5. Planeettojen ja satelliittien liike

Tehtävä 5.1.

Väitteistä ovat oikein: b), c) ja e)

Väitteistä ovat väärin a), d) ja f)

Korjaukset vääriin väitteisiin:

a) Avaruusasemalla gravitaatiokenttä on lähes yhtä voimakas kuin Maan pinnalla. Astronautit ovat asemalla näennäisesti painottomassa tilassa, koska asema ja astronautti ovat jatkuvassa putoamisliikkeessä Maan ohi ja niillä on sama kiihtyvyys.

d) Esimerkiksi Maata kiertävän satelliitin nopeuteen vaikuttaa vain satelliitin etäisyys Maasta. Kiertävän kappaleen massa ei vaikuta kappaleen kiertorataan, joten massaa eri voi päätellä kappaleen nopeuden avulla.

f) Televisio-ohjelmia välittävät tietoliikennesatelliitit kiertävät geostationaarisella radalla. Geostationaarinen rata on moniin muihin ratoihin verrattuna kaukana maanpinnasta.

Tehtävä 5.2.

a) Vuoren huipulta ammuttu tykinkuula lentää sitä pidemmälle, mitä suurempi lähtönopeus tykinkuulalla on. Jos tykinkuulalla on riittävän suuri lähtönopeus, tykinkuula ei osu ollenkaan maanpintaan vaan putoaa jatkuvasti Maan ohi ja päätyy näin kiertämään Maata.

b) Maan massa $M = 5{,}9723 \cdot 10^{24}$ kg

Maan ekvaattorisäde r = 6 378,137 km = 6 378 137 m

tykinkuulan massa m

Newtonin II lain mukaan kappaleen liikeyhtälö ympyräliikkeessä on $\sum \bar{F} = m\bar{a}_n$.

Tykinkuula päätyy ympyräradalle gravitaatiovoiman $F_g = \gamma \frac{mM}{r^2}$ vaikutuksesta. Vektorien suunnat huomioituina

$$F = ma_n$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}} = \sqrt{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}9723 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6\,378\,137\,\text{m}}}$$

$$= 7\,905{,}4528\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\approx 7\,900\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tykinkuulan nopeuden pitäisi olla vähintään 7 900 m/s, jotta se päätyisi kiertämään Maata.

c) Vaadittu nopeus on todella suuri. Tykinkuula on käytännössä mahdotonta ampua tällä lähtönopeudella. Lisäksi ilmanvastus estää näin nopean liikkeen ilmakehässä.

Tehtävä 5.3.

Maan massa $M = 5{,}9723 \cdot 10^{24}$ kg

Maan keskimääräinen säde $R = 6\,371\,000$ m

satelliitin etäisyys
maanpinnasta $h = 20\,200$ km $= 20\,200\,000$ m

satelliitin etäisyys Maan
keskipisteestä $r = R + h = 26\,571\,000$ m

a) Satelliittiin vaikuttaa Maan gravitaatiovoima, mikä aiheuttaa satelliitin tasaisen liikkeen ympyräradalla. Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa

$$F_{\mathrm{g}} = ma_{\mathrm{n}}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Ratkaistaan satelliitin nopeus

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}} = \sqrt{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{5{,}9723 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{26\,571\,000\,\mathrm{m}}}$$

$$= 3\,873{,}198\,18\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3\,870\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) yksi vuorokausi sekunteina t = 24 · 3 600 s = 86 400 s

Satelliitti kulkee vuorokaudessa matkan $s=vt=\sqrt{\gamma\frac{M}{r}}t.$

Satelliitin kulkemien kierrosten määrä vuorokaudessa on

$$n=\frac{s}{2\pi r}=\frac{\sqrt{\gamma\frac{M}{r}}t}{2\pi r}=\frac{\sqrt{6{,}674\,30\cdot10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\cdot\frac{5{,}9723\cdot10^{24}\ \mathrm{kg}}{26\,571\,000\,\mathrm{m}}}\cdot 86\,400\,\mathrm{s}}{2\pi\cdot 26\,571\,000\,\mathrm{m}}$$
$$=2{,}004\,452\approx 2{,}0.$$

GPS-satelliitti kiertää maapallon kaksi kertaa vuorokaudessa.

