4. Gravitaatiovoima

Tehtävä 4.1.

Oikeat vastaukset:

a) C

b) A

c) B

d) B

e) C

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.2.

a) Maan massa $m_1 = 5{,}9723 \cdot 10^{24}$ kg
Kuun massa $m_2 = 7{,}346 \cdot 10^{22}$ kg
Maan ja Kuun välimatka
$r = 384\,400$ km $= 384\,400\,000$ m
gravitaatiovakio $\gamma = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$

Gravitaatiolain mukaan Maa vetää Kuuta puoleensa voimalla

$$F_\mathrm{g} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{5{,}9723 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \cdot 7{,}346 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}}{(384\,400\,000\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 1{,}981670776 \cdot 10^{20}\ \mathrm{N} \approx 1{,}982 \cdot 10^{20}\ \mathrm{N}.$$

b) Gravitaatiolain mukaan kumpaankin kappaleeseen vaikuttaa yhtä suuri gravitaatiovoima, joten Kuu vetää maata puoleensa yhtä suurella voimalla kuin Maa Kuuta. $F_\mathrm{g} = 1{,}982 \cdot 10^{20}$ N

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.3.

a) Gravitaatiokentän voimakkuuteen vaikuttavat taivaankappaleen massa ja etäisyys taivaankappaleen keskipisteestä.

b) Phoboksen massa $M = 1{,}066 \cdot 10^{16}$ kg

Phoboksen keskimääräinen säde $r = 11{,}3\text{ km} = 11\,300\text{ m}$

gravitaatiovakio $\gamma = 6{,}67430 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

Gravitaatiokentän voimakkuus kuvaa, kuinka suuren kiihtyvyyden gravitaatiovoima aiheuttaa kappaleelle. Newtonin II lain mukaan gravitaatio voima aiheuttaa kiihtyyyden voiman suuntaan

$$F_{\text{g}} = ma.$$

Kun merkitään kiihtyvyyttä symbolilla g_{r}, niin

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^2} = \cancel{m}g_{\text{r}}$$

$$g_{\text{r}} = \gamma \frac{M}{r^2}.$$

Gravitaatiokentän voimakkuus Phoboksen pinnalla on noin

$$g_{\text{r}} = \gamma \frac{M}{r^2} = 6{,}67430 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}066 \cdot 10^{16}\text{ kg}}{(11300\text{ m})^2} = 0{,}005571935\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0{,}00557\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.4.

a) heilurin langan pituus l = 1,5 m

Heiluria voidaan tarkastella matemaattisena heilurina, sillä lanka on oletuksen mukaan massaton ja punnusta voidaan pitää pistemäisenä langan pituuden mittakaavassa.

Heilurin jaksonaika on

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}5\,\text{m}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2{,}456920\text{ s} \approx 2{,}5\text{ s.}$$

b) Matemaattisen heilurin jaksonaika on $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Yhtälöstä nähdään, että poikkeutuksen suuruus ei vaikuta jaksonaikaan.

c) Matemaattisen heilurin jaksonajan yhtälöstä nähdään, että punnuksen massa ei vaikuta jaksonaikaan.

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.5.

a) Massa aiheuttaa aika-avaruuden kaareutumisen.

b) Gravitaatiokentän muutokset liikkuvat avaruudessa gravitaatioaaltoina. Gravitaatioaallot etenevät valonnopeudella. Tämän vuoksi gravitaatiokentän muutokset eivät vaikuta heti kaukana avaruudessa.

Tehtävä 4.6

a) Gravitaatiovoiman voimakkuus kasvaa tasaisesti Maan keskipisteestä kohti Maan pintaa. Kun etäisyys pinnasta kasvaa, gravitaatiovoima heikkenee. Gravitaatiovoima on suurin Maan pinnalla.

b) Maan keskipisteessä Maan massa on jakautunut tasaisesti Maan keskipisteen ympärille. Siksi Maan gravitaatiokentän voimakkuus Maan keskipisteessä on nolla.

