3. Tasainen ympyräliike

Tehtävä 3.1.

Oikeat vastaukset:

a) A

b) B

c) B

d) C

e) A

Tehtävä 3.2.

a) Mittarilukema kertoo, kuinka monta kierrosta kampiakseli pyörähtää minuutissa. Tehtävän tilanteessa kierrosluku on 2,6 · 1 000 RPM = 2 600 RPM.

b) Moottorin kierrostaajuus kuvaa, kuinka monta kierrosta kampiakseli pyörähtää sekunnissa.

Kierrostaajuus on $n = 1000 \cdot 2{,}6 \frac{1}{\text{min}} = \frac{2600}{60} \frac{1}{\text{s}} = 43{,}33333 \frac{1}{\text{s}} \approx 43 \frac{1}{\text{s}}$.

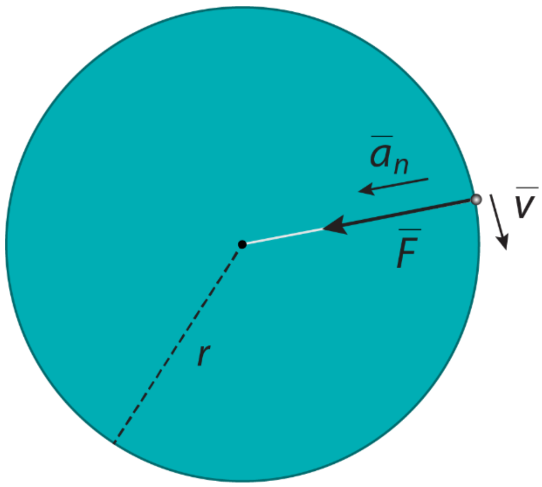
c) Jaksonaika kertoo, kuinka pitkä aika yhteen kampiakselin kierrokseen kuluu. Jaksonaika on

$$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{43{,}33333 \frac{1}{\text{s}}} = 0{,}02307692\,\text{s} = 23{,}07692\,\text{ms} \approx 23\,\text{ms}.$$

Tehtävä 3.3.

ympyräradan säde $r = 0{,}61$ m
narun jännitysvoima $F = 4{,}4$ N
kuulan massa $m = 35$ g

Piirretään voimakuvio



Kuula on tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa suunnat huomioituna on

$$F = ma_{\mathrm{n}}$$

$$F = m\frac{v^2}{r}.$$

Kuulan nopeus on

$$v = \sqrt{\frac{Fr}{m}} = \sqrt{\frac{4{,}4\,\mathrm{N}\cdot 0{,}61\,\mathrm{m}}{0{,}035\,\mathrm{kg}}} = 8{,}757\,\mathrm{m/s} \approx 8{,}8\,\mathrm{m/s}.$$

Vastaus: 8,8 m/s

Tehtävä 3.4.

Ympyräliikkeessä keskipistettä kohti suuntautunut voima pitää kappaleen radallaan. Liikkeen pyrkimys keskipisteestä poispäin ei aiheudu voimasta vaan siitä, että liike jatkuu alkuperäiseen suuntaan, ellei mikään voima vaikuta. Tätä periaatetta kutsutaan jatkavuuden laiksi.

Tehtävä 3.5.

a) Liike on yksiulotteista.

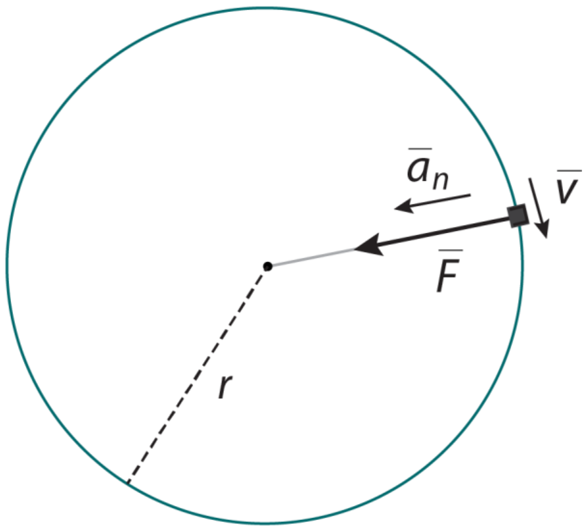
b) Liike on kolmiulotteista.

c) Liike on kaksiulotteista.

Tehtävä 3.6.

ympyräradan säde r = 18 m
haluttu kiihtyvyys a_{n} = 7,8 g

Kyseessä on tasainen ympyräliike. Piirretään voimakuvio.



$\overline{F} =$ kosmonautin ympyräradalla pitävä voima

Tasaisessa ympyräliikkeessä kosmonauttiin aiheutuu voima $\overline{F}$, joka pitää kosmonautin ympyräradalla. Newtonin II lain mukaisesti säteen suunnassa suunnat huomioituina

$$F = ma_{\mathrm{n}} = m\frac{v^2}{r}$$

Haluttu normaalikiihtyvyyden arvo on 7,8 kertaa putoamiskiihtyvyys. Ratkaistaan normaalikiihtyvyyden yhtälöstä ratanopeus.

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r}$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{a_\mathrm{n} r} \\ &= \sqrt{7{,}8 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 18\,\mathrm{m}} \\ &= 37{,}112\,\mathrm{m/s} \approx 37\ \mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

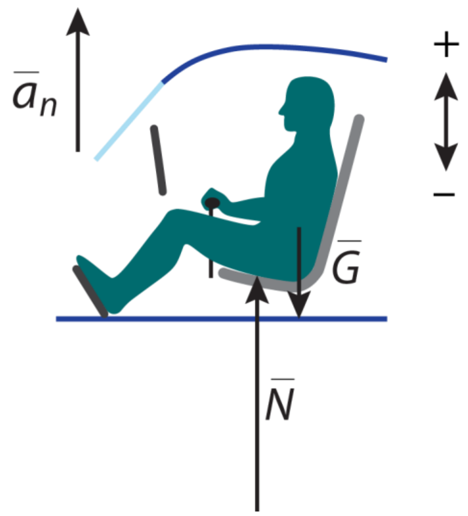
Tehtävä 3.7.

a) lentokoneen nopeus v = 290 km/h
kaarevuussäde r = 150 m

Lentokoneen normaalikiihtyvyys nousussa on

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{290}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{150\,\mathrm{m}} = 43{,}26132\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 43\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) Lentäjä tuntee painonsa suurempana, koska lentäjä painautuu nousun alussa kohti istuinta. Piirretään tilanteesta voimakuvio.



