6. Harmoninen voima

Tehtävä 6.1.

Oikeat vastaukset:

a) A

b) C

c) B

d) B

e) A

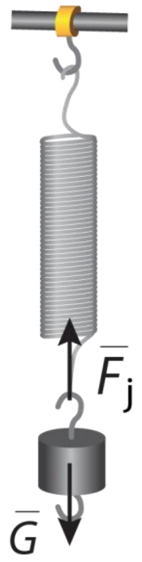
Tehtävä 6.2.

a) Jousia käytetään esimerkiksi auton jousituksessa, kuulakärkikynissä, trampoliineissa ja patjoissa.

b) Jousen pituuden muutos ja jousta venyttävä voima kasvavat samassa suhteessa eli ne ovat suoraan verrannollisia.

Tehtävä 6.3.

Voimakuvio molemmissa kohdissa:



$\overline{F}_j =$ jousivoima

$\overline{G} =$ punnuksen paino

a) jousen venymä x = 4,5 cm = 0,045 m
punnuksen massa m = 50 g = 0,050 kg
punnuksen paino $G = mg$

Kun punnus on paikallaan, tasapainotilanteessa Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Kun suunta alaspäin valitaan positiiviseksi, punnuksen liikeyhtälö on $G - F_j = 0$ eli $G = F_j$ Tästä voidaan edelleen ratkaista jousen jousivakio.

$$mg = kx$$

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{0{,}050\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}045\,\mathrm{m}} = 10{,}9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \approx 11\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Jousen jousivakio on 11 N/m.

b) jousen venymä x = 1,0 cm = 0,010 m

jousivakio k = 200 N/m

Kun punnus on paikallaan, tasapainotilanteessa Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}.$ Kun suunta alaspäin valitaan positiiviseksi, punnuksen liikeyhtälö on $G - F_{\text{j}} = 0$ eli $G = F_{\text{j}}$. Tästä voidaan ratkaista punnuksen massa.

$$mg = kx$$

$$m = \frac{kx}{g} = \frac{200\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}010\,\text{m}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}203\,874\,\text{kg} = 203\,874\text{ g} \approx 200\,\text{g}$$

Punnuksen massa on 200 g.

Tehtävä 6.4.

a) jousen venymä x = 36 cm = 0,36 m
jousivakio k = 125 N/m

Jousen potentiaalienergia on

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot 125\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot(0{,}36\,\mathrm{m})^2 = 8{,}1\ \mathrm{J}.$$

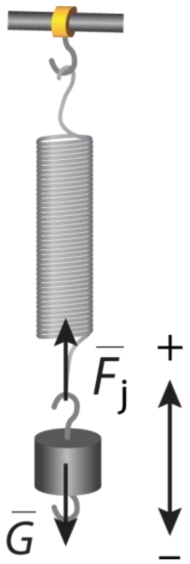
b) Kun kappaletta nostetaan, siihen vaikuttaa koko noston ajan yhtä suuri paino. Nostamiseen tarvittava voima on näin ollen vakio. Jousen venyttämiseen tarvittava voima on yhtä suuri kuin jousen jousivoima. Venyttämiseen tarvittava voima on $F = kx$. Jousen venytyksessä voima on sitä suurempi, mitä pidemmäksi jousi on venytetty.

Tehtävä 6.5.

Harmoninen voima tarkoittaa voimaa, jonka suunta on aina kohti tasapainoasemaa ja jonka suuruus on suoraan verrannollinen tasapainoasemasta mitattuun etäisyyteen.

Tehtävä 6.6.

ripustettava massa m_1 = 0,370 kg
jousen venymä punnuksella x_1 = 0,014 m



$\overline{F}_\mathrm{j} =$ jousivoima
$\overline{G} =$ punnuksen paino

a) jousen venymä hauen tapauksessa x_2 = 0,068 m

Määritetään ensin jousen jousivakio. Kun jouseen ripustetaan punnus, jousi asettuu tasapainotilaan ja Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Kun otetaan suuntasopimus huomioon, niin

$$F_\mathrm{j} - G_1 = 0$$
$$kx_1 = m_1 g.$$

Jousen jousivakioksi saadaan

$$k = \frac{m_1 g}{x_1} \left(= \frac{0{,}370\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}014\,\mathrm{m}} = 259{,}264\,\mathrm{N/m}\right).$$

Kun jouseen ripustettiin hauki, jousi ja hauki asettuivat tasapainoon. Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituna

$$F_{\mathrm{j}} - G_2 = 0$$
$$kx_2 = m_2 g.$$

Hauen massa on

$$m_2 = \frac{kx_2}{g} = \frac{m_1 g x_2}{x_1 g} = \frac{m_1 x_2}{x_1} = \frac{0{,}370\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}068\,\mathrm{m}}{0{,}014\,\mathrm{m}} = 1{,}797\,\mathrm{kg} \approx 1{,}8\,\mathrm{kg}.$$