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.7.

a) Maan vetovoima vaikuttaa Kuuhun, kuten Kuun vetovoima Maahan. Jos Kuussa olisi meriä, myös siellä havaittaisiin vuorovesi-ilmiö.

b) Uuden kuun ja täysikuun aikana Maa, Kuu ja Aurinko ovat samassa linjassa. Tällöin vetovoimat vaikuttavat samaan suuntaan. Siksi vuorovesi-ilmiö on näinä hetkinä voimakkaampi kuin tavallisesti.

c) Vaikka Kuun vetovoima on selvästi heikompi kuin Auringon vetovoima, Kuun vetovoimalla on suurempi merkitys vuorovesi-ilmiöön. Kuu on lähempänä Maata kuin Aurinko ja tämän vuoksi Kuun vetovoima heikkenee suhteessa enemmän Maan halkaisijan matkalla. Kuun vetovoima on selvästi suurempi Maan Kuun puoleisella puolikkaalla. Auringon aiheuttama vetovoima on molemmilla puolen Maata lähes yhtä suuri. Tämä voimien ero selittää vuorovesi-ilmiön.

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.8.

Kuun etäisyys Auringosta r_1 = 1 au = 1 449,5979 · 10^9 m
Auringon massa m_1 = 1,989 · 10^{30} kg
Maan massa m_2 = 5,9723 · 10^{24} kg
Maan etäisyys Kuusta r_2 = 384 400 000 m

Lasketaan Auringon gravitaatiovoiman suhde Maan gravitaatiovoimaan

$$\frac{F_{G,\mathrm{A}}}{F_{G,\mathrm{M}}}=\frac{\cancel{\gamma}\dfrac{m_1\cancel{m}}{r_1^2}}{\cancel{\gamma}\dfrac{m_2\cancel{m}}{r_2^2}}=\frac{r_2^2 m_1}{r_1^2 m_2}=\frac{(384\ 400\ 000\ \mathrm{m})^2\cdot 1{,}989\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}{(149{,}5979\cdot 10^9\ \mathrm{m})^2\cdot 5{,}9723\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}=2{,}1989\approx 2{,}2.$$

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.9.

Rhean säde r = 764 000 m
gravitaatiokentän voimakkuus g_r = 0,265 m/s^2
gravitaatiovakio $\gamma = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

a) Kuu aiheuttaa kuun pinnalla olevalla kappaleelle gravitaatiovoiman, jolloin kappaleen kiihtyvyys on Newtonin II lain mukaan $F_g = ma$. Kiihtyvyys kuvastaa gravitaatiokentän voimakkuutta, jolloin $a = g_r$. Rhean massaksi saadaan

$$\gamma \frac{m_R \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} g_r$$

$$m_R = \frac{g_r r^2}{\gamma} = \frac{0{,}265\,\text{m/s}^2 \cdot (764\ 000\,\text{m})^2}{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} = 2{,}3175 \cdot 10^{21}\ \text{kg} \approx 2{,}32 \cdot 10^{21}\ \text{kg}.$$

b) Rhea oletetaan palloksi, jolloin Rhean keskitiheys on

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{2{,}2388 \cdot 10^{21}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi(764\,000\ \text{m})^3} = 1\,240{,}7\ \text{kg/m}^3 \approx 1\,200\ \text{kg/m}^3.$$

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.10.

gravitaatiovoima maapallon pinnalla G_1 = 2 060 N
Maan säde r_1 = 6 378 km
Kuun säde r_2 = 1 738 km
gravitaatiovakio $\gamma = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$
Maan massa $m_1 = 5{,}9723 \cdot 10^{24}$ kg
Kuun massa $m_2 = 7{,}3446 \cdot 10^{22}$ kg

a) Määritetään gravitaatiolain avulla kuumönkijän massa, kun mönkijä on maapallon pinnalla. Kuumönkijään kohdistuva gravitaatiovoima

$$G_1 = F_1.$$

Kuumönkijän massa on

$$F_1 = \gamma \frac{m_1 m}{R_1^{\,2}}$$

$$m = \frac{G_1 R_1^{\,2}}{\gamma m_1} = \frac{2060\,\text{N} \cdot (6\,378\,000\,\text{m})^2}{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}9723 \cdot 10^{24}\ \text{kg}} = 210{,}227\,\text{kg}.$$

Kuun mönkijään kohdistama gravitaatiovoima

$$G_2 = F_2 = \gamma \frac{m_2 m}{R_2^{\,2}} = \cancel{\gamma} \frac{m_2}{R_2^{\,2}} \frac{G_1 R_1^{\,2}}{\cancel{\gamma} m_1} = \frac{m_2 G_1 R_1^{\,2}}{m_1 R_2^{\,2}}$$

$$G_2 = \frac{7{,}346 \cdot 10^{22}\,\text{kg} \cdot 2060\,\text{N} \cdot (6\,378\,000\,\text{m})^2}{5{,}9723 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot (1\,738\,000\,\text{m})^2} = 341{,}2\,\text{N} \approx 341\,\text{N}.$$

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

b) Tarkastellaan, millä etäisyydellä maapallon aiheuttama gravitaatiovoima on yhtä suuri kuin Kuun aiheuttama gravitaatiovoima.