$\bar{G}$ = lentäjän paino

$\bar{N}$ = istuimen lentäjään kohdistama tukivoima

Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioituina

$N - G = ma_{\text{n}}$

Istuimen tukivoima on

$N = ma_{\text{n}} + G$

Verrataan istuimen tukivoimaa lentäjän painoon.

$$\frac{N}{G} = \frac{ma_{\text{n}} + G}{G} = \frac{ma_{\text{n}} + mg}{mg} = \frac{a_{\text{n}} + g}{g} = \frac{43{,}26132\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5{,}409920 \approx 5{,}4$$

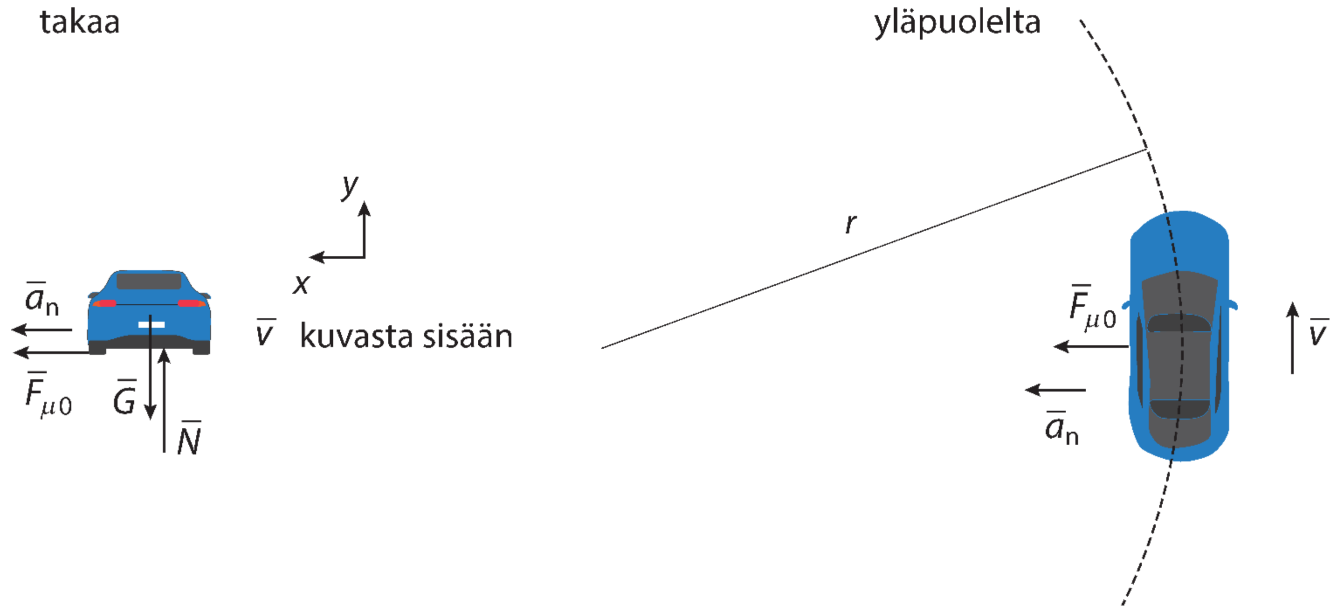
Vaakalennossa istuimen tukivoima on yhtä suuri kuin lentäjän paino, joten lentäjä tuntee painonsa

5,4-kertaiseksi, kun lentokone kääntyy nousuun.

Tehtävä 3.8.

auton nopeus v = 62 km/h
ympyräradan säde r = 41 m
auton massa m = 1 410 kg

Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



$\bar{G}$ = auton paino

$\bar{N}$ = tienpinnan tukivoima

$\bar{F}_{\mu 0}$ = lepokitka

Auto on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan säteen suunnassa suunnat huomioituina on voimassa

$$F_{\mu 0} = ma_\mathrm{n}.$$

Kitkalle on voimassa $F_\mu = \mu N$ ja vaakasuoralla tiellä tukivoimalle $N = G = mg$. Tällöin

$$\mu N = ma_\mathrm{n}$$

$$\mu \cancel{m} g = \cancel{m}\frac{v^2}{r}.$$

Lepokitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{v^2}{gr} = \frac{\left(\frac{62}{3{,}6}\mathrm{m/s}\right)^2}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 41\,\mathrm{m}} = 0{,}737 \approx 0{,}74.$$

Tehtävä 3.9.

renkaiden ja lattian välinen kitkakerroin μ = 0,58
ympyräradan säde r = 3,5 m
putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Auto kiertää tasaisessa ympyräliikkeessä ympyrärataa, jolloin Newtonin II lain mukaan säteen suunnassa on voimassa $F_\mu = ma_\mathrm{n}$.

Vaakasuoralla pinnalla $N = G = mg$. Kitkalle $F_\mu = \mu N$. Auton nopeudeksi saadaan

$$\mu \cancel{m} g = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = \mu g r$$

$$v = \sqrt{\mu g r} = \sqrt{0{,}58 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 3{,}5\,\mathrm{m}} = 4{,}4625\,\mathrm{m/s} \approx 4{,}5\,\mathrm{m/s}.$$

b) Edellisen kohdan nopeus on suurin mahdollinen nopeus, jolla auto vielä pysyy ympyräradalla. Koska auto kulkee tasaisessa ympyräliikkeessä, on yhteen kierrokseen kulunut aika

$$s = vt$$

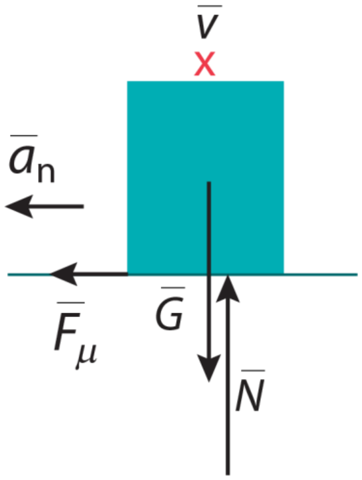
$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\mu g r}} = \frac{2\pi \cdot 3{,}5\,\mathrm{m}}{\sqrt{0{,}58 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 3{,}5\,\mathrm{m}}} = 4{,}9279\,\mathrm{s} \approx 4{,}9\,\mathrm{s}.$$

Vastaus: a) 4,5 m/s b) 4,9 s

Tehtävä 3.10.

ympyräradan säde r = 18 m
auton nopeus v = 21 km/h

a) Tarkastellaan tölkkiin vaikuttavia voimia tölkin takaa katsottuna



$\overline{G}$ = tölkin paino
$\overline{N}$ = auton katon tölkkiin kohdistama tukivoima
$\overline{F}_\mu$ = tölkin ja auton katon välinen lepokitka

Nopeus kuvassa eteenpäin.

Tölkin nopeus on kuvassa katsojasta poispäin. Tätä kuvataan punaisella x-merkillä.

b) Tarkastellaan lepokitkan suurinta arvoa eli täysin kehittynyttä lepokitkaa. Tölkki on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan vaaka- ja pystysuunnassa suunnat huomioituna

$$x: F_{\mu} = ma_{\mathrm{n}}$$
$$y: N - G = 0.$$

Kitkalle $F_{\mu} = \mu N$ ja $a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{r}$.

