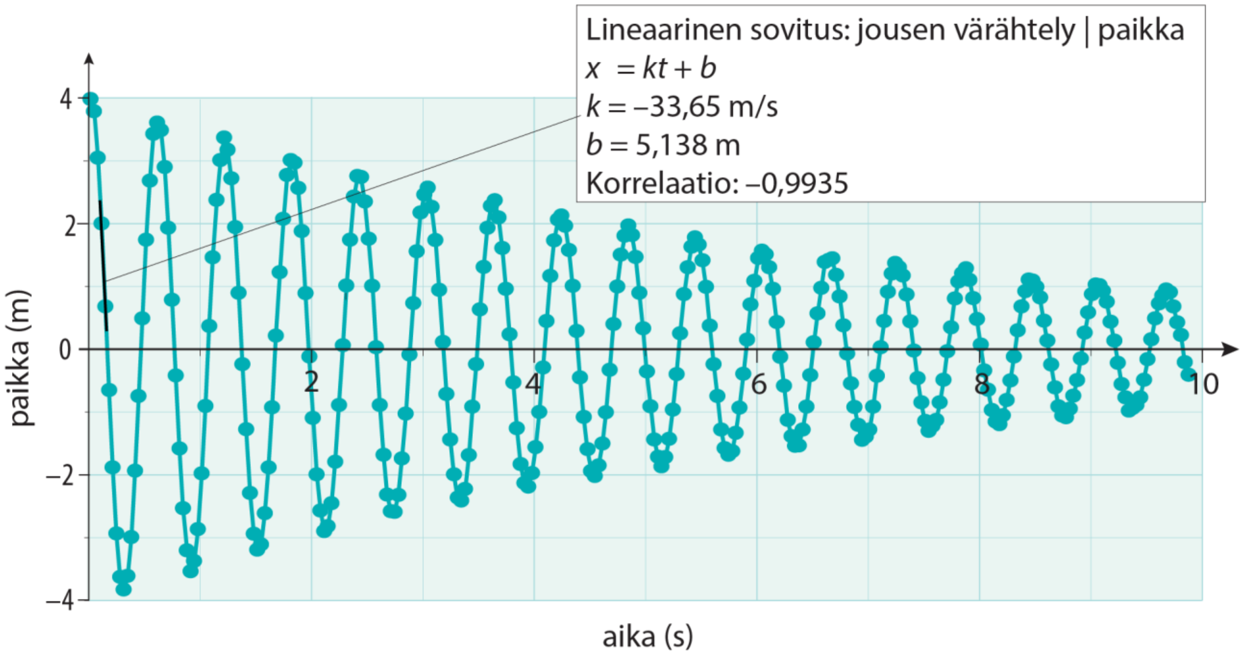
a)



b) Värähtelyyn liittyvistä suureista muuttuu vain amplitudi. Taajuus ja jaksonaika eivät muutu.

c) Pahvinpalalla on suurin kiihtyvyys ääriasemissa, koska jousen jousivoima on silloin suurin. Pahvinpalan kiihtyvyys on suurin heti värähtelyn alussa, koska värähtelyn amplitudi on silloin suurin. Värähtelyn jaksonaika ei muutu värähtelyn aikana. Koska pahvinpalan nopeus värähtelyn alussa on suurempi kuin värähtelyn lopussa, on kiihtyvyys suurin heti värähtelyn alussa.