Merkitään etäisyyttä Maan keskipisteestä tunnuksella R. Merkitään Maan gravitaatiokentän aiheuttama voima F_G yhtä suureksi kuin Kuun gravitaatiokentän voimakkuus Kuun pinnalla G_2. Ratkaistaan etäisyys R.

$$F_G = G_2$$

$$\cancel{\gamma}\frac{m_1 \cancel{m}}{R^2} = \cancel{\gamma}\frac{m_2 \cancel{m}}{R_2^{\ 2}}$$

$$R^2 = \frac{m_1}{m_2} R_2^{\ 2}$$

$$R = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} R_2 = \sqrt{\frac{5{,}9723 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{7{,}346 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}} \cdot 1738\,000\,\mathrm{m} = 15\,670\,942{,}5\,\mathrm{m} \approx 15\,670\,\mathrm{km}.$$

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.11.

kahdeksan heilahduksen aika t = 13,6 s

a) Kun heilahdusaika määritetään useammasta heilahduksesta, mittausvirheen vaikutus pienenee ja mittaustuloksesta saadaan tarkempi.

b) Heilurin jaksonaika on yhden edestakaiseen heilahdukseen kulunut aika eli

$$T = \frac{t}{n} = \frac{13{,}6\,\text{s}}{8} = 1{,}7\,\text{s}.$$

c) Matemaattisen heilurin jaksonajalle on voimassa

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Heilurin langan pituudeksi saadaan a-kohdan tuloksen perusteella

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g}$$

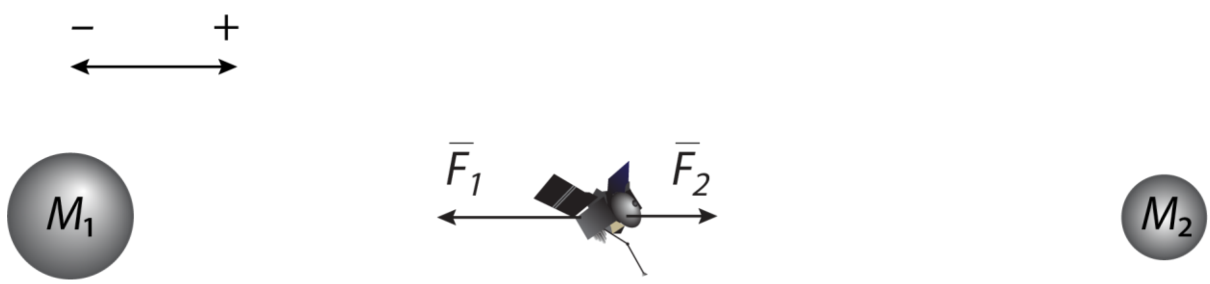
$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot(1{,}7\,\text{s})^2}{4\pi^2} = 0{,}7181\,\text{m} \approx 72\,\text{cm}.$$

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.12.

a) Merkitään avaruusluotaimen massaa tunnuksella *m.*
Taivaankappaleiden massat ovat M_1 ja M_2.
Luotaimen etäisyydet taivaankappaleisiin ovat r_1 ja r_2.

Avaruusluotain liikkuu taivaankappaleiden välissä, joten taivaankappaleiden gravitaatiokentät aiheuttavat luotaimeen vastakkaissuuntaiset voimat.



Taivaankappaleen 1 ja luotaimen välisen gravitaatiovoiman suuruus on $F_1 = \gamma \frac{mM_1}{r_1^2}$.

Taivaankappaleen 2 ja luotaimen välisen gravitaatiovoiman suuruus on $F_2 = \gamma \frac{mM_2}{r_2^2}$.