Saadaan
$$x: \mu N = m\frac{v^2}{r}$$
$$y: N = G.$$

Painolle $G = mg$. Lepokitkakertoimen suurin arvo on

$$\mu \cancel{m} g = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

$$\mu = \frac{v^2}{gr} = \frac{\left(\frac{21}{3{,}6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 18\,\mathrm{m}} = 0{,}1927 \approx 0{,}19.$$

c) Jotta tölkki pysyisi katolla täytyy b-kohdan mukaan lepokitkan suurimmalle arvolle olla voimassa

$$F_{\mu} = m\frac{v^2}{r}.$$

Jos auton nopeus ja tölkin massa eivät muutu, on lepokitka kääntäen verrannollinen ympyräradan säteeseen. Jos radan sädettä kasvatetaan, lepokitka voi olla pienempi ja tölkki pysyy silti katolla. Niinpä tölkki pysyy katolla, jos radan sädettä kasvatetaan.

Vastaus: b) 0,19

Tehtävä 3.11.

a) Avaruusaseman pyöriminen aiheuttaa astronautteihin tukivoiman, joka pitää astronautit ympyränmuotoisella radalla. Newtonin II mukaan säteen suunnassa tukivoima aiheuttaa normaalikiihtyvyyden $N = ma_n$.

Jotta saavutetaan painovoiman vaikutusta vastaavat olosuhteet, kappaleisiin kohdistuvan tukivoiman N tulee olla yhtä suuri kuin Maassa. Tukivoiman N suuruus on siis yhtä suuri kuin Maassa vallitseva painovoima G, saadaan kiihtyvyydeksi

$$G = m\frac{v^2}{r}$$

$$\cancel{m}g = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

$$g = \frac{v^2}{r}$$

Astronautti etenee tasaisessa ympyräliikkeessä nopeudella v, jolloin astronautin kulkema matka on $s = vt$. Yhden kierroksen aikana astronautin kulkema matka on $s = 2\pi r$ ja kierrosaika on T. Ratkaistaan kiihtyvyyden yhtälöstä nopeus ja sijoitetaan kierrostaajuus yhtälöön.

$$s = vt \quad \| \quad v = \sqrt{gr}$$

$$2\pi r = \sqrt{gr}T$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{gr}}{2\pi r}$$

$$n = \frac{\sqrt{\frac{g}{r}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{9{,}81\,\text{m/s}^2}{37\,\text{m}}}}{2\pi} = 0{,}08195\,1/\text{s} \approx 4{,}92\text{ rpm.}$$

b) Kirjoitetaan astronauttiin vaikuttavan tukivoiman suuruus.

$$N = ma_n$$

$$N = m\frac{v^2}{r}.$$

a-kohdan mukaan nopeus $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$.

Tukivoimaksi saadaan

$$N = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}.$$

Tukivoiman suuruus on sitä suurempi, mitä suurempi säde on. Tukivoima siis pienenee mitä lähemmäksi avaruusaseman keskustaa astronautti liikkuu.

Tehtävä 3.12.

ympyräradan säde r = 0,56 m
auton korkeus radan alimpaan kohtaan
nähden h = 0,32 cm
auton massa m = 48 g

a) Tarkastellaan tilannetta mekaanisen energian säilymislain avulla, jossa paikoiltaan lähteneen auton potentiaalienergiaa muuntuu auton liike-energiaksi. Sovitaan, että auton potentiaalienergian nollataso on radan alimmassa kohdassa. Mekaanisen energian säilymislain mukaan

$$\cancel{E}_{ka} + E_{pa} = E_{kl} + \cancel{E}_{pl}$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

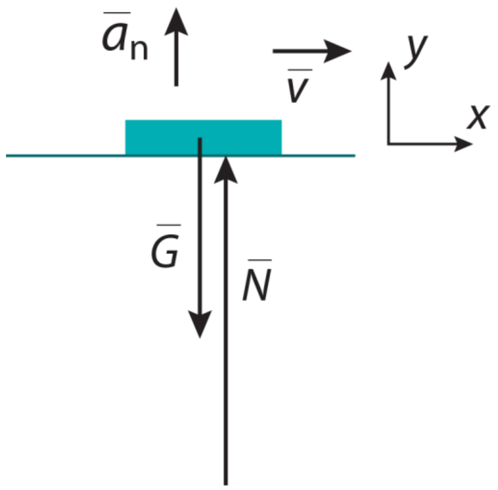
$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Auton nopeus radan alimmassa kohdassa on

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 0{,}32\,\text{m} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2} = 2{,}50567\,\text{m/s} \approx 2{,}5\,\text{m/s}.$$

b)



$\bar{G} =$ auton paino

$\bar{N} =$ tienpinnan autoon kohdistama tukivoima

Auto etenee radan alimmassa kohdassa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioituna

$$N - G = ma_n$$

Painolle $G = mg$

$$N = m\frac{v^2}{r} + mg.$$

Käytetään a-kohdassa laskettua nopeutta. Tienpinnan autoon kohdistama tukivoima on

$$N = m\frac{2gh}{r} + mg = mg\left(\frac{2h}{r} + 1\right)$$

$$N = 48 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 0{,}32\ \text{m}}{0{,}56\ \text{m}} + 1\right) = 1{,}0090\ \text{N} \approx 1{,}0\ \text{N}.$$

c) Autoon vaikuttava tukivoima riippuu auton lähtökorkeudesta.

$$N = mg\left(\frac{2h}{r} + 1\right)$$

Yhtälöstä nähdään, että tukivoima on suoraan verrannollinen auton lähtökorkeuteen ja kääntäen verrannollinen ympyräradan säteeseen. Mitä korkeammalta auto päästetään irti, sitä suurempi on radan autoon kohdistama tukivoima. Mitä suurempi on ympyräradan säde, sitä pienempi on radan autoon kohdistama tukivoima.