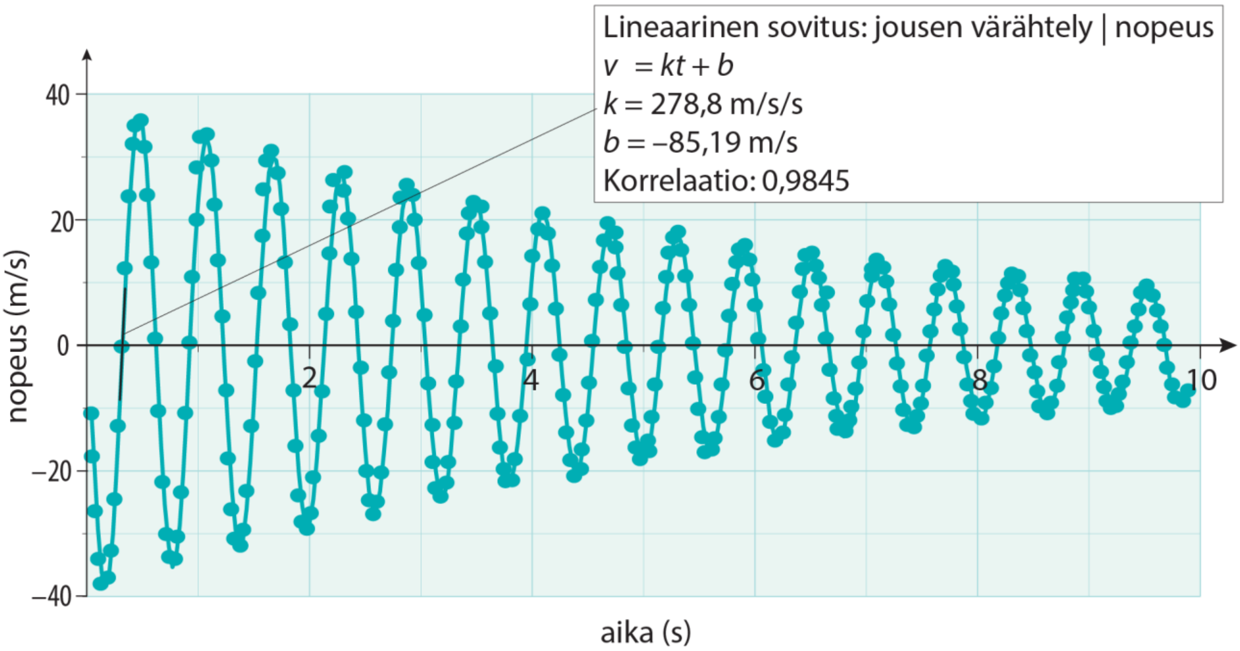
d) Punnuksen suurin nopeus saadaan kuvaajan tangentin kulmakertoimesta. Punnuksen nopeus on suurin tasapainoaseman kohdalla.



Suurin nopeus kuvaajan mukaan on

v_{max} = 33,65 m/s ≈ 33,7 m/s

Kiihtyvyyden määrittämiseksi määritetään nopeuden kuvaaja derivoimalla paikan kuvaaja ajan suhteen.



Nopeuden kuvaajan tangentin kulmakerroin kertoo punnuksen kiihtyvyyden. Suurin kiihtyvyys punnuksella on heti värähtelyn alussa. Nopeuden kuvaajasta suurimmaksi kiihtyvyyden arvoksi saadaan a_{max} = 278 m/s^2.

Tehtävä 7.19.

kappaleen massa m_A = 250 g = 0,250 kg
vaunun massa m_{vaunu} = 250 g = 0,250 kg
jousen jousivakio k = 25 N/m
värähtelyn amplitudi A = 2,2 cm = 0,022 m.

a) Punnuksen, vaunun ja jousen muodostaman systeemin mekaaninen energia säilyy, kun systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia. Tämä edellyttää esimerkiksi sitä, että kitka ja ilmanvastus eivät vaikuta vaunun liikkeeseen ja sitä että jousen muoto palautuu värähdysliikkeessä ilman häviöitä.

b) Jotta punnus ei liiku vaunun pinnalla, lepokitkan pitää olla riittävän suuri. Jousen kohdistama voima kappaleeseen on suurimmillaan ääriasennoissa eli kun amplitudi on 2,2 cm. Tällöin jousi kohdistaa punnukseen voiman, jonka suunta on kohti tasapainoasemaa ja suuruus on

$$F_{\mathrm{j}} = kx = kA = 25\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}022\,\mathrm{m} = 0{,}55\,\mathrm{N}.$$