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Otetaan huomioon suuntasopimus. Newtonin II lain mukaan

$$\Sigma F = ma$$

$$-F_1 + F_2 = ma$$

$$-\gamma \frac{\cancel{m} M_1}{r_1^2} + \gamma \frac{\cancel{m} M_2}{r_2^2} = \cancel{m} a$$

$$a = \gamma \frac{M_2}{r_2^2} - \gamma \frac{M_1}{r_1^2}$$

$$a = \gamma \left(\frac{M_2}{r_2^2} - \frac{M_1}{r_1^2} \right).$$

Luotaimen kiihtyvyys taivaankappaleiden välissä on

$$a = \gamma \left(\frac{M_2}{r_2^2} - \frac{M_1}{r_1^2} \right).$$

b) Jos luotaimen tilalla olisi kolmas taivaankappale, sen massa vaikuttaisi kahden muun taivaankappaleen liikkeisiin. Tällöin kappaleen kiihtyvyyden ratkaiseminen olisi monimutkaista.

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.13.

Matemaattisen heilurin jaksonaika noudattaa yhtälöä

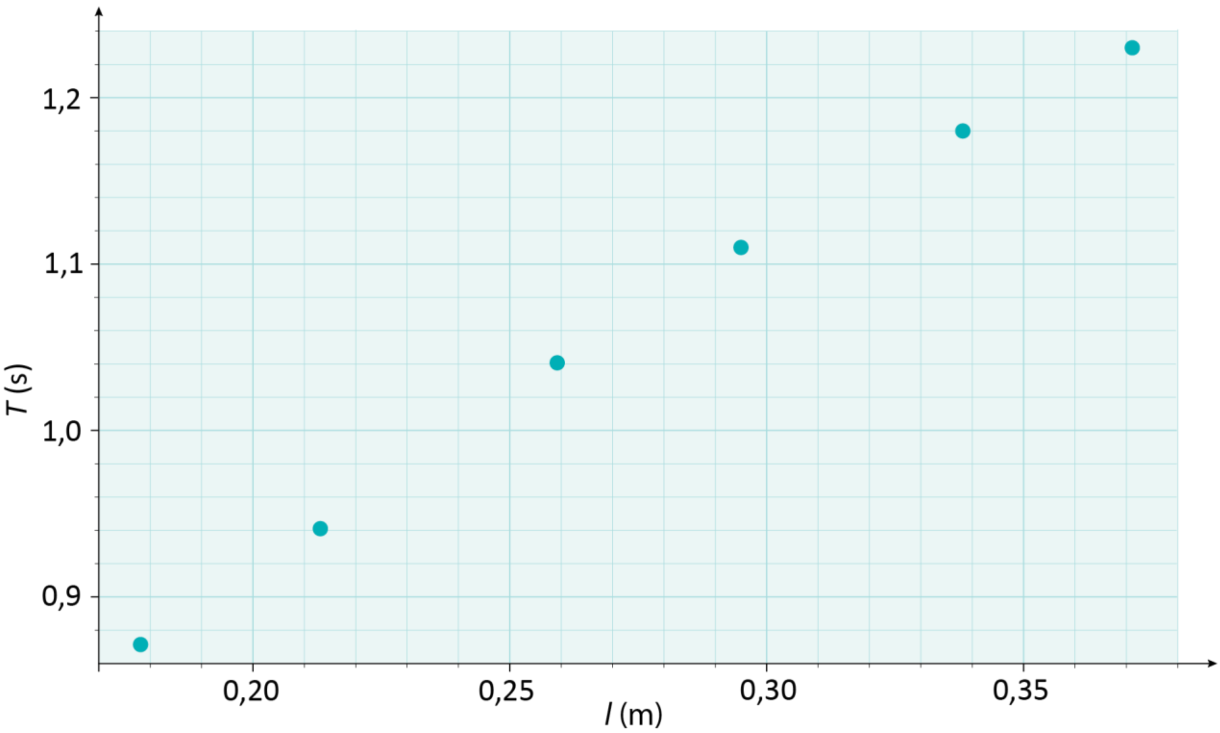
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Massa tai heilahduskulma eivät vaikuta heilurin jaksonaikaan.