Tehtävä 5.4.

a) Satelliitti on kappale tai laite, joka kiertää Maata tai muuta planeettaa.

b) Satelliitteja käytetään esimerkiksi tietoliikenteeseen, paikannusjärjestelmiin, sään ennustamiseen ja vakoiluun.

Tehtävä 5.5

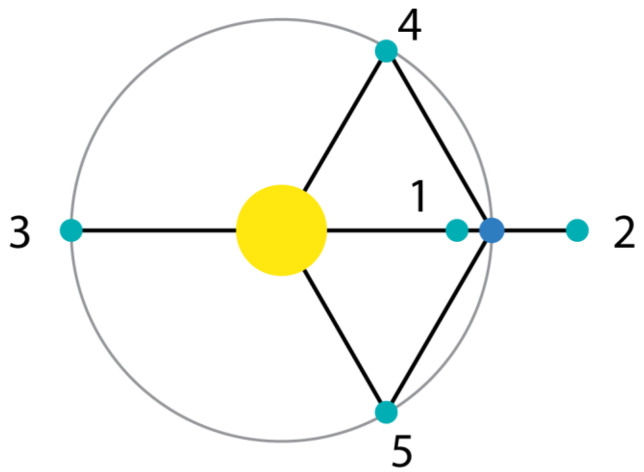
a) Aalto 1 on satelliitti, joka suunniteltiin muun muassa Maan kaukokartoittamiseen spektrometrillä ja avaruussäteilyn mittaamiseen säteilymittarilla. Aalto 2 on satelliitti, joka suunniteltiin tutkimaan yläilmakehän plasman ominaisuuksia ja hiukkasia.

b) Geostationaarinen satelliitti pysyy Maan pintaan nähden koko ajan samassa paikassa. Geostationaarisen satelliitin kiertoaika Maan ympäri on yhtä suuri kuin yhteen Maan pyörähdykseen kuluva aika. Geostationaariset satelliitit sijaitsevat päiväntasaajan yläpuolella.

c) Satelliitin polaarinen rata kulkee sekä pohjoisnavan että etelänavan yli.

Tehtävä 5.6

a) Kun kaksi suurta taivaankappaletta kiertää toisiaan, syntyy pisteitä, jossa kolmas taivaankappale voi olla tasapainossa kiertolaisten kanssa. Esimerkiksi Maan kiertäessä Aurinkoa Lagrangen pisteitä on yhteensä viisi kappaletta.



Kolme Lagrangen pisteistä ovat samalla janalla Maan ja Auringon kanssa ja kaksi muuta Maan kiertoradalla. Lagrangen pisteet ovat erinomaisia sijainteja satelliiteille, koska ne pysyvät paikoillaan suhteessa Maahan ja Aurinkoon.

b) SOHO-satelliitti tutkii Aurinkoa ja sijaitsee Maan ja Auringon välissä Lagrangen pisteessä L1. Kuvassa Lagrangen pisteet numeroitu luvuilla 1–5. SOHO-satelliitti tutkii esimerkiksi Auringon sisäosia, auringonpurkauksia ja niihin liittyviä partikkeleita, aurinkopilkkuja, Auringon koronaa ja aurinkotuulta.

c) CubeSat on kuution muotoinen pienoissatelliitti, jonka mitat on vakioitu. Sen koko on yleensä 10 cm × 10 cm × 10 cm. Niitä voidaan hyödyntää esimerkiksi instrumenttien testaamisessa, tiedeprojekteissa, opetustarkoituksessa ja kaupallisissa sovelluksissa.

Tehtävä 5.7

kiertoaika t = 7 h 39,2 min = 27 552 s

säde r = 9,376 10^6 m

Phoboksen massa m

Marsin massa M

a) Newtonin II lain mukaan kappaleen liikeyhtälö ympyräliikkeessä on $\sum \bar{F} = m\bar{a}_n$.