Tehtävä 3.13.

jääpalan lähtökorkeus *h*
ympyräradan säde $r = 0{,}12$ m

Jääpala voi irrota kohdassa, jossa rata alkaa kaareutua alaspäin. Kun jääpala on juuri irtoamaisillaan radasta, radan jääpalaan kohdistama tukivoima on nolla eli $N = 0$ N. Jääpala on tällöin ympyräliikkeessä ja jääpalaan kohdistuu vain jääpalan paino. Newtonin II lain mukaan ympyräradan säteen suunnassa

$$\begin{aligned} G &= ma_\mathrm{n} \\ mg &= ma_\mathrm{n} \\ g &= \frac{v^2}{r}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan jääpalan nopeutta mekaanisen energian säilymislain mukaan ja sovitaan potentiaalienergian nollatasoksi kohta, jossa jääpala on irtoamassa radasta. Jääpala lähtee liikkeelle paikaltaan. Mekaanisen energian säilymislain mukaan

$$\begin{aligned} E_\mathrm{pa} &= E_\mathrm{kl} \\ \cancel{m}gh &= \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \\ v^2 &= 2gh. \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu nopeuden neliö ympyräliikkeen lausekkeeseen, jolloin

$$\cancel{g} = \frac{2\cancel{g}h}{r}$$

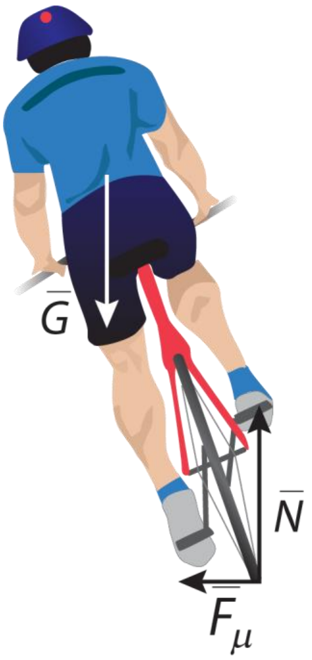
$$h = \frac{r}{2} = \frac{0{,}12\,\mathrm{m}}{2} = 6{,}0\,\mathrm{cm}.$$

Jääpala voidaan päästää liukumaan korkeudelta 6,0 cm.

Tehtävä 3.14

r = 15 m
v = 36,0 km/h = 10,0 m/s

Polkupyöräilijä on tasaisessa ympyräliikkeessä. Pyöräilijään vaikuttava voiman momentti on nolla, jos kokonaisvoiman vaikutussuora kulkee pyöräilijän painopisteen kautta.



$\overline{G} =$ paino

$\overline{N} =$ tienpinnan tukivoima

$\overline{F}_\mu =$ tienpinnan ja renkaan välinen kitka

Pystysuunnassa voimien summa on Newtonin II lain mukaisesti nolla. Tällöin pystysuunnassa on voimassa

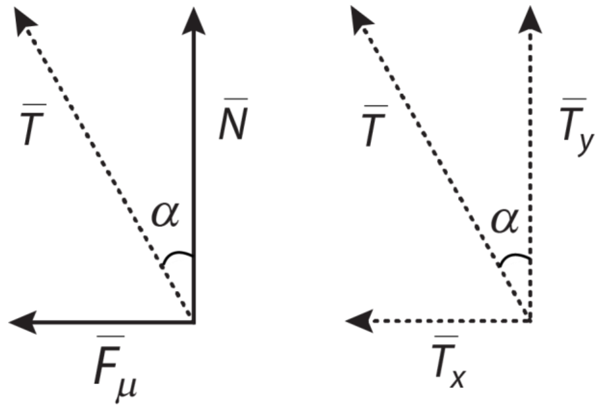
$N - G = 0$

$N = G = mg$

Kitka pitää polkupyöräilijan ympyräradalla, jolloin säteen sunnassa

$F_\mu = ma_{\text{n}}.$

Tienpinnan kokonaisvoima *T* muodostuu vaakasuuntaan olevasta kitkasta ja pystysuuntaan olevasta pinnan tukivoimasta *N*.



Jaetaan komponentteihin pinnan kokonaisvoima *T*.

$$x: T_x = T\sin\alpha = F_\mu$$
$$y: T_y = T\cos\alpha = G.$$

Sijoitetaan lausekkeet liikeyhtälöistä

$$x: T\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$$
$$y: T\cos\alpha = mg.$$

Kulman α ratkaisemisen helpottamiseksi hyödynnetään trigonometristen määritelmien yhteyttä $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Tähän päästään, kun edellä saaduista yhtälöistä ylempi yhtälö jaetaan alemmalla.

$$\frac{\cancel{T}\sin\alpha}{\cancel{T}\cos\alpha} = \frac{\cancel{m}\frac{v^2}{r}}{\cancel{m}g}$$

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{rg} = \frac{(10{,}0\,\mathrm{m/s})^2}{15\,\mathrm{m}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}$$

$$\alpha = 34{,}199^\circ \approx 34^\circ$$

Tehtävä 3.15.

a) Kun purkki on tasaisessa ympyräliikkeessä, styroksinpala siirtyy kohti ympyrän keskipistettä.

b) Vedellä on suurempi tiheys kuin styroksilla. Kun vesiastia on ympyräliikkeessä, vesi pakkautuu astian ulkoreunaan. Ympyräliikkeessä tiheämmät aineet pakkautuvat astian ulkoreunaan, jolloin styroksipala jää sisäreunaan. Kyseessä on kiihtyvyysanturi, joka mittaa normaalikiihtyvyyden suuntaa.

Tehtävä 3.16.

c) Tarkastellaan ämpärissä olevaan pyyhekumiin kohdistuvia voimia rajatapauksessa, jossa ämpäri on ympyräliikkeen yläasennossa ja ämpäri ei kohdista tukivoimaa pyyhekumiin. Newtonin II lain mukaan

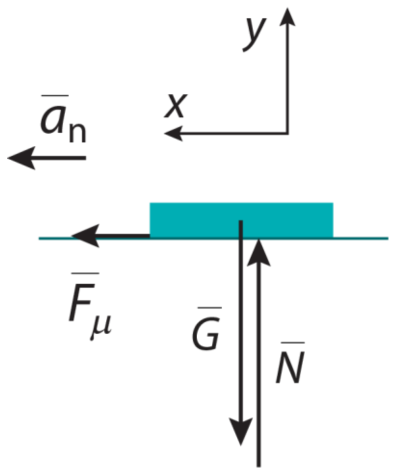
$$G = ma_{\mathrm{n}}$$
$$\cancel{m}g = \cancel{m}a_{\mathrm{n}}$$
$$g = a_{\mathrm{n}}.$$

Määritetään nopeus, jolla pyyhekumi vielä pysyy ämpärissä

$$g = \frac{v^2}{r}$$
$$v = \sqrt{gr}.$$

Tehtävä 3.17.

a)



$\bar{G}=$ paino

$\bar{N}=$ alustan tukivoima

$\bar{F}_\mu=$ alustan ja prikan välinen lepokitka

Tarkastellaan lepokitkan suurinta arvoa eli täysin kehittynyttä lepokitkaa. Prikka on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan vaaka- ja pystysuunnassa suunnat huomioituna

x-suunnassa $F_\mu = ma_n$

ja y-suunnassa $N - G = 0$.

Kitkalle $F_\mu = \mu N$ ja $a_n = \frac{v^2}{r}$. Vaakasuunnan ja pystysuunnan yhtälöt voidaan kirjoittaa

x-suunnassa $\mu N = m\frac{v^2}{r}$

ja y-suunnassa $N = G$.