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

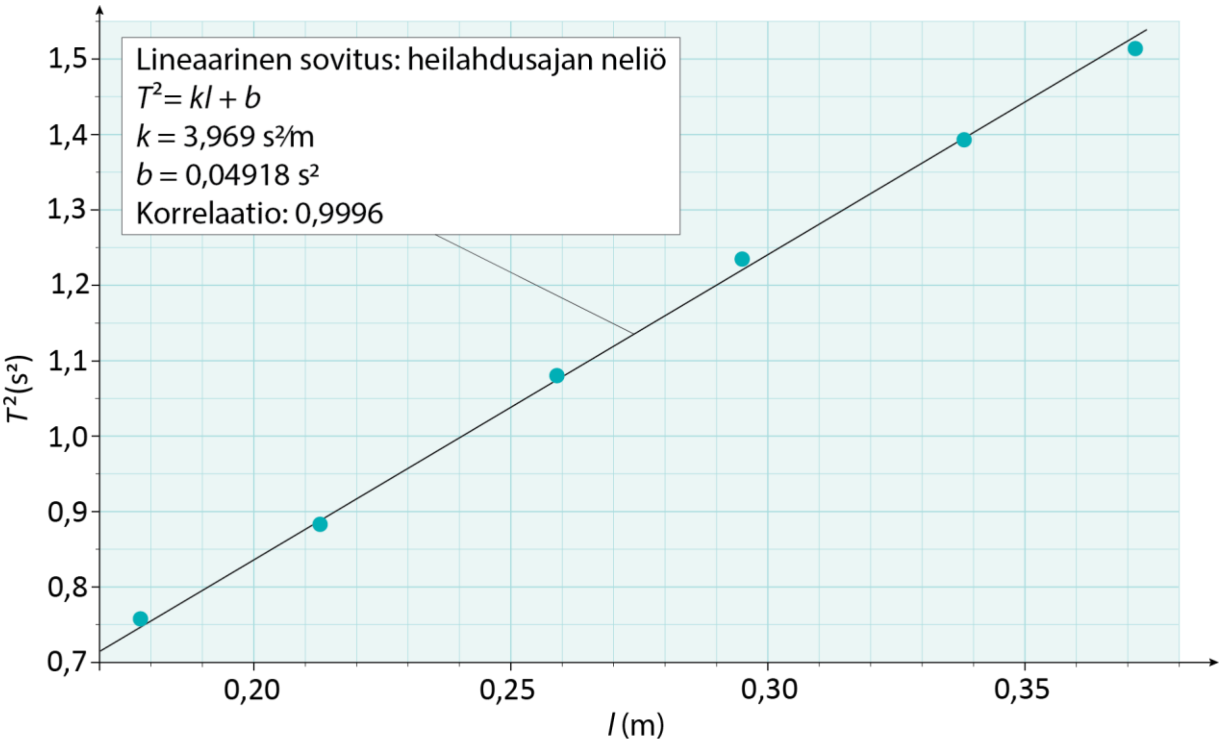
Tehtävä 4.14.

a)



Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

b)



Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

c) Punnusta voidaan tarkastella matemaattisena heilurina. Matemaattisen heilurin jaksonaika noudattaa yhtälöä

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Muokataan yhtälöä siten, että jaksonajan neliölle ja langan pituudelle tulee lineaarinen riippuvuus.

$$T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}l.$$

(l, T^2)-koordinaatiston mittauspisteisiin sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin on $\frac{4\pi^2}{g}$. b-kohdan mukaan saadaan

$$\frac{4\pi^2}{g} = 3{,}969\,\frac{\text{s}^2}{\text{m}}.$$

Putoamiskiihtyvyydeksi saadaan

$$g = \frac{4\pi^2}{3{,}969\,\frac{\text{s}^2}{\text{m}}} = 9{,}946\,69\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 9{,}95\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.15

Maan massa m
Maan säde r
Planeetan massa M

a) Newtonin II lain mukaisesti gravitaatiovoiman suunnassa $F_g = ma$. Kiihtyvyys kuvaa gravitaatiokentän voimakkuutta, jolloin $a = g_r$ eli

$$\gamma \frac{M\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} g_r$$

Maan gravitaatiokentän voimakkuus

$$g_r = \gamma \frac{M}{r^2}$$

Planeetan X pinnalla gravitaatiokentän voimakkuus on

$$g_{rX} = \gamma \frac{2M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \gamma \frac{2M}{\frac{r^2}{4}} = \gamma \frac{8M}{r^2} = 8\gamma \frac{M}{r^2} = 8g_r.$$

Toisen planeetan gravitaatiokentän voimakkuus on

8-kertainen Maan gravitaatiokenttään verrattuna.