Jotta punnus ei liiku vaunun päällä, lepokitkan olla vähintään jousen kohdistaman voiman suuruinen. Näin ollen lepokitka on $F_{\mu 0} \geq 0{,}55$ N.

c) Värähtelevän systeemin mekaaninen kokonaisenergia saadaan alkutilanteessa jouseen varastoituneesta potentiaalienergiasta.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 25\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0{,}022\,\text{m})^2 = 6{,}05 \cdot 10^{-3}\ \text{J} \approx 6{,}1\,\text{mJ}.$$

Oletuksen mukaan mekaaninen energia säilyy. Kun punnus ja vaunu liikkuvat kohti tasapainoasemaa, osa jouseen sitoutuneesta potentiaalienergiasta muuntuu punnuksen ja vaunun yhteiseksi liike-energiaksi. Tasapainoaseman kohdalla mekaaninen energia on kokonaan liike-energiaa, jolloin liike-energian suuruus on sama kuin alkutilaan potentiaalienergia 6,1 mJ.

Tehtävä 7.20.

a) Hooken lain mukaan venymä on $\varepsilon = \sigma/E$, jossa σ on jännitys ja E on kimmokerroin. Timanttikiteen kimmokerroin on teräskiteen kimmokerrointa suurempi, joten jos timanttikiteeseen ja teräskiteeseen kohdistetaan yhtä suuri jännitys, teräksen venymä on suurempi kuin timantin venymä.

b) Kun jännitys on pieni, venymä voidaan määrittää Hooken laililla $\sigma = E\varepsilon$. Kun jännitys poistetaan, $\sigma = 0$, jolloin myös venymä $\varepsilon = 0$. Toisin sanoen kiteet palautuvat alkuperäiseen muotoonsa.

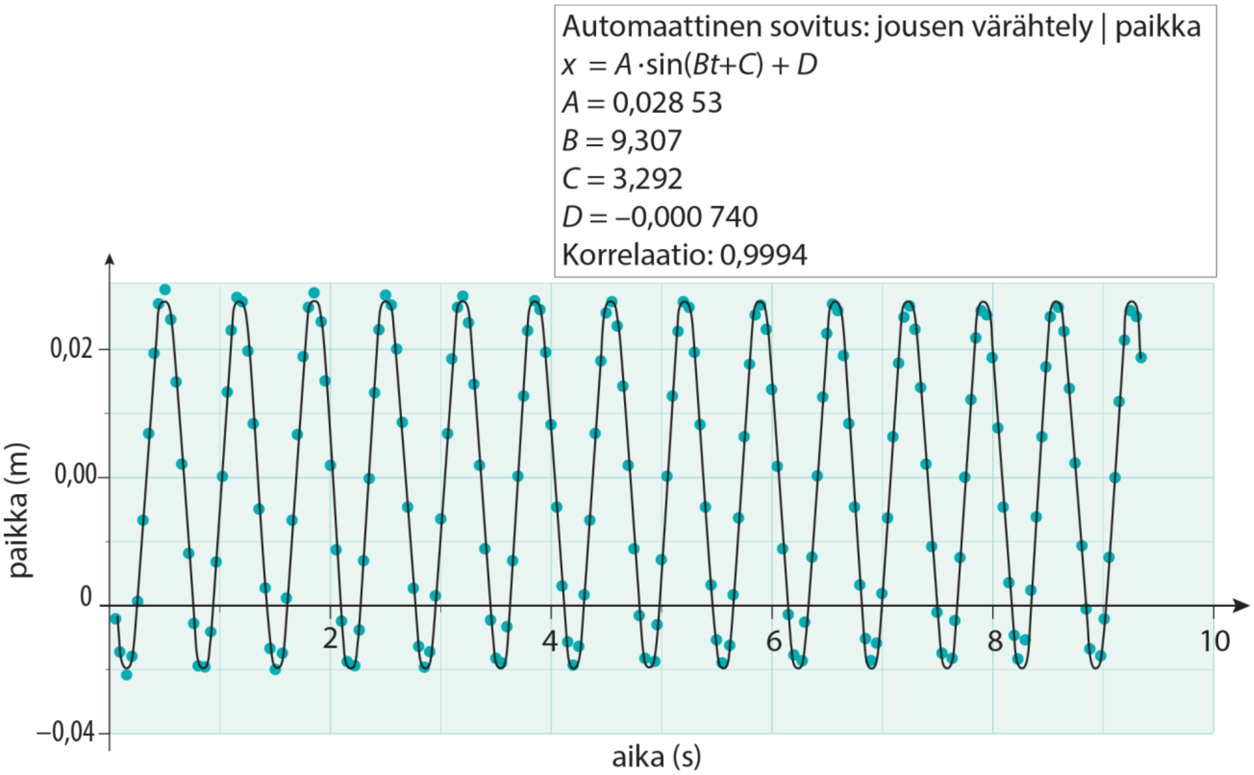
c) Käytetään aineistossa annettua yhtälöä ja määritetään timantin ominaistaajuus.