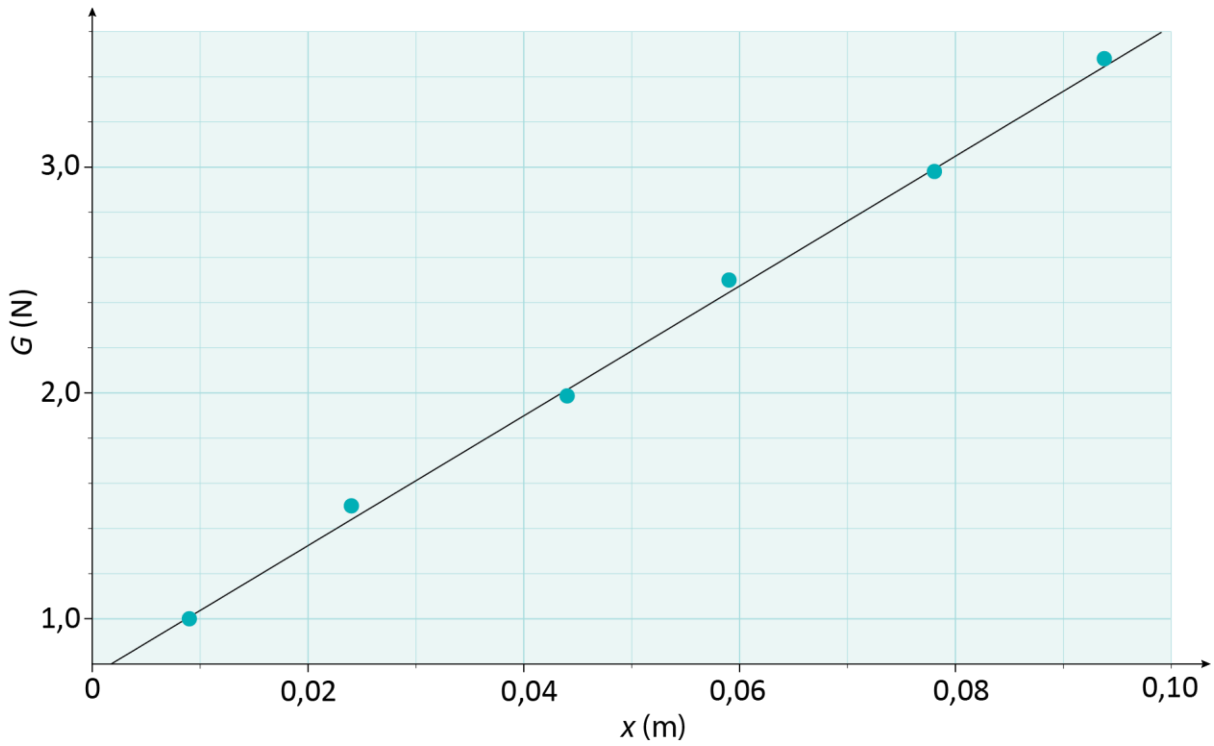
b) ahvenen massa m = 100 g

Lasketaan jousen venymä tasapainotilanteessa. Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituna

$$F_{\mathrm{j}} - G = 0$$
$$kx = mg$$
$$x = \frac{mg}{k} = \frac{0{,}100\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{259{,}264\,\mathrm{N/m}} = 0{,}00378\,\mathrm{m} \approx 3{,}8\,\mathrm{mm}.$$

Tehtävä 6.7.

Esitetään mittaustulokset (x, G)-koordinaatistossa.



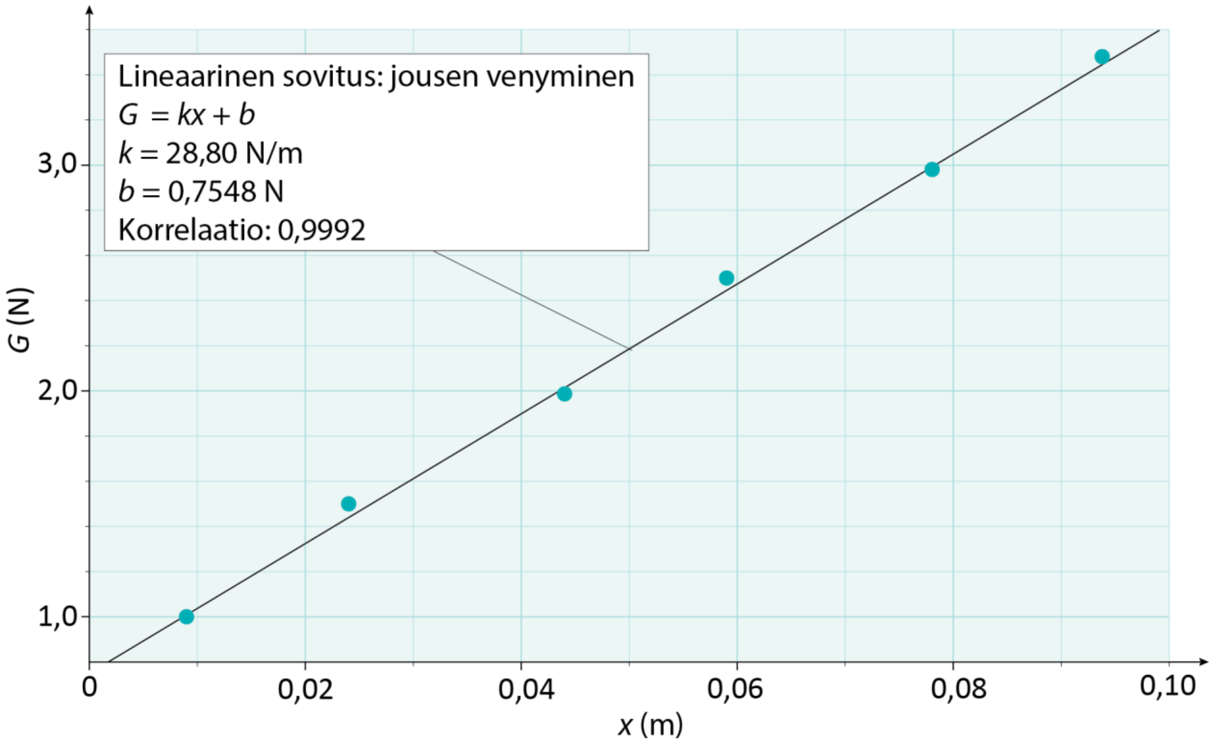
b) Jousivoiman suuruus on $F_j = kx$.

Newtonin II lain mukaan tasapainotilanteessa $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Jousivoima F_j ja punnuksien paino G ovat vastakkaissuuntaisia, joten

$$F_j - G = 0$$
$$G = kx.$$

Jousivakio k saadaan (x, G)-koordinaatiston mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalisena kulmakertoimena k = 28,80 N/m ≈ 29 N/m.



c) Mittauksen jousivoima on $F_{\text{j}} = kx = mg$ eli mittauksen muuttujina on massa ja jousen pituuden muutos. Mittausvirhettä voi aiheutua massan ja pituuden muutoksen mittaamisessa. Massaa voidaan mitata 0,1 gramman tarkkuudella, joten massan mittausten mittausvirhe on melko pieni, sillä massat ovat vaa'an tarkkuuteen nähden noin tuhatkertaiset. Jousen pituuden muutos mittauksessa oli muutaman senttimetrin luokkaa. Pituuden muutos voidaan määrittää metrimitalla, jonka tarkkuus on 1 mm. Tarkkuutta voidaan lisätä mittaamalla työntömitalla, jolloin pituuden muutos saadaan 0,1 mm:n tarkkuudella ja mittausvirhe pienenee kymmenesosaan rullamitalla suoritettuun mittaukseen verrattuna.