Phobos on ympyräradalla gravitaatiovoiman $F_\mathrm{g} = \gamma \frac{mM}{r^2}$ vaikutuksesta. Suunnat ympyräradan säteen suunnassa huomioituina

$$F_\mathrm{g} = ma_\mathrm{n}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Phobos kulkee tasaista ympyräliikettä, jolloin kuun yhden kierroksen aikana kulkema matka on $s = 2\pi r = vt$. Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Marsin massa on

$$M = \frac{\left(\frac{s}{t}\right)^2 r}{\gamma} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 r}{\gamma} = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2 \gamma}$$

$$= \frac{4\pi^2 \left(9{,}376 \cdot 10^6\ \mathrm{m}\right)^3}{\left(27\,552\,\mathrm{s}\right)^2 \cdot 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}} = 6{,}422\,45 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg} \approx 6{,}42 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}.$$

b) Auringon massa M = 2,0 10^{30} kg

Marsin etäisyys Auringosta
r = 1,52 au = 227 388 763,9 km

Mars kiertää Auringon ympyri tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin Newtonin II lain mukaan suunnat säteen suunnassa huomioituina on

$$F_\mathrm{g} = ma_\mathrm{n}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$\frac{\gamma M}{r} = v^2.$$

Oletetaan, että Mars kulkee tasaista ympyräliikettä Auringon ympäri, jolloin Marsin yhden kierroksen aikana kulkema matka on $s = 2\pi r = vt$. Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Marsin kiertoaika on

$$\gamma M = \left(\frac{s}{t}\right)^2 r = \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2\left(227\,388\,763{,}9\cdot 10^3\ \mathrm{m}\right)^3}{6{,}674\,30\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\cdot 2{,}0\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}} = 58\,967\,879{,}4\,\mathrm{s} \approx 5{,}9\cdot 10^7\ \mathrm{s}.$$

Phobosin kiertoaika on 27 552 s, joten Marsin vuoden aikana kierrettyjen kierrosten määrä on

$$N = \frac{58\,967\,879{,}4\,\mathrm{s}}{27\,552\,\mathrm{s}} = 2\,140{,}24 \approx 2\,140.$$

Tehtävä 5.8

Deimoksen massa M = 1,4762 10^{15} kg

Deimoksen säde r = 6,0 km

Kun kappaleelle annetaan sopivan suuruinen vaakasuuntainen nopeus, kappale päättyy ympyrän muotoiselle radalle gravitaatiovoiman $F_\mathrm{g} = \gamma \frac{mM}{r^2}$ vaikutuksesta. Newtonin II lain mukaan tasaisessa ympyräliikkeessä olevan kappaleen liikeyhtälö säteen suunnassa suunnat huomioituina on

$$F_\mathrm{g} = ma_\mathrm{n}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$\frac{\gamma M}{r} = v^2.$$

Pallon nopeuden tulee olla

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 1{,}4762\ 10^{15}\,\mathrm{kg}}{6\,000\,\mathrm{m}}} = 4{,}052\,283\,\mathrm{m/s} \approx 4{,}1\,\mathrm{m/s}.$$

Tehtävä 5.9.

pyörimisnopeus n = 20/24 1/h = 0,00023148 1/s

jaksonaika T = 1/n =1/0,002320 s = 4 320 s

asteroidin tiheys ρ = 2,500 kg/m^3

asteroidin halkaisija d = 95 m

Asteroidin massa on

$$m = \rho V = \rho \frac{4\pi r^3}{3} = 2\,500\,\text{kg/m}^3 \cdot \frac{4\pi \cdot (47{,}5\text{m})^3}{3} = 1{,}1223 \cdot 10^9\ \text{kg}.$$

Asteroidin pinnasta irronnut kivi on tasaisessa ympyräliikkeessä. Lasketaan nopeus, jolla kivi vielä pysyisi asteroidin pinnassa. Kivi on ympyräradalla gravitaatiovoiman $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$ vaikutuksesta. Newtonin II lain mukaan suunnat säteen suunnassa huomioituna saadaan kiven nopeudeksi

$$F_\text{g} = ma_\text{n}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1\,122\,301\,251\,\text{kg}}{47{,}5\,\text{m}}}$$

$$= 0{,}039\,710\,\text{m/s}$$

$$\approx 0{,}04\,\text{m/s}.$$

Lasketaan tasaisessa ympyräliikkeessä liikkuvan kiven nopeus.

Kivi pysyisi asteroidin pinnalla gravitaatiovuorovaikutuksen johdosta, jos kiven ratanopeus olisi alle 0,04 m/s. Kivi ei siis pysy asteroidin pinnalla.