Painolle $G = mg$.

Ratkaistaan vaakasuunnan yhtälöstä lepokitkakertoimen arvo.

$$\mu \cancel{m} g = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

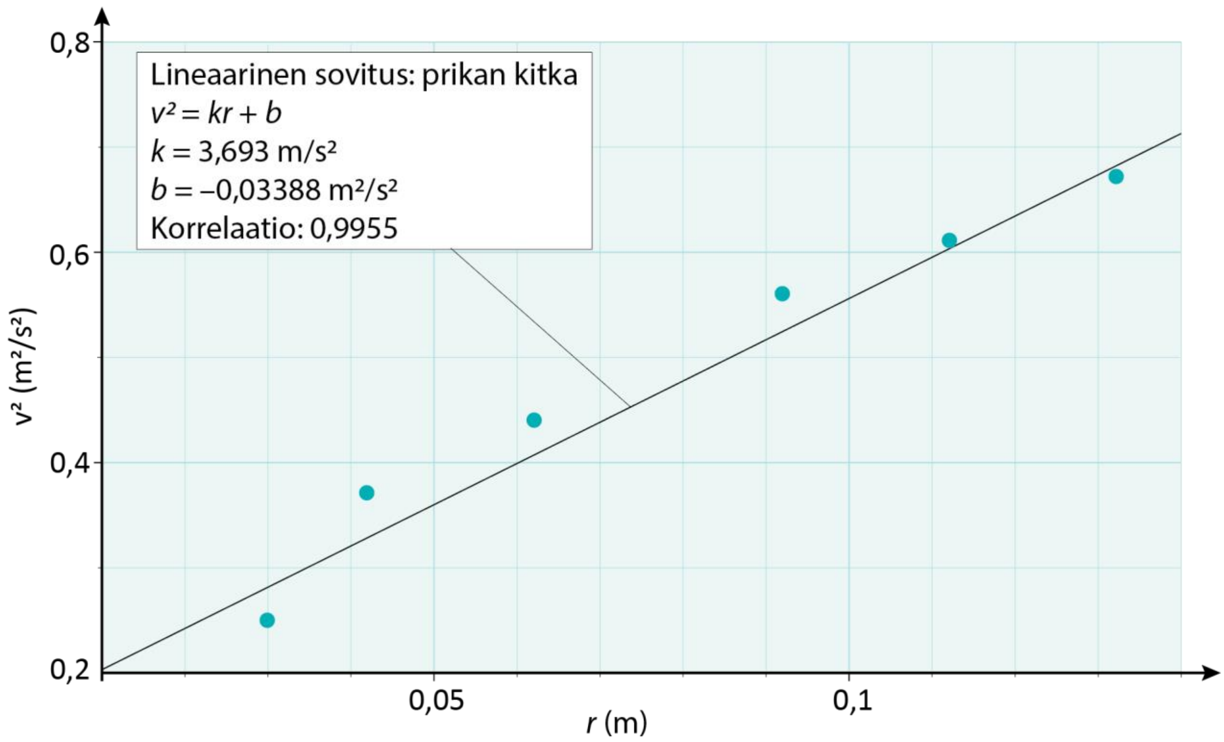
$$\mu = \frac{v^2}{gr}$$

b) Edellisen kohdan mukaan ympyräradan säteelle *r* ja prikan nopeuden *v* välille saadaan yhtälö

$$v^2 = \mu g r.$$

Prikan tasaisen ympyräliikkeen nopeuden neliö ja radan säde ovat suoraan verrannollisia.

c) Koska edellisen kohdan mukaan prikan tasaisen ympyräliikkeen nopeuden neliö on suoraan verrannollinen radan säteeseen, on (r, v^2)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin $k = \mu g$. Määritetään kulmakerroin



μg = 3,693 m/s^2.

Prikan ja alumiinilevyn välinen lepokitkakertoimen arvo on

$$\mu = \frac{3{,}693\,\mathrm{m/s^2}}{g} = \frac{3{,}693\,\mathrm{m/s^2}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}376 \approx 0{,}38.$$

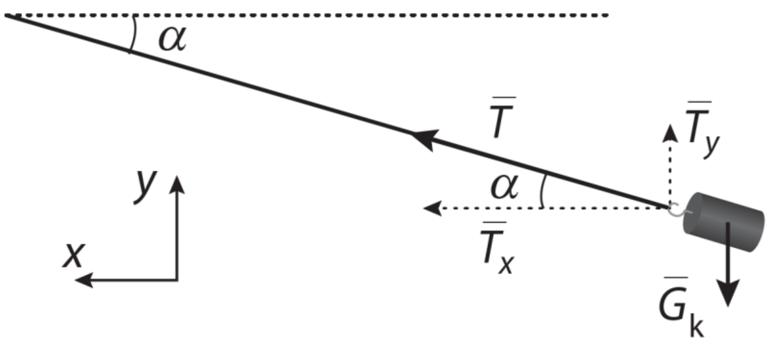
Tehtävä 3.18.

korkin massa m_k = 9,3 g
punnuksen massa m_p = 94,8 g
putken yläpuolisen narun pituus l = 0,212 m

a) Jotta alempi punnus pysyisi paikallaan, on narun jännitysvoiman oltava yhtä suuri kuin punnuksen paino. Narun jännitysvoiman on oltava.

$$T = G_p = m_p g = 0{,}0948\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 0{,}9299\,\text{N} \approx 0{,}93\,\text{N}$$

b) Tasaisessa ympyräliikkeessä kiertävä korkki pysyy samassa tasossa. Pystysuuntaisten voimien summa on silloin nolla. Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



$\overline{T} =$ narun jännitysvoima

$\overline{G}_k =$ korkin paino

Tarkastellaan korkkiin kohdistuvia voimia pystysuunnassa. Newtonin II lain mukaan, kun korkin paikka ei muutu pystysuunnassa, on voimassa

$$T_y - G_\mathrm{k} = 0$$
$$T_y = G_\mathrm{k}$$
$$T\sin\alpha = m_\mathrm{k}g.$$

Kulman α arvoksi saadaan

$$\sin\alpha = \frac{m_\mathrm{k}g}{T} = \frac{m_\mathrm{k}g}{G_\mathrm{p}} = \frac{m_\mathrm{k}\cancel{g}}{m_\mathrm{p}\cancel{g}} = \frac{9{,}3\,\mathrm{g}}{94{,}8\,\mathrm{g}}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{9{,}3\,\mathrm{g}}{94{,}8\,\mathrm{g}}\right) = 5{,}6298° \approx 5{,}6°.$$

c) Korkki on tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin Newtonin II lain mukaan korkille

$$F = m_k a_n$$

$$T_x = m_k \frac{v^2}{r}.$$

Korkkia täytyy pyörittää nopeudella

$$T_x = m_k \frac{v^2}{r}$$

$$T \cos\alpha = m_k \frac{v^2}{r}.$$

Langan jännitysvoima on yhtä suuri kuin punnuksen paino, sillä punnus roikkuu paikoillaan, $T = G_p$. Saadaan yhtälö

$$G_p \cos\alpha = m_k \frac{v^2}{r}$$

$$m_p g \cos\alpha = m_k \frac{v^2}{r}$$

Ratkaistaan yhtälöstä nopeus.