Tehtävä 6.8.

jousen pituuden muutos venytyksessä 1 x_1 = 0,033 m
jousen venyttämiseen tarvittava energia E_p = 2,1 J
jousen pituuden muutos venytyksessä 2 x_2 = 0,027 m

Jouseen liittyvän potentiaalienergian avulla saadaan jousen jousivakio

$$E_p = \frac{1}{2}kx_1^{\,2}$$

$$k = \frac{2E_p}{x_1^{\,2}} \left(= \frac{2 \cdot 2{,}1\,\text{J}}{(0{,}033\,\text{m})^2} = 3\,856{,}749\,\text{N/m}\right)$$

Voima, joka tarvitaan venyttämään jousta 2,7 cm, saadaan jousivoiman avulla

$$F_j = kx_2 = \frac{2E_p x_2}{x_1^{\,2}} = \frac{2 \cdot 2{,}1\,\text{J} \cdot 0{,}027\,\text{m}}{(0{,}033\,\text{m})^2} = 104{,}13\,\text{N} \approx 100\,\text{N}.$$

Vastaus: 100 N

Tehtävä 6.9.

a) Jousivoima on yhtä suuri kuin jousta venyttävä voima. Jousi B on jäykempi kuin jousi A, koska yhtä suurilla venymillä jousivoima on suurempi.

b) Jousivoiman suuruus on $F_j = kx$. Jousien kytkeminen rinnakkain kaksinkertaistaa jousivakion suuruuden, sillä yhdelle jouselle jousivakio on $k = \frac{F_j}{x}$ ja kahdelle rinnan kytketylle jouselle $k = \frac{2F_j}{x}$. Jousivakio kuvaa jousen jäykkyyttä, joten jyrkempi suora B kuvaa jäykempää systeemiä eli kahta rinnakkain kytkettyä jousta.

Tehtävä 6.10.

jousen pituus alussa l_1 = 0,187 m
jousen pituus painettuna l_2 = 0,170 m
vaa'an lukema m_1 = 31 kg.

a) Vaa'an pinnan jouseen kohdistama tukivoima saadaan vaa'an lukeman avulla. Vaa'an jouseen kohdistama tukivoima

$$N = G_1 = m_1 g.$$

Kun jousta painetaan vaakaa vasten, on vaa'an pinnan tukivoima yhtä suuri kuin iskuvaimentimen jousivoima

$$F_\text{j} = N$$
$$kx = m_1 g.$$

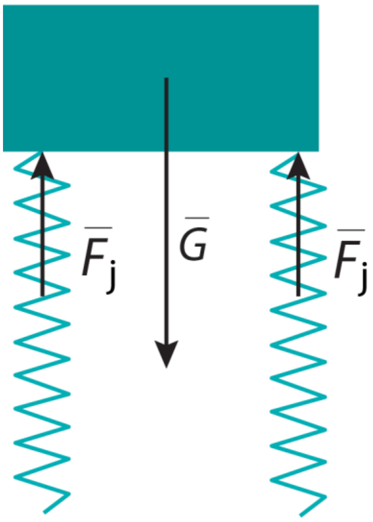
Jousen puristuma on $x = l_1 - l_2 = 0{,}187\,\text{m} - 0{,}17\,\text{m} = 0{,}017\,\text{m}.$

Iskuvaimentimen jousivakio on

$$k = \frac{m_1 g}{x} = \frac{m_1 g}{l_1 - l_2} = \frac{31\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}187\,\text{m} - 0{,}170\,\text{m}} = 17\,888{,}82\,\text{N/m} \approx 18\,\text{kN/m}.$$

b) henkilön massa *m* = 67 kg

Laaditaan jousiin vaikuttavat voimat



$\overline{G} =$ henkilön paino

$\overline{F}_j =$ jousen jousivoima

Kun henkilö istuu paikoillaan mopon jousien päällä, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Kun otetaan huomioon suuntasopimus, niin

$$F_j + F_j - G_2 = 0$$
$$2F_j = m_2 g.$$

Koska jouset ovat samanlaisia, jousien puristumat ovat yhtä suuret. Jousien puristumaksi saadaan

$$2kx_2 = m_2 g$$
$$x_2 = \frac{mg}{2k} = \frac{67\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{2 \cdot 17\,888{,}82\,\text{N/m}} = 0{,}018\,37\,\text{m} \approx 1{,}8\,\text{cm}.$$

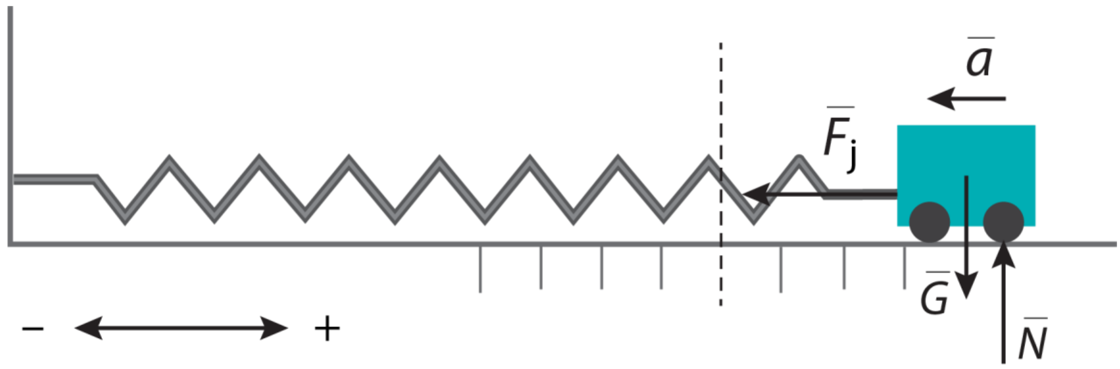
Tehtävä 6.11.

jousen jousivakio k = 28,4 N/m
jousen poikkeama tasapainoasemasta x = 7,3 cm = 0,073 m
vaunun massa m = 330 g = 0,33 kg

a) Jousen venyttämisessä tehty työ on yhtä suuri kuin jouseen varastoituva potentiaalienergia.

$$W = E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot 28{,}4\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot(0{,}073\,\text{m})^2 = 0{,}075\,671\,8\,\text{J} = 75{,}6718\,\text{mJ} \approx 76\,\text{mJ}$$

b) Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



$\bar{F}_j$ = jousivoima

$\bar{G}$ = vaunun paino

$\bar{N}$ = vaunuradan tukivoima

Jousivoima pyrkii palauttamaan vaunua tasapainoasemaan. Jousivoiman suuruus on $F_j = kx$.

Valitaan jousivoiman suunta positiiviseksi suunnaksi, tällöin Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö vaunun vaakasuuntaiselle liikkeelle on

$F_\mathrm{j} = ma.$

Vaunu lähtee liikkeelle kiihtyvyydellä

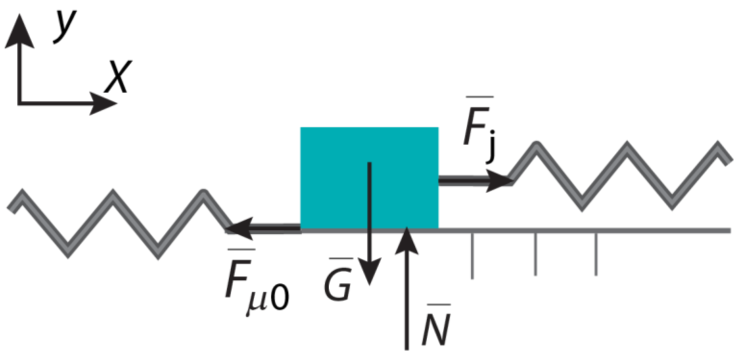
$$a = \frac{F_\mathrm{j}}{m} = \frac{kx}{m} = \frac{28{,}4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}073\,\mathrm{m}}{0{,}33\,\mathrm{kg}} = 6{,}282\,424\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 6{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Tehtävä 6.12.

jousen venymä x = 17 cm = 0,17 m
jousivakio k = 810 N/m
laatikon massa m = 44 kg

Kun jousesta vedetään, jousessa vaikuttaa jousivoima, jonka suunta on kohti jousen tasapainoasemaa. Jousen molempiin päihin vaikuttaa yhtä suuri voima, joten Newtonin III lain nojalla laatikkoa vetävä jousivoima on yhtä suuri kuin voima, jolla jousesta vedetään.