Tehtävä 5.10.

a) Kun voima-anturi putoaa, on voima-anturilla ja punnuksella sama kiihtyvyys. Tällöin punnus ei kohdista voima-anturiin voimaa eli voima on 0 N. Luetaan kuvaajasta ajan arvot, milloin voima-anturin lukema oli likimain 0 N. Kuvaajan mukaan putoaminen alkoi ajanhetkellä t = 0,34 s ja päättyi ajanhetkellä t = 0,59 s.

b) Voima-anturin lukema on putoamisen aikana 0 N. Koska anturi ja punnus putoavat samalla kiihtyvyydellä, voima-anturi ei aiheuta tukivoimaa punnukseen ja voima-anturin lukema on nolla.

c) Avaruusasemalla sekä asema että siellä olevat ihmiset putoavat samalla kiihtyvyydellä ja siten leijuvat toistensa suhteen. Avaruusasemalla vallitsee näennäisesti painoton tila.

Tehtävä 5.11.

a) Satelliitin massa ei vaikuta kiertoaikaan eikä kiertoradan säteeseen.

b) Nopeusvektorin suunta on ympyräradan tangentin suuntainen.

c) Painovoimavektorin suunta on koko ajan kohti Maan keskipistettä.

d) Mittauksen mukaan saadaan radan säteeksi r = 6 559 km ja kiertoajaksi t = 91 min.

Newtonin II lain mukaan ympyräliikkeessä olevan satelliitin liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_n$.

Satelliitti on ympyräradalla gravitaatiovoiman $F_\mathrm{g} = \gamma \frac{mM}{r^2}$ vaikutuksesta. Newtonin II lain mukaan suunnat säteen suunnassa huomioituina

$$F_g = ma_\mathrm{n}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$\frac{\gamma M}{r} = v^2.$$

Satelliitti kulkee tasaista ympyräliikettä, jolloin satellliitin yhden kierroksen aikana kulkema matka on $s = 2\pi r = vt$. Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Maan massa on

$$M = \frac{\left(\frac{s}{t}\right)^2 r}{\gamma} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 r}{\gamma} = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2 \gamma}$$

$$= \frac{4\pi^2 \left(6\,559 \cdot 10^3\ \text{m}\right)^3}{\left(91 \cdot 60\,\text{s}\right)^2 \cdot 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} = 5{,}5986 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \approx 5{,}6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}.$$

Tehtävä 5.12.

a) avaruusaluksen massa m = 81 000 kg

Maan massa $M = 5{,}9723 \cdot 10^{24}$ kg

Maan keskimääräinen säde R = 6 371 000 m

avaruusaluksen etäisyys
maanpinnasta h = 350 km = 350 000 m

avaruusaluksen etäisyys Maan
keskipisteestä $r = R + h$ = 6 721 000 m

Newtonin II lain mukaan tasaisessa ympyräliikkeessä olevalle alukselle on voimassa vektorien suunnat säteen suunnassa huomioituina

$$F_{\mathrm{g}} = ma_{\mathrm{n}}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$\frac{\gamma M}{r} = v^2.$$

Ratkaistaan avaruusaluksen nopeus sen liikeyhtälöstä.

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}}$$

Avaruusaluksen liike-energiaksi saadaan

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\sqrt{\gamma\frac{M}{r}}^2 = \gamma\frac{mM}{2r}$$

$$= 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{81\,000\ \text{kg} \cdot 5{,}9723 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{2 \cdot 6\ 721\ 000\,\text{m}}$$

$$= 2{,}401\,97 \cdot 10^{12}\ \text{J} = 2{,}401\,97 \cdot 10^{12}\ \text{TJ} \approx 2{,}4\ \text{TJ}$$

b) palamisessa vapautuvan energian määrä
$Q = E = 2{,}40197 \cdot 10^{12}$ J

vedyn lämpöarvo $H = 119$ MJ/kg = $119 \cdot 10^6$ J

Ratkaistaan vedyn massa palamisessa vapautuvan energia yhtälöstä $Q = Hm$.

$$m = \frac{Q}{H} = \frac{2{,}401\,97 \cdot 10^{12}\ \text{J}}{119 \cdot 10^6\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 20\,184{,}62\ \text{kg} \approx 20\,000\,\text{kg}$$

Tehtävä 5.13.

a) Maan massa $M = 5{,}9723 \cdot 10^{24}$ kg

avaruusromun kiertosäde r = 25 000 km

avaruusromun massa m = 150 kg

lämpötila törmäyshetkellä T = 170 K

Raudan sulamispiste taulukkokirjan mukaan
T = 1 808,15 K

Newtonin II lain mukaan tasaisessa ympyräliikkeessä olevalle avaruusromukappaleelle on voimassa vektorien suunnat säteen suunnassa huomioituina

$$F_{\mathrm{g}} = ma_{\mathrm{n}}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$\frac{\gamma M}{r} = v^2.$$

Ratkaistaan avaruusromukappaleen nopeus sen liikeyhtälöstä.