$$v^2 = \frac{m_\mathrm{p} g \cos\alpha r}{m_\mathrm{k}} = \frac{m_\mathrm{p} g \cos\alpha \cdot (l \cos\alpha)}{m_\mathrm{k}}$$

$$v = \sqrt{\frac{m_\mathrm{p} g \cos\alpha \cdot (l \cos\alpha)}{m_\mathrm{k}}}$$

$$= \sqrt{\frac{94{,}8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cos(5{,}6298^\circ) \cdot (0{,}212\,\mathrm{m} \cdot \cos(5{,}6298^\circ))}{9{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}}$$

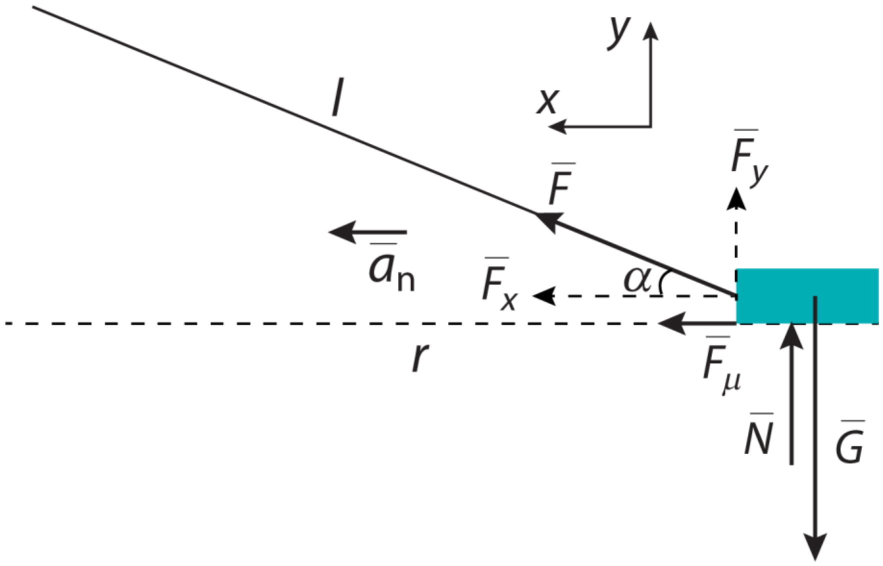
$$= 4{,}5821\,\mathrm{m/s}$$

$$\approx 4{,}6\,\mathrm{m/s}.$$

Tehtävä 3.19.

aisan pituus l = 5,0 m
kierrosaika t = 3,8 s
kitkakerroin μ = 0,11
ympyräradan säde r = 4,5 m
kelkkailijan massa m = 57 kg

Piirretään kelkkaan vaikuttavat voimat



$\overline{G} =$ kelkan paino

$\overline{N} =$ jään kelkkaan kohdistama tukivoima

$\overline{F} =$ aisan kelkkaan kohdistama voima

$F_\mu =$ jään kelkkaan kohdistama voima

Kelkka liikkuu tasaisessa ympyräliikkeessä. Tarkastellaan kelkkaan kohdistuvia voimia Newtonin II lain mukaan vaaka- ja pystysuunnassa suunnat huomioituna

$$F_x + F_\mu = ma_\mathrm{n}$$
$$N + F_y - G = 0.$$

Tangon ja jäänpinnan välinen kulma

$$\cos\alpha = \frac{r}{l} = \frac{4{,}5\,\mathrm{m}}{5{,}0\,\mathrm{m}}$$
$$\alpha = 25{,}84\,^\circ.$$

Esitetään tangon komponentit tangon ja jäänpinnan välisen kulman avulla ja kitkalle $F_\mu = \mu N$ ja $a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r}$.

Saadaan $F\cos\alpha + \mu N = m\frac{v^2}{r}$

$$N = G - F\sin\alpha.$$

Sijoitetaan tukivoiman lauseke

$$F\cos\alpha + \mu G - \mu F\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$$
$$F\cos\alpha + \mu mg - \mu F\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$$
$$F\cos\alpha - \mu F\sin\alpha = m\frac{v^2}{r} - \mu mg$$
$$F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = m\frac{v^2}{r} - \mu mg$$
$$F = \frac{m\frac{v^2}{r} - \mu mg}{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}.$$

Koska kelkka liikkuu tasaisessa ympyräliikkeessä, on nopeudelle $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t}$.

Sijoitetaan saatu nopeus voiman lausekkeeseen. Aisaan vaikuttava voima on aisan suuntainen ja sen suuruus on

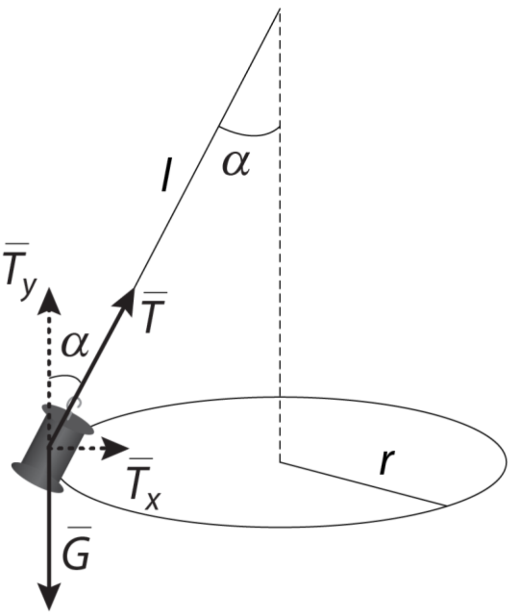
$$F = \frac{m\frac{(\frac{2\pi r}{t})^2}{r} - \mu mg}{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} = \frac{m\frac{4\pi^2 r^2}{t^2 r} - \mu mg}{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} = \frac{m\frac{4\pi^2 r}{t^2} - \mu mg}{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}$$

$$= \frac{57\,\text{kg}\cdot\frac{4\pi^2\cdot 4{,}5\,\text{m}}{(3{,}8\,\text{s})^2} - 0{,}11\cdot 57\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{(\cos 25{,}84^\circ - 0{,}11\sin 25{,}84^\circ)} = 750{,}82\,\text{N} \approx 750\,\text{N}.$$

Vastaus: 750 N

Tehtävä 3.20.

a) Kartioheilurin punnukseen vaikuttavat voimat:



