2. Momentti ja tasapaino

Tehtävä 2.1.

väitteistä oikein: a), d)

väitteistä väärin: b), c), e)

Korjaukset vääriin väitteisiin:

b) Suuntasopimus määrittelee positiivisen kiertosuunnan. Päinvastaisen kiertosuunnan momentti on negatiivinen.

c) Statiiviin ripustetun tangon paino aiheuttaa tankoon momentin, jos tankoa ei ole ripustettu painopisteestään.

e) Kun voima kasvaa vivun avulla, matka pienenee samassa suhteessa. Tehdyn työn määrä pysyy siis muuttumattomana.

Tehtävä 2.2.

a) Kappale on tasapainossa, kun kappale ei liiku eikä pyöri.

b) Kun kappale on tasapainossa etenemisen suhteen, voimien summa on nolla. Kun kappale on tasapainossa pyörimisen suhteen, momenttien summa on nolla.

Tehtävä 2.3.

a) Sakset on esimerkki kaksivartisesta vivusta, sillä terän leikkaava voima vaikuttaa eri puolella tukipistettä kuin käden aiheuttama puristusvoima.

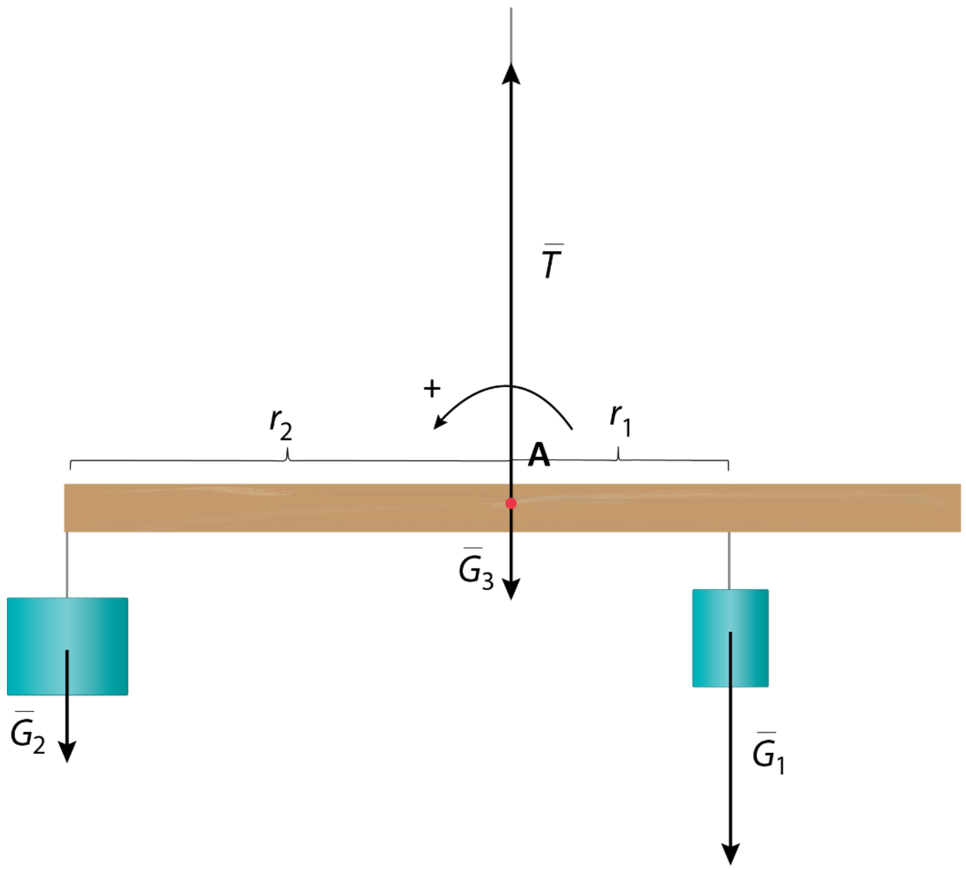
b) Sorkkarautaa voi käyttää yksivartisena tai kaksivartisena vipuna. Sorkkarauta on yksivartinen vipu, kun sorkkaraudan päätä nostamalla yritetään nostaa esimerkiksi puussa olevaa naulaa. Sorkkarauta on kaksivartinen vipu, kun tukipiste on nostettavan naulan ja sorkkaraudan toisen pään välillä. Tällöin naula saadaan nousemaan puusta painamalla sorkkaraudan toista päätä alaspäin.

c) Kottikärryissä kannateltava paino ja kannatteleva voima ovat samalla puolella tukipistettä, joten kyseessä on yksivartinen vipu.

Tehtävä 2.4.

a) punnuksen massa m_1 = 500 g = 0,500 kg
punnuksen etäisyys kiertoakselista r_1 = 22 cm = 0,22 m
punnittavan esineen massa m_2
punnittavan esineen etäisyys kiertoakselista r_2 = 0,50 m

Piirretään voimakuvio.