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 5{,}9723 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{25\,000 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}} = 3\,993{,}04\,\mathrm{m/s} \approx 4\,000\,\mathrm{m/s}.$$

b) Avaruusromukappaleen liike-energia

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{\gamma mM}{2r} = \frac{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 150\,\text{kg} \cdot 5{,}9723 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{2 \cdot 25\,000 \cdot 10^3\,\text{m}}$$

$$= 1\,195\,827\,657\ \text{J} \approx 1{,}2\ \text{GJ}.$$

c) raudan ominaislämpökapasiteetti c = 0,449 kJ/kgK

avaruusromun massa m = 150 kg + 150 kg = 300 kg

Raudan sulamispiste on 1 535 °C = 1 808,15 K. Jotta rauta sulaisi, sen lämpötilan pitää nousta ΔT = 1 808,15 K – 170 K = 1 638,15 K.

Törmäyksessä vapautuva energia on edellisen kohdan perusteella

$$E = 2E_k \cdot 0{,}050 = 2 \cdot 1\,195\,827\,657\,\text{J} \cdot 0{,}050 = 119\,582\,765{,}7\,\text{J} \approx 0{,}12\ \text{GJ}.$$

Avaruusromun lämpeneminen sulamispisteeseen vaatii energiaa

$$Q = cm\Delta T = 0{,}449\,\text{kJ/kgK} \cdot 300\,\text{kg} \cdot 1\,638{,}15\,\text{K} = 220\,658\,805\,\text{J} \approx 0{,}22\,\text{GJ}.$$

Jos oletetaan, että sisäenergia jakautuu kappaleessa tasaisesti, niin rauta lämpenee, mutta ei sula, sillä $Q > E$.

Tehtävä 5.14.

a) Tarkastellaan tasaisessa ympyräliikkeessä etenevää satelliittiä.

Satelliitti pysyy ympyräradallaan gravitaatiovoiman $F_{\mathrm{g}} = \gamma \frac{mM}{r^2}$ vaikutuksesta. Newtonin II lain mukaan säteen suunnassa on voimassa

$$F_g = ma_{\mathrm{n}}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$\frac{\lambda M}{r} = v^2.$$

Satelliitti kulkee tasaista ympyräliikettä, jolloin satellliitin yhden kierroksen aikana kulkema matka on $s = 2\pi r = vt$. Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Satelliitin kiertoaika Maan ympäri on

$$\gamma M = \left(\frac{s}{t}\right)^2 r = \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}}$$

Yhtälöstä nähdään, että kun etäisyys *r* kasvaa, kiertoaika *t* pitenee.

b) Maan pinnan lähellä vaikuttaa ilmanvastus, joka estäisi nopeasti etenevän satelliitin kulun. Myös Maan pinnanmuodot saattaisivat vaikuttaa häiritsevästi satelliitin kulkuun.

c) Kun astronautti lähtee avaruuskävelylle, on astronautin nopeus sama kuin avaruusaluksen. Myös hohtimien nopeus on sama kuin avaruusaluksen. Hohtimien nopeus on tällöin riittävän suuri pitämään hohtimet ympyräliikkeessä Maan suhteen. Jos astronautti haluaisi pudottaa hohtimet Maahan, hänen täytyisi heittää hohtimet vastakkaiseen suuntaan samalla nopeudella.

Tehtävä 5.15.

a) Kuun massa $M = 7{,}348 \cdot 10^{22}$ kg

komentomoduulin kiertosäde
$r = 1\,738 \text{ km} + 110 \text{ km} = 1\,848 \text{ km}$

Kiertämiseen kulunut aika
$t = 128 \text{ h } 3 \text{ min} – 100 \text{ h } 12 \text{ min} = 27 \text{ h } 51 \text{ min} = 100\,260 \text{ s}$

Newtonin II lain mukaan kappaleen liikeyhtälö ympyräliikkeessä on $\sum \bar{F} = m\bar{a}_n$.