Piirretään laatikon voimakuvio.



$\overline{F}_j =$ jousivoima

$\overline{G} =$ laatikon paino

$\overline{N} =$ lattian tukivoima

$\overline{F}_{\mu 0} =$ laatikon ja lattian välinen lepokitka

Laatikon ja lattian välinen lepokitka saa suurimman arvonsa juuri ennen kuin laatikko lähtee liikkeelle. Tällöin lepokitkan suuruus on $F_{\mu 0} = \mu_0 N$ ja Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö laatikon vaakasuuntaiselle liikkeelle on

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ F_{\text{j}} - F_{\mu 0} &= 0 \\ F_{\mu 0} &= F_{\text{j}}. \end{aligned}$$

Pystysuuntaiselle liikkeelle on voimassa

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \\ N - G &= 0 \\ N &= G. \end{aligned}$$

Jousivoiman suuruus on $F_{\text{j}} = kx$, joten lattian ja laatikon välinen lepokitkakerroin on

$$\mu_0 = \frac{F_{\mu 0}}{N} = \frac{F_{\text{j}}}{G} = \frac{kx}{mg} = \frac{810\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}17\,\text{m}}{44\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}3190158 \approx 0{,}32.$$

Tehtävä 6.13.

b) Jousivakion voi määrittää esimerkiksi ripustamalla jouseen punnuksia ja kirjaamalla venymän ja painon arvot ylös. Kun mittaustulokset esitetään (x, G)-koordinaatistossa, syntyneen kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin on saman kuin jousen jousivakio.

c) Mittausvirhettä voi pienentää esimerkiksi ottamalla riittävän monta mittaustulosta ja valitsemalla sopiva mittausalue.

Tehtävä 6.14.

a) Jousen pituus mittauksen alussa oli l_0 = 12,1 cm. Taulukoidaan massat ja pituudet. Lasketaan pituuden muutos $x = l - l_0$.

l (m)	m (kg)	x (m)
0,121	0	0
0,143	0,05	0,022
0,162	0,1	0,041
0,182	0,15	0,061
0,203	0,2	0,082
0,223	0,25	0,102
0,243	0,3	0,122

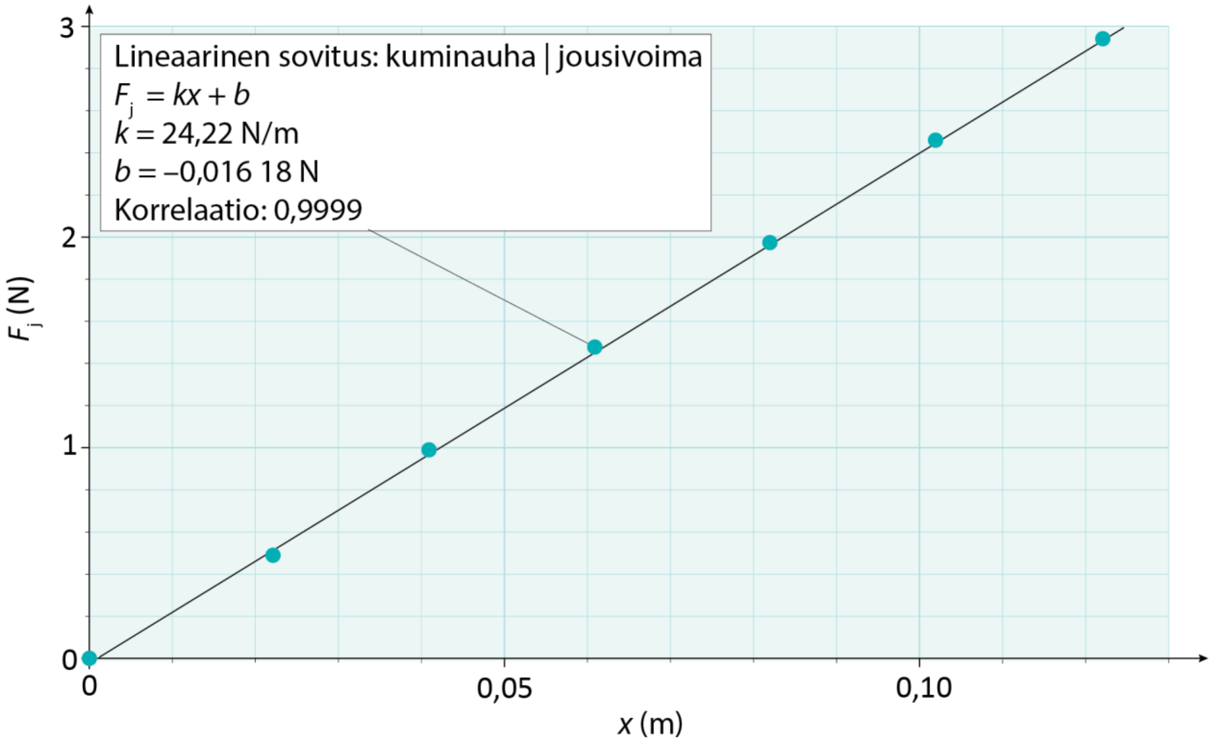
b) Punnus on paikallaan, jolloin tasapainossa olevalle jouselle on Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioituina $F_j - G = 0$ eli

$$F_j = G$$
$$F_j = mg.$$

Lasketaan uudet sarakkeet jousivoimalle.

l (m)	m (kg)	x (m)	F (N)
0,121	0	0	0
0,143	0,05	0,022	0,491
0,162	0,1	0,041	0,981
0,182	0,15	0,061	1,472
0,203	0,2	0,082	1,962
0,223	0,25	0,102	2,453
0,243	0,3	0,122	2,943

Jousivoimalle on voimassa $F_j = kx$.



Jousivakio saadaan (k, F_j)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Määritetään kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin.