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

b) Merkitään, että planeetan Y pinnalla gravitaatiokentän voimakkuus on yhtä suuri kuin Maan pinnalla.

$$g_\mathrm{r} = g_\mathrm{rY}$$

$$\cancel{\gamma}\frac{\cancel{M}}{r^2} = \cancel{\gamma}\frac{2\cancel{M}}{r_\mathrm{Y}^2}$$

$$r_\mathrm{Y}^2 = 2r^2$$

$$r_\mathrm{Y} = \sqrt{2}r.$$

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.16.

a) Amplitudi ei vaikuta heilahdusaikaan.

b) Kun lankaa lyhennetään, heilahdusaika lyhenee.

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.17.

pienten kuulien massa m_1 = 1,05 kg
suurten kuulien massa m_2 = 22,0 kg
kiertoakselin pituus r_k = 0,130 m
ison ja pienen kuulan välinen etäisyys r_e = 0,01 m

gravitaatiovakio $\gamma = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$

Pienen ja ison kuulan välillä vaikuttaa gravitaatiosta aiheutuva voima, joka aiheuttaa momenttia. Kiertoakselina on kvartsitanko. Molemmat momentit alkavat kiertää tankoa samaan suuntaan. Gravitaatiovoimien aiheuttama kokonaismomentti on

$$\Sigma M = F_\mathrm{g} r_\mathrm{k} + F_\mathrm{g} r_\mathrm{k} = 2F_\mathrm{g} r_\mathrm{k}$$

$$\Sigma M = 2\gamma \frac{m_1 m_2}{r_\mathrm{e}^2} r_\mathrm{k}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M &= 2 \cdot 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{1{,}05\,\mathrm{kg} \cdot 22{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}13\mathrm{m}}{(0{,}01\,\mathrm{m})^2} \\ &= 4{,}008\,58 \cdot 10^{-6}\mathrm{Nm} \\ &\approx 4{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Nm}.\end{aligned}$$

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.18.

moduulin etäisyys Marsin pinnasta h = 1 500 000 m
Marsin massa M = 0,107 · 5,9723 · 10^{24} kg
Marsin säde R = 3 390 km

a) Koska luotain lähetetään samalla nopeudella taaksepäin, kun se etenee ennen lähettämistä, on nopeuksien vektorisumma nolla ja luotaimen nopeus Marsin pinnan suhteen on nolla. Luotaimeen vaikuttaa vain Marsin paino, joten luotain on laukaisun jälkeen kiihtyvässä liikkeessä kohti Marsin keskipistettä.

b) Newtonin II lain mukaan luotaimeen vaikuttavat voimat, kun luotain on liikkeessä laukaisun jälkeen

$$F_g = ma.$$

Luotaimen kiihtyvyys on tällöin

$$\gamma \frac{M\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}a$$

$$\gamma \frac{M\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}a$$

$$a = \gamma \frac{M}{r^2} = \gamma \frac{M}{(R+h)^2} = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \frac{0{,}107 \cdot 5{,}9723 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(3\,390\,000\ \text{m} + 1\,500\,000\ \text{m})^2}$$

$$= 1{,}783\,665\ \text{m/s}^2 \approx 1{,}78\ \text{m/s}^2.$$

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.19

Ceresin halkaisija d = 975 km
kiven pudotusmatka s = 3,0 m
kiven pudotusaika t = 4,75 s
heilurin pituus l = 1 m

Kiven kiihtyvyys oletetaan pysyvän vakiona. Lasketaan kiven kiihtyvyys tasaisen kiihtyvyyden mallista.

$$s = \frac{1}{2}at^2$$
$$a = \frac{2s}{t^2}$$

Lasketaan gravitaatiolain avulla gravitaatiokentän aiheuttama kiihtyvyys asteroidin pinnalla.

$$\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^2} = \cancel{m}a$$
$$a = \gamma \frac{M}{r^2}.$$

Merkitään kiihtyvyydet yhtä suuriksi ja määritetään Ceresin massa.

$$\gamma \frac{M}{r^2} = \frac{2s}{t^2}$$
$$M = \frac{2sr^2}{\gamma t^2} = \frac{2 \cdot 3\,\mathrm{m} \cdot (487{,}5\,\mathrm{km})^2}{6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot (4{,}75\,\mathrm{s})^2} = 9{,}469\,07 \cdot 10^{20}\,\mathrm{kg} \approx 9{,}5 \cdot 10^{20}\,\mathrm{kg}.$$

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.20.

a) LIGO mittaa suoraan painovoima-aaltojen aiheuttamaa ilmiötä eli suhteellista venymää järjestelmässä kulkevien valonsäteiden kulkemassa matkassa. Vuoden 1974 havainnossa nähtiin pulsarien menettävän energiaa, mutta havainto ei sulje pois sitä mahdollisuutta, että tämä energia poistuu jollakin muulla tavalla kuin painovoima-aaltoina.

b) Auringon massa $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg
valon nopeus $c = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}$ m/s
energian poistumisaika $t = 0{,}015$ s
Auringon säteilyteho on $P = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ W.