Komentomoduuli pysyy ympyräradallaan Kuun gravitaatiovoiman $F_\mathrm{g} = \gamma \frac{mM}{r^2}$ vaikutuksesta. Kuumoduli on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen

$$F_\mathrm{g} = ma_\mathrm{n}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$\frac{\gamma M}{r} = v^2.$$

Collins kulkee tasaista ympyräliikettä, jolloin hänen yhden kierroksen aikana kulkema matka on $s = 2\pi r = vt$. Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Collinsin kiertoaika Kuun ympäri on

$$\gamma M = \left(\frac{s}{t}\right)^2 r = \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 r = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot \left(1\,848 \cdot 10^3\ \text{m}\right)^3}{6{,}67430 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 7{,}348 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}} = 7\,127{,}63\ \text{s} \approx 7{,}1 \cdot 10^3\ \text{s}.$$

Collins ehtii kiertää Kuun
N = 100 260 s /7 127,6338 s = 14,066 kertaa eli noin 14,1 kertaa

b) Kun Collins kiertää Kuuta komentomoduulissa, hän on vapaassa pudotuksessa. Sekä komentomoduuli että Collins ovat samassa kiihtyvyydessä, jonka gravitaatiovuorovaikutus saa aikaan. Komentomoduuli ei silloin aiheuta Collinsiin tukivoimia, ja Collins tuntee olevansa painoton moduulin sisällä.

Tehtävä 5.16.

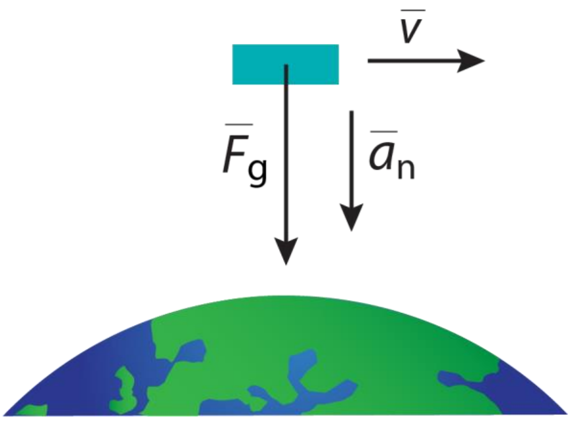
a) Maan massa $M = 5{,}9723 \cdot 10^{24}$ kg

avaruusaseman etäisyys Maan pinnasta $h = 405\,000$ m

Maan säde $R = 6\,378\,140$ m

avaruusaseman kiertosäde
$r = \mathrm{R} + h = 405\,000\ \mathrm{m} + 6\,378\,140\ \mathrm{m} = 6\,783\,140\ \mathrm{m}$

Avaruusasemaan vaikuttavat voimat



$\overline{F}_g = \text{gravitaatiovoima}$

Avaruusasema pysyy ympyräradallaan Maan gravitaatiovoiman $F_\mathrm{g} = \gamma \dfrac{mM}{r^2}$ vaikutuksesta.

Avaruusasema on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa, jolloin avaruusaseman nopeus on

$$F_\mathrm{g} = ma_\mathrm{n}$$

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$v=\sqrt{\frac{\gamma M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67430\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\cdot 5{,}9723\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{6\,783\,140\ \mathrm{m}}}$$

$$=7\,665{,}814\ \mathrm{m/s}$$

$$\approx 7\,670\ \mathrm{m/s}.$$

b) Avaruusasema on tasaisessa ympyräliikkeessä. Avaruusasema kiertää yhden kiertoajan aikana yhden kierroksen Maan ympäri. Kiertoaika Maan ympäri

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi\cdot 6783140\ \mathrm{m}}{7665{,}814026\ \mathrm{m/s}}=5559{,}71\ \mathrm{s}\approx 5560\ \mathrm{s}=92{,}7\ \mathrm{min}.$$

c) Kun avaruusasema kiertää Maata, asema on tasaisessa ympyräliikkeessä ja putoaa jatkuvasti Maan ohi. Avaruusaseman sisällä oleva ihminen on samassa putoamisliikkeessä. Koska avaruusasema ei kohdista ihmiseen tukivoimia, ihminen kokee olevansa painottomassa tilassa.