Jousen jousivakio on k = 24,22 N/m = 24 N/m.

c) Mitä jäykempi jousi on, sitä suurempi on jousen jousivakio. Jousivoimalle pätee $F_j = kx$. Koska jousivakio on (k, F_j)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin, voidaan todeta, että mitä suurempi jousivakio on, sitä jyrkemmin suora kulkee koordinaatistossa.

Tehtävä 6.15.

a) Kun jousi roikkuu statiivissa ja jouseen ripustetaan punnus, jousi venyy uuteen tasapainoasemaan. Tällöin Newtonin II lain mukaan paikallaan olevaan punnukseen kohdistuva kokonaivoima on nolla. Punnukseen vaikuttaville voimille suunnat huomioituina on voimassa

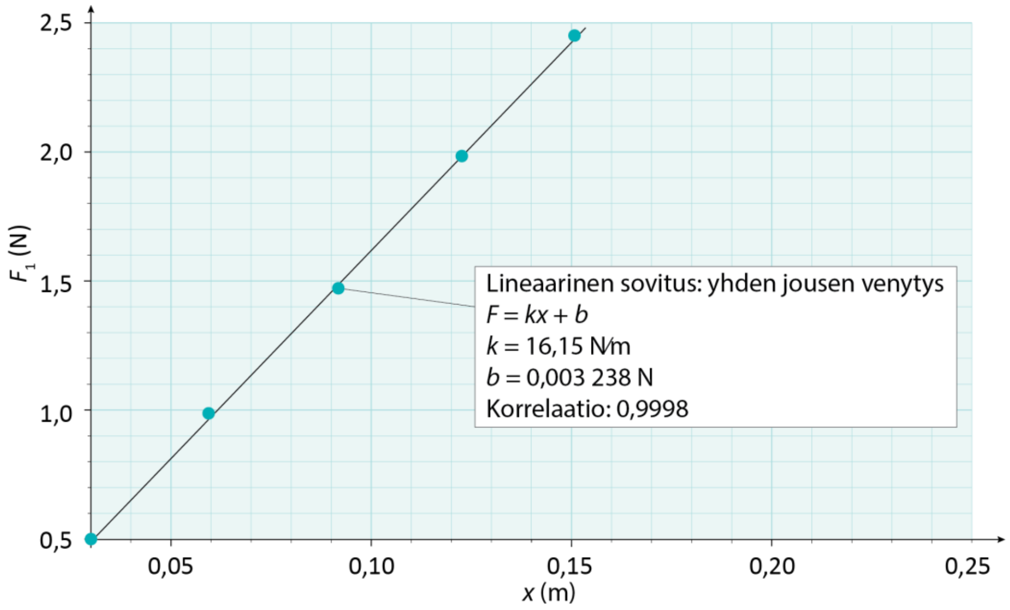
$F_j - G = 0$. Jousivoima on yhtä suuri kuin jousta venyttävä voima eli punnuksen paino, $F_j = mg$.

Taulukossa on esitettynä jousivoima yhdelle jouselle sarakkeessa F_1 ja kahden peräkkäisen jousen muodostamalle jousisysteemille sarakkeessa F_2.

Asetelma 1: yhden jousen venytys		
m (kg)	x_1 (m)	F_1 (N)
0,051	0,031	0,50031
0,101	0,060	0,99081
0,150	0,092	1,4715
0,202	0,123	1,98162
0,250	0,151	2,4525

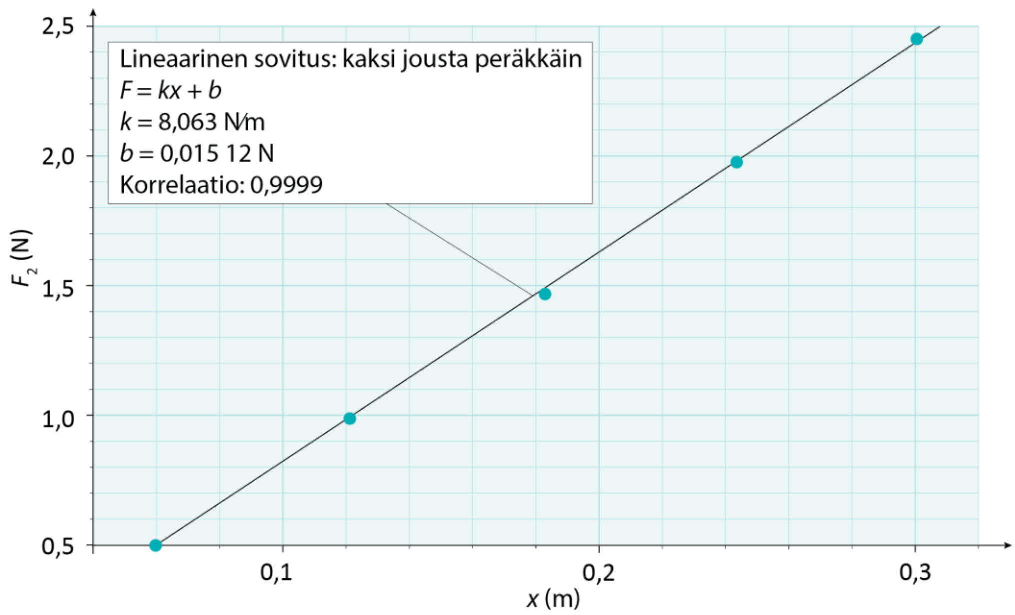
Asetelma 2: kaksi jousta peräkkäin		
m (kg)	x_2 (m)	F_2 (N)
0,051	0,059	0,50031
0,101	0,121	0,99081
0,150	0,183	1,4715
0,202	0,244	1,98162
0,250	0,301	2,4525

b) Esitetään jousivoima pituuden muutoksen suhteen yhdelle jouselle.



Jousivoiman suuruus on $F_j = kx$, joten jousivakio saadaan suoran fysikaalisena kulmakertoimena. Jousivakio yhdelle jouselle on k_1 = 16,15 N/m ≈ 16 N/m.

Esitätään jousivoima pituuden muutoksen suhteen kahden peräkkäisen jousen systeemille.