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Ea}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{950\cdot 10^{9}\ \mathrm{Pa}\cdot 0{,}3567\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}{12\cdot 1{,}660\,539\,040\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}} = 20{,}755\cdot 10^{12}\ \mathrm{Hz} \approx 21\ \mathrm{THz}.$$

d) Edellisen kohdan ratkaisussa käytetään itsenäisen harmonisen värähtelijän mallia, joka ei huomioi atomien välisiä kytkentöjä. Timanttikiteen hiiliatomien välillä on kovalenttiset sidokset, joten mallin antama tulos voi olla erilainen kuin mitattu arvo. Fysikaalista mallia voidaan tarkentaa esimerkiksi tarkastelemalla hiiliatomien jonoa.

Tehtävä 7.21

punnuksen massa m = 0,312 kg



(akselit oikein päin 1 p, mittauspisteet näkyvät 1 p, sovitekuvaaja 1 p) (3 p)

b) Amplitudi on punnuksen suurin poikkeama tasapainoasemasta. (1 p) Kuvaajan perusteella suurin poikkeama on heti värähtelyn alussa ja se on A = 2,9 cm. (1 p, Huom! Jos amplitudin termiä ei ole selitetty, ei pistettä)

Värähtelyn jaksonaika $T = \frac{8{,}79\,\text{s}}{13} = 0{,}6762\,\text{s} \approx 0{,}68\,\text{s}.$ (2 p)

c) Jousen jousivakio voidaan laskea harmonisen värähtelijän jaksonajan yhtälöstä. Määritetään ensin värähdysaika kuvaajasta. Kuvaajasta katsottuna kolmentoista värähdyksen aika *t* = 8,79 s.

Jousivakion arvo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$$ (2 p)

$$k = 4\pi^2\frac{m}{T^2} = 4\pi^2\frac{0{,}312\,\text{kg}}{\left(\frac{8{,}79\,\text{s}}{13}\right)^2} = 26{,}9416\,\text{N/m} \approx 26{,}9\,\text{N/m}.$$

d) Jousen potentiaalienergia on suurimmillaan värähtelyn ääriasemissa. Lasketaan potentiaalienergian määrä heti värähtelyn alussa.

Kuvaajasta mitattuna amplitudin suuruus on 0,029 m.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot 26{,}941\,593\,88\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot(0{,}029\,\text{m})^2 = 11{,}3289\cdot 10^{-3}\,\text{J} \approx 11\,\text{mJ}.$$

(2 p)

e) Jos punnusta vedettäisiin ensin suuremmalla voimalla, olisi jousen venymä suurempi. (1 p) Kun jousi päästettäisiin värähtelemään, olisi värähtelyn amplitudi suurempi. (1 p) Samalla myös punnuksen suurin nopeus, energia ja suurin kiihtyvyys olisivat suurempia. Värähtelyn taajuuteen voima ei vaikuta. (1 p)