Tehtävä 5.18.

a) Satelliitin tuottama sähköteho laskee nollaan yhden kerran kierroksen aikana, mikä johtuu siitä, että maapallo varjostaa satelliittia jossain kiertoradan kohdassa.

b) Satelliitin kiertoradan kulma suhteessa maapallon pyörimisakseliin vaikuttaa varjostusaikaan. Kun satelliitin kiertorata suuntautuu kohti pyörimisakselia eli pohjois-etelänapa suuntaan, varjostusaika pienenee.

Tehtävä 5.19.

a) Kun rakettimoottori on käynnissä, polttoaineen sisäenergia muuntuu osittain rakettimoottorin ja vapautuvien kaasujen sisäenergiaksi ja osittain ulosvirtaavan kaasusuihkun liike-energiaksi.

Osa sisäenergian muutoksesta lämmittää rakettimoottorin osia. Ulosvirtaava kaasusuihku aiheuttaa raketin runkoon työntövoiman, joka tekee työtä rakettiin. Osa ulosvirtaavan kaasusuihkun liike-energiasta kasvattaa raketin mekaanista energiaa.

b) Raketin mekaaninen energia kasvaa, kun moottori on käynnissä, koska rakettiin tehdään silloin työtä.

c) gravitaatiovakio $\gamma = 6{,}67428 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

maapallon massa on $M = 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$

maapallon säde $R = 6\,378\,000\,\mathrm{m}$

raketin korkeus polttoaineen loppuessa
$r_1 = h_1 + R = 8\,000\,\mathrm{m} + 6\,378\,000\,\mathrm{m} = 6\,386\,000\,\mathrm{m}$

Maapallon gravitaatiokentän voimakkuus on

$$g_\mathrm{r} = \gamma \frac{M}{r_1^2} = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot \frac{5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6\,386\,000\,\mathrm{m})^2} = 9{,}7771\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \approx 9{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}.$$

d) Raketin etäisyys Maan keskipisteestä
$r_2 = h_2 + R = 4\,500\,000\,\text{m} + 6\,378\,000\,\text{m} = 10\,878\,000\,\text{m}.$

Koska ulkoisia voimia ei tarvitse huomioida, raketin mekaaninen energia säilyy. Kun polttoaine loppuu, ollaan alkutilanteessa eli 8 km:n korkeudella Maan pinnasta. Lopputilanteessa eli lakipisteessä raketin korkeus on 4 500 km ja pystysuuntainen nopeus on nolla. Raketti liikkuu pystysuunnassa, joten vaakasuuntainen nopeus on koko lennon ajan häviävän pieni.

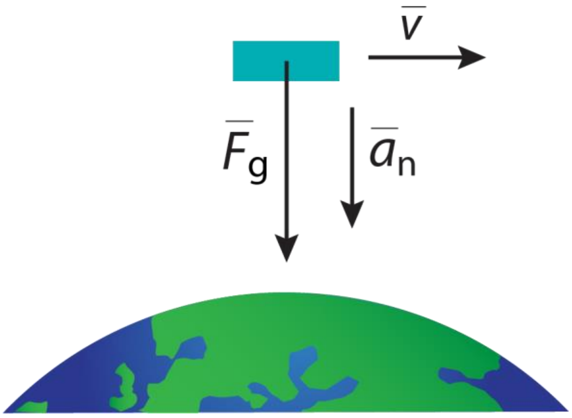
Kirjoitetaan mekaanisen energian säilymislain mukainen yhtälö ja ratkaistaan siitä raketin nopeus alkutilanteessa eli 8 km:n korkeudella.

$$
\begin{aligned}
E_{\text{pa}} + E_{\text{ka}} &= E_{\text{pl}} + E_{\text{kl}} \\
-\gamma \frac{mM}{r_1} + \frac{1}{2} m v_{\text{a}}^2 &= -\gamma \frac{mM}{r_2} + \frac{1}{2} m v_{\text{l}}^2 \\
-2\gamma \frac{M}{r_1} + v_{\text{a}}^2 &= -2\gamma \frac{M}{r_2} \\
v_{\text{a}} &= \sqrt{2\gamma \frac{M}{r_1} - 2\gamma \frac{M}{r_2}} \\
&= \sqrt{2\gamma M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \\
&= \sqrt{2 \cdot 6{,}67430 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}9723 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot \left(\frac{1}{6\,386\,000\,\text{m}} - \frac{1}{10\,871\,000\,\text{m}} \right)} \\
&= 7\,176{,}63\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 7{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{s}}.
\end{aligned}
$$

Raketin nopeus oli 7,2 km/s.