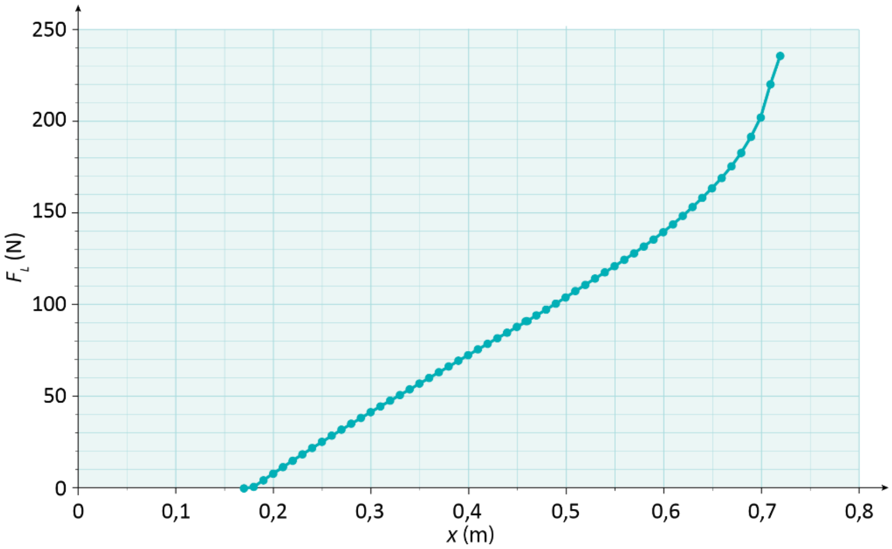


Jousivakion suuruudeksi kahden peräkkäisen jousen jousisysteemille saadaan suoran fysikaalisena kulmakertoimena k_2 = 8,063 N/m ≈ 8,1 N/m.

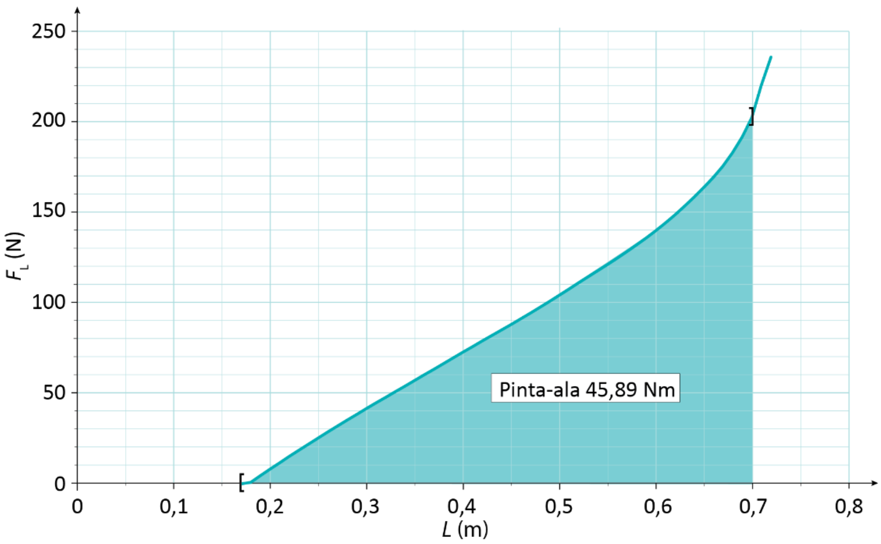
c) Edellisten kohtien tulosten perusteella kahden peräkkäin kytketyn jousen muodostaman jousisysteemin jousivakio on puolet yhden jousen jousivakiosta.

Tehtävä 6.16.

a) Esitetään voima vetopituuden funktiona.



Työ määritetään kuvaajan ja vaaka-akselin rajoittamasta fysikaalisesta pinta-alasta.



Kun jousi venytettiin 0,70 m vetopituuteen asti, teki voima työn 45,89 Nm ≈ 46 J.

b) voiman tekemä työ jousen jännityksessä W = 45,89 J

nuolen massa
$m = 490 \cdot 64{,}79891 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg} = 31{,}75147 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}$

Nuoli saa suurimman mahdollisen nopeutensa silloin, kun jouseen tehdään työtä ja jousen potentiaalienergia suurenee ja kun varastoitunut potentiaalienergia muuntuu kokonaisuudessaan nuolen liike-energiaksi. Tällöin nuolen liike-energian muutos on yhtä suuri kuin jousen tekemä työ. Työperiaatteen mukaisesti $\Delta E_\mathrm{k} = W$.

Koska alussa nuolen nopeus on nolla, myös sen liike-energia on nolla. Liike-energian muutos on yhtä suuri kuin nuolen liike-energia lopussa. Ratkaistaan liike-energian yhtälöstä $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$ nuolen nopeus

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45{,}89\ \mathrm{J}}{31{,}751\,47 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}}} = 53{,}764\,07\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 54\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tehtävä 6.17.

a) Kun peräkkäin kiinnitettyjä jousia venytetään voimalla F_v ja jouset ovat paikoillaan, tasapainotilanteessa Newtonin II lain mukaan molemmille jousille on voimassa $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Jousen molempiin päihin vaikuttaa siis yhtä suuri voima. Newtonin III lain mukaan ensimmäinen jousi vetää toista jousta yhtä suurella voimalla kuin toinen jousi vetää ensimmäistä. Jousia venyttää siis yhtä suuri voima.

Jousia venyttävä voima on $F_\mathrm{v} = kx$, joten molempien jousien pituuden muutos on $x = \frac{F_\mathrm{v}}{k}$.

Yhteensä jouset venyvät määrän $2x = \frac{2F_\mathrm{v}}{k}$.

Tällöin yhdistelmän jousivakio on

$$k_{yhdistelmä} = \frac{F_\mathrm{v}}{\frac{2F_\mathrm{v}}{k}} = \frac{k}{2}$$

Peräkkäin kytkettyjen jousien yhteinen jousivakio on puolet yksittäisen jousen jousivakiosta.

b) Kun rinnakkain kiinnitettyjä jousia venytetään voimalla F_v ja jouset ovat paikoillaan, tasapainotilanteessa Newtonin II lain mukaan jousien systeemille on voimassa $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Kun valitaan venyttävän voiman F_v suunta positiiviseksi, voidaan yhtälö kirjoittaa muodossa $F_\mathrm{v} - kx - kx = 0$, josta saadaan jousisysteemin venymän suuruudeksi edelleen $x = \frac{F_\mathrm{v}}{2k}$.

Nyt yhdistelmän jousivakio on

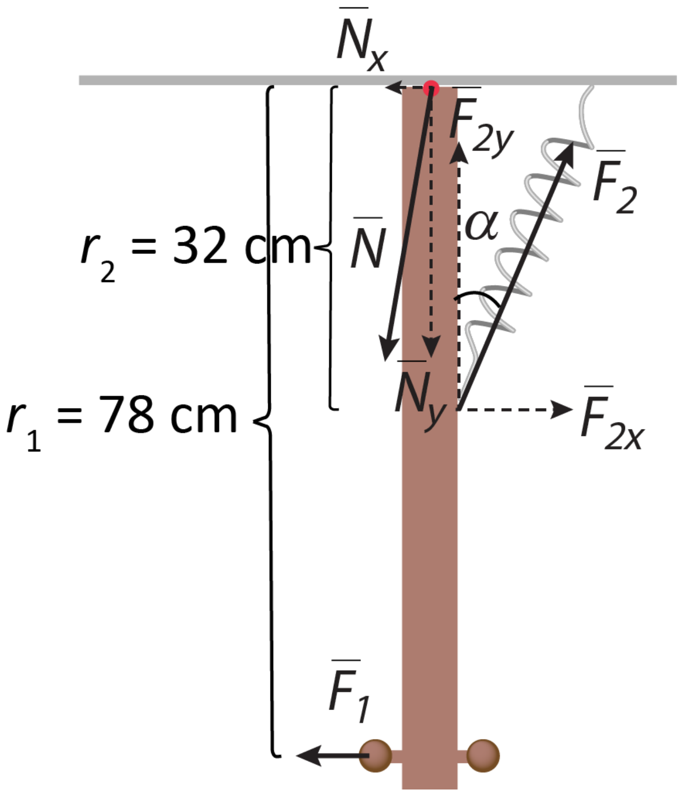
$$k_{yhdistelmä} = \frac{F_\mathrm{v}}{\frac{F_\mathrm{v}}{2k}} = 2k.$$