Kun kappaleet yhdistyivät, energiaa vapautui kolmen Auringon massan verran, eli

$$E = mc^2$$

$$E = 3Mc^2 = 3 \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg} \cdot \left(2{,}99792458 \cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 5{,}362872 \cdot 10^{47}\,\text{J}.$$

Tämä energia määrä poistui nopeasti, 0,015 sekunnissa. Teho on energia jaettuna ajalla, eli

$$P = \frac{E}{t} = \frac{5{,}362872 \cdot 10^{47}\,\text{J}}{0{,}015\,\text{s}} = 3{,}5752 \cdot 10^{49}\,\text{W} \approx 3{,}6 \cdot 10^{49}\,\text{W}.$$

Kun tehoa verrataan Auringon tehoon, saadaan

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

$$\frac{3{,}5752\cdot 10^{49}\text{ W}}{3{,}9\cdot 10^{26}\text{ W}}=0{,}9167\cdot 10^{23}\approx 1\cdot 10^{23}.$$

Gravitaatioaaltojen teho vastaa 10^{23} Auringon tehoa.

c) Kun kappaleet kiertävät toisiaan, ajanhetkellä 0,35 s niiden välinen etäisyys on $4R_\text{S}$ eli neljä Schwarzschildin sädettä. Aineiston mukaan kappaleelle, jonka massa on noin 62 Auringon massaa, Schwarzschildin säde on noin 180 km. Toisiaan kiertävien kappaleiden välinen etäisyys on näin ollen vain noin 700 km. Tämä sulkee pois tavalliset tähdet ja valkoiset kääpiöt, sillä niiden säteet ovat paljon tätä etäisyyttä suurempia. Kappaleet voisivat olla neutronitähtiä, mutta niiden massat eivät voi olla 30 kertaa Auringon massan suuruisia, kuten LIGO havaitsi. Kappaleiden on siis oltava mustia aukkoja.

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

Tehtävä 4.21.

punnuksen massa m = 0,560 kg

a) C

b) D

c) Heilurin jaksonaika T = 1,6 s.

Punnusta voidaan tarkastella matemaattisena heilurina, jonka jaksonaika on

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. (1 p)

Punnuksen langan pituus saadaan laskettua jaksonajan perusteella.

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot (1{,}6\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2} = 0{,}6361\,\mathrm{m} \approx 0{,}64\,\mathrm{m}$$ (2 p)

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

d) ISS etäisyys maanpinnalta h = 408 000 m

maapallon säde R = 6 378 km

gravitaatiovakio $\gamma = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

maapallon massa M = 5,9723·1 024 kg

Punnuksen etäisyys maapallon keskipisteestä
$r = R + h$ (1 p)

Kun punnus on ISS:lla, vaikuttaa punnukseen gravitaatiovoima

$$F_{\text{g}} = \gamma \frac{Mm}{r^2} = \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2} = 6{,}67430 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}9723 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 0{,}560\,\text{kg}}{(6\,378\,140\,\text{m} + 408\,000\,\text{m})^2}$$
$$= 4{,}847\,\text{N} \approx 4{,}8\,\text{N}.$$

(3 p)

Jos ei ole huomioitu korkeutta h, maksimissa (2 p)

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.

e) Punnuksen putoamiskiihtyvyys Kuussa saadaan taulukosta

g_{K} = 1,622 m/s^2 (1 p)

Vastaavan matemaattisen heilurin jaksonaikan Kuun pinnalla on c-kohdassa saadun pituuden mukaan

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{\text{K}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}521\,29\,\text{m}}{1{,}622\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 3{,}9347\,\text{s} \approx 3{,}9\,\text{s}.$$ (3 p)

(Jos c-kohdassa langan pituus väärin, ei pistemenetyksiä tässä kohdassa)

Julkaiseminen sallittu vain koulun suljetussa verkossa.