$\overline{G} = \text{paino}$

$\overline{T} = \text{narun jännitysvoima}$

Punnus on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan $\sum F = ma_{\mathrm{n}}$.

$$T_x = ma_{\mathrm{n}}$$

$$T_x = m\frac{v^2}{r}.$$

Koska punnus etenee tasossa, on pystysuuntaisten voimien summa nolla.

$$\sum F_y = 0$$

$$T_y - G = 0$$

$$T_y = G$$

Ratkaistaan trigonometrian avulla vaakakomponentti

$$\tan\alpha = \frac{T_y}{T_x}$$

$$T_x = T_y \tan\alpha$$

ja sijoitetaan se tasaisen ympyräliikkeen yhtälöön.

$$T_x = m\frac{v^2}{r}$$

$$T_y \tan\alpha = m\frac{v^2}{r}$$

$$G \tan\alpha = m\frac{v^2}{r}$$

$$\cancel{m}g \tan\alpha = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

Ratkaistaan yhtälöstä $\tan\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{gr}$$

Koska massa ei esiinny yhtälössä, punnuksen massa ei vaikuta kiertokulman suuruuteen.

b) Kun nopeus kasvaa, muuttuu $\tan\alpha$ arvo suuremmaksi. Tämä tarkoittaa suurempaa kulmaa.

c) Kartioheilurin kierrosajan lauseke voidaan johtaa seuraavasti: Tasainen ympyräliike: $\sum F = ma_{\mathrm{n}}$

$$T_x = m\frac{v^2}{r}$$

$$T_y \tan\alpha = m\frac{v^2}{r}$$

$$G \tan\alpha = m\frac{v^2}{r}$$

$$\cancel{m}g \tan\alpha = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

Koska tasaisessa ympyräliikkeessä punnus etenee tasaisella nopeudella, voidaan kirjoittaa:

$$g \tan\alpha = \frac{(2\pi r)^2}{t^2 r} = \frac{4\pi^2 r^{\cancel{2}}}{t^2 \cancel{r}} = \frac{4\pi^2 r}{t^2}$$

Ratkaistaan kuvan avulla säde *r*.

$$\sin\alpha = \frac{r}{L}$$

$$r = L\sin\alpha$$

Sijoitetaan säteen lauseke yhtälöön ja ratkaistaan kiertoaika.

$$g\tan\alpha = \frac{4\pi^2 r}{t^2}$$

$$g\tan\alpha = \frac{4\pi^2 L\sin\alpha}{t^2}$$

$$t^2 = \frac{4\pi^2 L\sin\alpha}{g\tan\alpha} = \frac{4\pi^2 L\cos\alpha}{g}$$

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}}$$

Kun kulman suuruus lähestyy arvoa 90°, kiertoaika *t* pienenee lähelle nollaa. Näin ollen 90° kulman saavuttaminen ei ole mahdollista.

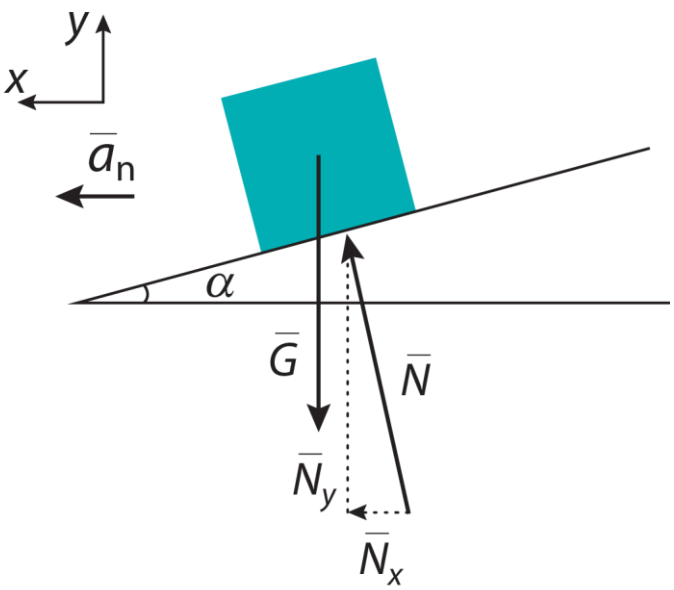
Asian voi perustella myös voimakuvion avulla. Painovoima vaikuttaa punnukseen, joten narun jännitysvoimalla on oltava pystykomponentti, jotta punnus kiertäisi keskusta tasossa.

Tehtävä 3.21.

radan kallistuskulma α = 4,0°
kaarevuussäde r = 1 900 m

Matkustaja ei tunne sivusuuntaisia voimia silloin, kun penkin tukivoiman vaakakomponentti aiheuttaa normaalikiihtyvyyden. Penkin tukivoima ja radan tukivoima ovat samansuuntaiset.

Piirretään voimakuvio tilanteesta.



$\bar{G} =$ junan paino
$\bar{N} =$ radan tukivoima

Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö junalle liikkeeseen nähden poikittaisessa suunnassa on $\sum \bar{F} = m\bar{a}$.

Kirjoitetaan liikeyhtälö erikseen *x*-suunnassa ja

y-suunnassa ja sovitaan suunnat voimakuvion mukaan

x-suunnassa: $N_x = ma_\mathrm{n}$ eli $N\sin\alpha = m\dfrac{v^2}{r}$

y-suunnassa: $N_y - G = 0$ eli $N\cos\alpha = mg$

Tukivoiman yhtälöksi saadaan *y*-suunnan yhtälöstä

$N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$.

Sijoitetaan ratkaisu *x*-suunnan yhtälöön, jolloin saadaan

$$\frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha = m\frac{v^2}{r} \quad ||:m$$

$$g\tan\alpha = \frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = rg\tan\alpha$$

$$v = \pm\sqrt{rg\tan\alpha} = \pm\sqrt{1900\,\mathrm{m}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\tan 4{,}0^\circ}$$

$$= \pm 36{,}10216\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \pm 129{,}96778\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx \pm 130\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Matkustaja ei tunne sivusuuntaisia voimia jo juna ajaa kaarteen nopeudella 130 km/h.