Rinnakkain kytkettyjen jousien yhteinen jousivakio on kaksinkertainen yhden jousen jousivakioon verrattuna.

Tehtävä 6.18.

kahvan etäisyys saranasta r_1 = 0,78 m
jousen etäisyys saranasta r_2 = 0,32 m
jousen ja oven välinen kulma α = 26 °
jousen venymä x = 0,034 cm
jousen jousivakio k = 53 N/m

Laaditaan voimakuvio oveen vaikuttavista voimista.



$\overline{F}_1 =$ käden oveen kohdistama voima
$\overline{F}_2 =$ jousen oveen kohdistama voima
$\overline{N} =$ saranan tukivoima

Voimat $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ aiheuttavat oveen yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset momentit. Kiertoakselina on oven sarana.

Jousen oveen kohdistama voima on jousivoima, $F_2 = kx$ ja voiman kohtisuora komponentti oveen nähden on $F_{2x} = F_2 \sin \alpha = kx \sin \alpha$

Pyörimisen tasapainoehdosta saranan suhteen saadaan

$$\Sigma M = 0$$

$$F_1 r_1 - F_{2x} r_2 = 0$$

$$F_1 r_1 = kxr_2 \sin\alpha$$

$$F_1 = \frac{kxr_2 \sin\alpha}{r_1} = \frac{53\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}034\,\text{m} \cdot 0{,}32\,\text{m} \cdot \sin 26^\circ}{0{,}78\,\text{m}} = 0{,}324080\,\text{N} \approx 0{,}32\,\text{N}$$

Ovenkahvasta on pidettävä kiinni vähintään 0,32 N:n voimalla.

Tehtävä 6.19.

a)

$\overline{N}$ =lattian tukivoima

$\overline{T}$ =nivelen tukivoima

$\overline{F}$ =akillesjänteen kantaluuhun kohdistama voima

b) henkilön massa m = 78 kg

lattian tukivoiman varsi r_1 = 12,2 cm = 0,122 m

akillesjänteessä vaikuttavan voiman varsi
r_2 = 4,8 cm = 0,048 m

Koska päkiällään seisovan henkilön liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$, lattian tukivoiman suuruus on sama kuin henkilön paino, N = G.

Jalka on tasapainossa pyörimisen suhteen. Tarkasetllaan pyörimistä ylemmän nilkkanivelen suhteen. Momenttien tasapainoehdoksi saadaan $\sum M = 0$ ja

$$Nr_1 = Fr_2$$

$$F = \frac{Nr_1}{r_2} = \frac{Gr_1}{r_2} = \frac{mgr_1}{r_2}$$

$$= \frac{78\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}122\,\text{m}}{0{,}048\,\text{m}} = 1\,944{,}83\,\text{N} \approx 1{,}9\,\text{kN}.$$

Akillesjänteessä vaikuttava voima on 1,9 kN.

Yhtälöstä nähdään myös, että akillesjänteessä vaikuttava voima on $F = \frac{r_1}{r_2} \cdot G = \frac{0{,}122\,\text{m}}{0{,}048\,\text{m}} \cdot G = 2{,}542G \approx 2{,}5G$ eli 2,5-kertainen henkilön painoon verrattuna.

c) akillesjänteen jousivakio k = 450 kN/m = 450 000 N/m

akillesjänteessä vaikuttava voima on edellisen kohdan perusteella F = 1 944,83 N

Akillesjänteen venymä saadaan jousivoiman avulla:

$$F = kx$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{1\,944{,}83\,\text{N}}{450\,000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}} = 4{,}3218 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \approx 4{,}3\,\text{mm}$$

Jänne venyy 4,3 mm.

Tehtävä 6.20.

a) Ruostumaton teräs on hyvä rakennusmateriaali, koska se on kestävää, ja sitä pystytään hitsaamaan hyvin. Ruostumaton teräs ei haurastu kosteissakaan olosuhteissa.

b) Ruostumattomaan teräkseen on seostettu noin 18 % kromia. Ruostumattoman teräksen pinnalle muodostuu kromioksidikerros, joka estää ruosteen muodostumisen. Kromioksidin muodostuminen on teräkselle energeettisesti edullisempaa kuin rautaoksidin eli ruosteen muodostuminen.

c) Kuvasta 2 nähdään, että duplex-teräksen myötöjännitysraja on noin 450 MPa. Tätä pienemmillä jännityksillä teräskappale venyy elastisesti ja palaa alkuperäiseen muotoonsa, kun jännitys poistetaan. Koska 650 MPa:n jännitys on suurempi kuin myötöjännitysraja, kappaleen atomien välisiä sidoksia rikkoutuu, ja kappaleen muoto muuttuu pysyvästi.

d) Määritetään ensin vaijeriin kohdistuva normaalijännitys

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{10\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{3 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2} = 32{,}7\,\text{MPa}$$

(Kun verrataan 32,7 MPa jännitystä kuvasta arvioitavaan austeniittisen teräksen myötöjännitysrajaan, noin 200 MPa, voidaan päätellä, että vesiämpärin nosto ei muuta vaijerin rakennetta pysyvästi, vaan vaijerin rakenne palaa alkuperäiseen muotoonsa jännityksen poistuessa.