Tehtävä 5.20.

a)



$\bar{F}_g$ = maapallon satelliittiin kohdistama gravitaatiovoima

Voimakuvion pisteytys:

Kuvaan on merkitty tilanteessa vaikuttava voimavektori, kiihtyvyysvektori ja nopeusvektori oikeisiin suuntiin ja oikeille kohdilleen.
- gravitaatiovoima satelliitin keskipisteestä piirrettynä (1 p)
- normaalikiihtyvyys säteen suunnassa ja nopeus tangentin suuntaan (1 p)

Huom!

- Jos voimakuviossa on yksikin ylimääräinen voima, ei voimakuviosta voi saada pisteitä.
- Jos voimavektorin vaikutuspiste on väärin, esimerkiksi voima on piirretty irti kappaleesta sen vierelle tai eteen, voimavektorista ei anneta pisteitä.

b) kiertoradan korkeus *h* = 1 700 km

Maan säde *R* = 6 378 140 m

satelliitin kiertosäde
r = 1 700 000 m + 6 378 140 m = 8 078 140 m (1 p)

Satelliitti pysyy ympyräradallaan Maan gravitaatiovoiman $F=\gamma\frac{mM}{r^2}$ vaikutuksesta. Satelliitti liikkuu tasaisessa ympyräliikkeessä Maan ympäri, jolloin Newtonin II lain mukaan (1 p) säteen suunnassa

$F_\mathrm{g}=ma_\mathrm{n}$. (1 p)

Lasketaan satelliitin nopeus

$$\gamma\frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$\frac{\gamma M}{r}=v^2$$

$$\begin{aligned}v&=\sqrt{\frac{\gamma M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}674\,30\cdot10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\cdot5{,}9723\cdot10^{24}\ \mathrm{kg}}{8\,078\,140\mathrm{m}}}\\&=7\,024{,}541\mathrm{m/s}\\&\approx7\,020\mathrm{m/s}.\end{aligned}$$

(2 p)

c) Satelliitti liikkuu tasaista ympyräliikettä. (1 p) Kiertoajan aikana satelliitti kiertää yhden kierroksen Maan ympräri. (1 p) Nopeus b-kohdan mukaan. Kiertoaika Maan ympäri

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 8078140\,\text{m}}{7024{,}541484\,\text{m/s}} = 7225{,}589\,\text{s} \approx 120{,}4\,\text{min}. \qquad (2\text{ p})$$

d) Hyödynnetään c-kohdan yhtälöä $\frac{\gamma M}{r} = v^2$.

Satelliitti kulkee tasaista ympyräliikettä, jolloin satellliitin yhden kierroksen aikana kulkema matka on $s = 2\pi r = vt$. Sijoitetaan yllä olevaan liikeyhtälöön nopeus. Satelliitin kiertoaika Maan ympäri on

$$\gamma M = \left(\frac{s}{t}\right)^2 r = \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 r = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}} \qquad (1\text{ p})$$

Yhtälöstä nähdään, että etäisyyden *r* kasvaessa kiertoaika *t* pitenee. (1 p)

e) GEO-satelliitti sijaitsee noin 36 000 km:n etäisyydellä maanpinnasta ja LEO satelliitti 1 700 km:n etäisyydellä maanpinnasta. (1 p) Tiedonsiirtosignaali etenee valonnopeudella. Mitä suurempi on satelliitin etäisyys maanpinnasta, sitä suurempi on signaalin viive. Koska LEO-satelliitit sijaitsevat lähempänä maanpintaa kuin GEO-satelliitit, LEO-satelliittien kautta välitetyssä tiedonsiirrossa viive on pienempi kuin GEO-satelliittien kautta välitetyssä tiedonsiirrossa. (1 p)