Tehtävä 3.22.

a) Pyörien vierimisvastus on ulkoinen voima, jonka takia moottoripyörän mekaaninen energia ei säily vakiona, kun moottoripyörä kulkee radalla. Pyörien ja radan pinnan välisen lepokitkan pitää toisaalta olla riittävän suuri, jotta pyörät eivät sudi. Lepokitka on moottoripyörää eteenpäin vievä voima.

b) Kappaleen mekaaninen energia on kappaleen potentiaalienergian E_p ja liike-energian E_k summa. Koska tarkasteltavassa mallissa kappaleeseen ei vaikuta ulkoisia vastusvoimia, kappaleen mekaaninen energia säilyy. Toisin sanoen kappaleen mekaaninen energia on yhtä suuri mäen päällä ja silmukan yläosassa.

c) Radan pinta aiheuttaa kappaleeseen tukivoiman N, jonka suunta on kohti silmukan keskipistettä. Radan ylimmässä kohdassa myös painon G suunta on kohti silmukan keskipistettä. Silmukan ylimmässä kohdassa kappaleen liikeyhtälö on

$$\Sigma F = ma_\mathrm{n}$$

$$N + G = ma_\mathrm{n} = m\frac{v^2}{r}.$$

d) Kappaleen mekaaninen säilyy, koska vastusvoimat oletetaan mallissa mitättömiksi. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi mäen alareuna eli silmukan alaosa. Mäen yläosassa kappale on paikallaan ja kappaleella on ainoastaan potentiaalienergiaa. Mäen alaosassa potentiaalienergia on muuntunut kokonaan kappaleen liike-energiaksi. Silmukan yläosassa kappaleella on potentiaalienergiaa ja liike-energiaa.

$$E_{\text{lähtö}} = E_{\text{alaosa}} = E_{\text{yläosa}}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\text{a}}^2 = mg2r + \frac{1}{2}mv_{\text{y}}^2,$$

jossa m on kappaleen massa ja g on putoamiskiihtyvyys.

Kun tukivoima N lähestyy nollaa silmukan yläosassa, liikeyhtälö voidaan kirjoittaa $G - ma_{\text{n}} = 0.$ Yhtälöstä voidaan ratkaista pienin vauhti v_{y}, jolla kappale pysyy vielä radalla putoamatta.

$$ma_{\text{n}} = G$$

$$m\frac{v_{\text{y}}^2}{r} = mg$$

$$v_{\text{y}}^2 = gr.$$

Koska mekaaninen energia säilyy,

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\text{a}}^2 = mg2r + \frac{1}{2}mv_{\text{y}}^2.$$

Tästä saadaan ratkaistua pienin mäen korkeus h.

$$mgh = mg2r + \frac{1}{2}mv_y^2$$

$$gh = g2r + \frac{1}{2}v_y^2$$

$$gh = g2r + \frac{1}{2}gr$$

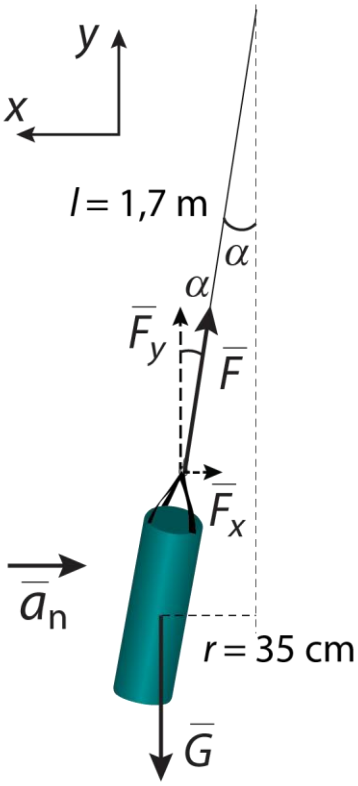
$$h = 2r + \frac{1}{2}r = \frac{5}{2}r$$

Mäen korkeuden pitää olla vähintään $\frac{5}{2}r$, jotta kappale selvittää surmansilmukan.

Tehtävä 3.23.

nyrkkeilysäkin massa m = 19,6 kg
narun pituus l = 1,7 m
nyrkkeilysäkin etäisyys pystysuunnasta r = 0,35 m

a)



$\overline{G} =$ säkin paino
$\overline{N} =$ narun jännitysvoima

Voimakuvion pisteytys:

Kuvaan on merkitty kaikki tilanteessa vaikuttavat voimavektorit oikeisiin suuntiin ja oikeille kohdilleen. (2 p)

kappaleen paino painopisteestä

alustan tukivoima alkaa tai päättyy kappaleen alapinnasta

kitka alkaa kappaleen alareunasta

Voimavektorien pituudet ovat oikein. (1 p)

pystysuunnassa: tukivoima ja paino ovat yhtä pitkiä

Voimat on nimetty listaan kuvion alle ja kuvioon on merkitty nopeus- ja kiihtyvyysvektorit (1 p)

Huom!

- Jos voimakuviossa on yksikin ylimääräinen voima, ei voimakuviosta saa pisteitä, 0 p.

- Jos kaksi tai useampi voimista puuttuu, ei voimakuviosta saa pisteitä, 0 p.

- Jos voimavektorien vaikutuspisteet ovat väärin, esimerkiksi voima on piirretty irti kappaleesta, kappaleen vierelle tai kappaleen eteen, kyseisestä voimasta ei anneta pisteitä. Jos kaksi tai useampi voima on näin piirretty, ei voimakuviosta saa pisteitä, 0 p.

b) Kun nyrkkeilysäkki on tasaisessa ympyräliikkeessä, on Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioituna vaaka- ja pystysuunnassa

$$\begin{aligned} F_x &= ma_\mathrm{n} \\ F_y - G &= 0. \end{aligned} \quad \text{(1 p)}$$

Esitetään narun jännitysvoimat komponenttimuodossa

$$\begin{aligned} F\sin\alpha &= m\frac{v^2}{r} \quad \text{(1 p)} \\ F\cos\alpha &= mg. \end{aligned}$$

Lasketaan narun ja pystysuoran välinen kulma

$$\sin\alpha = \frac{0{,}35\,\mathrm{m}}{1{,}7\,\mathrm{m}}$$

$$\alpha = 11{,}881^\circ.$$

Narun jännitysvoima on

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{19{,}6\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{\cos 11{,}881^\circ} = 196{,}485\,\mathrm{N} \approx 196\,\mathrm{N}. \quad \text{(2 p)}$$

c) Säkki liikkuu kierroksen vakionopeudella. Kierrosaika saadaan

$t=\frac{s}{v}=\frac{2\pi r}{v}$. (2 p)

Säkkiin kohdistuvat voimat saadaan b-kohdan mukaan

$F\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$ (1 p)

$F\cos\alpha = mg.$

Säkin nopeus on

$$\cancel{m}g\tan\alpha = \cancel{m}\frac{v^2}{r} \qquad \text{(2 p)}$$
$$v=\sqrt{gr\tan\alpha}.$$

Säkin kierrokseen kulunut aika

$$t=\frac{2\pi r}{\sqrt{gr\tan\alpha}}=\sqrt{\frac{4\pi^2 r^{\cancel{2}}}{g\cancel{r}\tan\alpha}}=\sqrt{\frac{4\pi^2 r}{g\tan\alpha}} \qquad \text{(2 p)}$$
$$=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot 0{,}35\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2\tan 11{,}881^\circ}}=2{,}587\,\text{s}\approx 2{,}6\,\text{s}.$$