Vaijerin oma massa on sen verran pieni, että se voidaan jättää tarkastelussa huomiotta. Venymä ε voidaan ratkaista kimmokertoimen avulla:

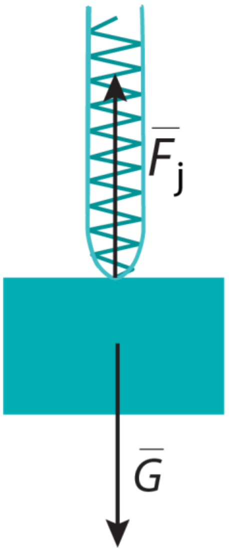
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{32{,}7\,\text{MPa}}{200\,\text{GPa}} = 0{,}016\,35\%$$

10 metrin mittaisen vaijerin pituus muuttuu

$$\varepsilon l = \Delta l = 0{,}000\,1635 \cdot 10\,\text{m} \approx 1{,}6\,\text{mm}.$$

Tehtävä 6.21.

a) Tarkastellaan kumilenkkiä yhtenä jousena



$\overline{G}$ = ämpärin paino

$\overline{F}_j$ = kumilenkin jousivoima

Voimakuvion pisteytys:

Kuvaan on merkitty kaikki tilanteessa vaikuttavat voimavektorit oikeisiin suuntiin ja oikeille kohdilleen: (2 p)

- Ämpärin painoa kuvaava vektori alkaa kappaleen painopisteestä
- Kumilenkin jousivoimaa kuvaava vektori alkaa kappaleesta

- Voimavektorien pituudet ovat oikein. Pystysuunnassa jousivoimien pituuksien summa on yhtä suuri kuin paino
- Voimat on nimetty listaan kuvion alle.

Huom!

- Jos voimakuviossa on yksikin ylimääräinen voima, ei voimakuviosta voi saada pisteitä.
- Jos kaksi tai useampi voimista puuttuu, ei voimakuviosta voi saada pisteitä.
- Jos voimavektorin vaikutuspiste on väärin, esimerkiksi voima on piirretty irti kappaleesta sen vierelle tai eteen, voimavektorista ei anneta pisteitä. Jos kaksi tai useampi voima on näin piirretty, voimakuviosta ei saa pisteitä.

b) Kun kumilenkkiin ripustettuun ämpäriin lisätään kiviä, kumilenkki asettuu tasapainoon. Newtonin II lain $\sum \overline{F} = \overline{0}$ mukaan voimien suunnat huomioituina kumilenkin jousivoimaksi saadaan

$$F_{\mathrm{j}} - G = 0$$
$$F_{\mathrm{j}} = G \qquad \text{(2 p)}$$
$$F_{\mathrm{j}} = mg.$$

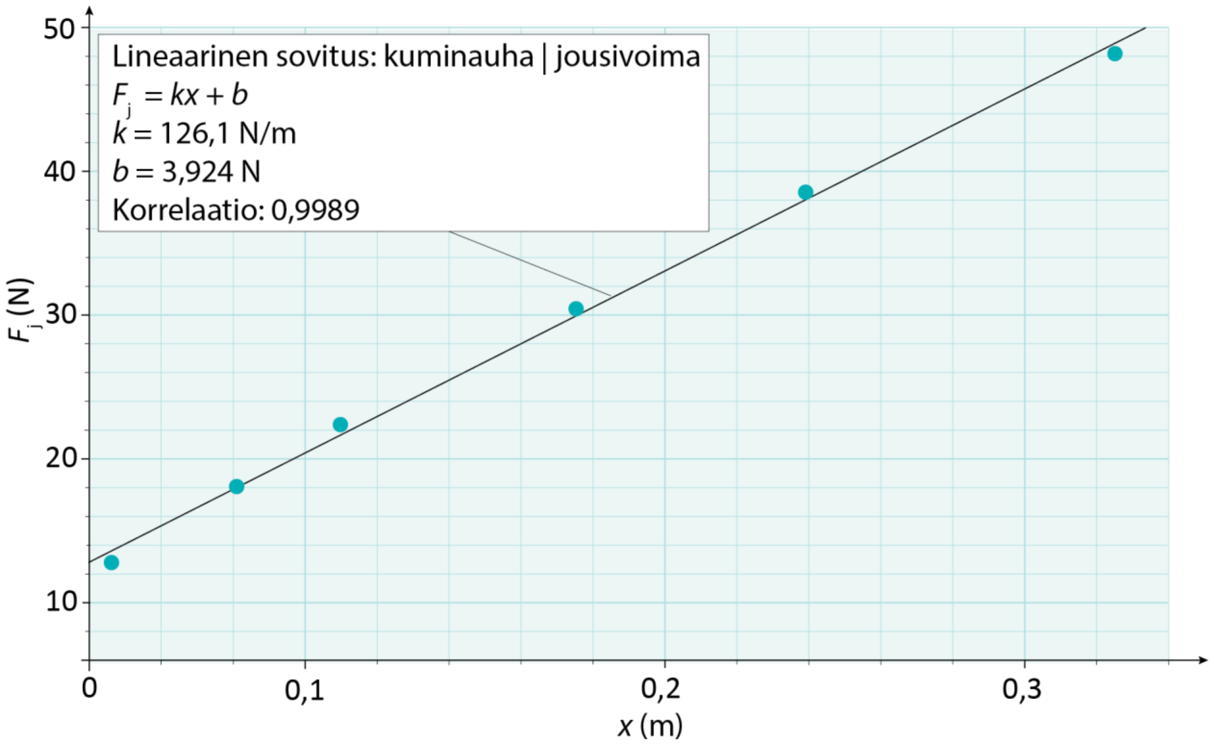
Kumilenkin pituuden muutos x saadaan, kun vähennetään mitatuista pituuksista kumilenkin vapaa pituus 97,6 cm eli $x = l - l_0$.

Eri massoja vastaavat kumilenkin jousivoimat sekä kumilenkin pituuden muutokset:

ämpärin massa (kg)	kumilenkin jousivoima (N)	kumilenkin pituus (m)	pituuden muutos (m)
1,31	12,8511	102,2	0,046
1,83	17,9523	105,7	0,081
2,28	22,3668	108,6	0,11
3,10	30,4110	115,1	0,175
3,92	38,4552	121,5	0,239
4,91	48,1671	130,1	0,325

(2 p)

Laaditaan tuloksista kuvaaja.



(akselit nimetty ja yksiköt 1 p, akselit oikein päin 1 p, mittauspisteet näkyvät ja mittauspisteet erottuvat selkeästi 1 p, sovitettu suora 1 p)

c) Jousivoiman ja jousen pituuden välillä on voimassa $F_j = kx$. (1 p)

Jousivakio saadaan (x, F_j)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. (1 p) b-kohdan lineaarisen sovituksen perusteella kumilenkin jousivakio on

k = 126,1N/m ≈ 126 N/m. (1 p)

d) Kumilenkin pituuden muutos x = 0,37 m.

Jousen potentiaalienergia on $E_p = \frac{1}{2}kx^2$. (1 p)

Käytetään c-kohdan jousivakion tulosta ja lasketaan kumilenkin potentiaalienergia.

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 126{,}1\,\frac{\text{N}}{\text{m}}(0{,}37\,\text{m})^2 = 8{,}6315\,\text{J} \approx 8{,}6\,\text{J}$$ (1 p)