$\overline{G}_1 =$ punnuksen paino

$\overline{G}_2 =$ punnittavan esineen paino

$\overline{G}_3 =$ kepin paino

$\overline{T} =$ narun jännitysvoima

Tasapaksun kepin painopiste on keskikohdassa. Koska keppi on ripustettu painopisteen kohdalta, painopiste on kiertoakselin kohdalla. Tämän vuoksi kepin paino G_3 ja narun jännitysvoima T eivät aiheuta keppiin momenttia.

Voiman G_1 momentti pyrkii kiertämään tankoa myötäpäivään, joka on valittu negatiiviseksi kiertosuunnaksi. Voiman G_2 momentti on tällöin positiivinen.

Kun tanko on tasapainossa, tasapainoehdot ovat voimassa.

Tasapaino etenemisen suhteen $\sum \overline{F} = \overline{0}$, eli tankoon vaikuttavien voimien summa on nolla.

Tasapaino pyörimisen suhteen $\sum M = 0$, eli tankoon vaikuttavien momenttien summa on nolla.

Momenttien summa on $G_2 r_2 - G_1 r_1 = 0$, joten $m_2 g r_2 = m_1 g r_1$.

Ratkaistaan yhtälöstä punnittavan esineen massa.

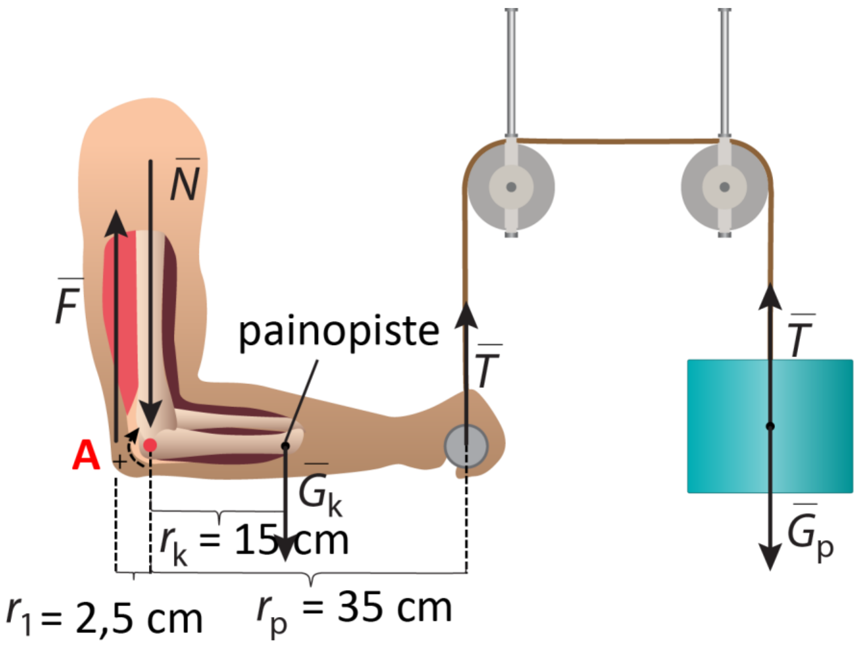
$$m_2 = \frac{m_1 \cancel{g} r_1}{\cancel{g} r_2} = \frac{m_1 r_1}{r_2} = \frac{0{,}500\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}22\,\mathrm{m}}{0{,}50\,\mathrm{m}} = 0{,}220\mathrm{kg}.$$

Punnittavan esineen massa on 220 g.

b) Jos kepin päähän kiinnitetään yli 500 g:n punnus, aiheuttaa esine suuremman momentin kuin keppiin ripustettu punnus ja keppi kääntyy pystyasentoon. Jos punnittava esine voidaan kiinnittää lähemmäksi kiertoakselia, niin vaa’alla voi punnita myös yli 500 g:n esineitä.

Tehtävä 2.5.

käsivarren massa m_k = 2,0 kg
punnuksen massa m_p = 15,0 kg
käsivarren painopisteen etäisyys
kyynärnivelestä r_k = 15,0 cm
kahvan etäisyys kyynärnivelestä r_p = 35,0 cm
lihaksen kiinnityskohdan etäisyys
kyynärnivelestä r_1 = 2,5 cm



$\overline{F}$ = ojentajalihaksen aiheuttama voima

$\overline{N}$ = tukivoima nivelessä

$\overline{G}_k$ = käden paino

$\overline{T}$ = vaijerin tukivoima

Koska punnus on paikallaan, punnuksen paino on yhtä suuri kuin vaijerin jännitysvoima. Kun valitaan positiivinen suunta alaspäin, voidaan kirjoittaa

$$\sum F = 0$$
$$G_\mathrm{p} - T = 0$$
$$T = G_\mathrm{p} = m_\mathrm{p} g.$$

Käsivarsi on tasapainossa pyörimisen suhteen. Valitaan suunta myötäpäivään positiiviseksi.

$$\begin{aligned}\sum M_\mathrm{A} &= 0\\ Fr_2 + G_\mathrm{k} r_\mathrm{k} - Tr_1 &= 0\\ Fr_2 &= Tr_1 - G_\mathrm{k} r_\mathrm{k}\\ F &= \frac{Tr_1 - G_\mathrm{k} r_\mathrm{k}}{r_2}.\end{aligned}$$

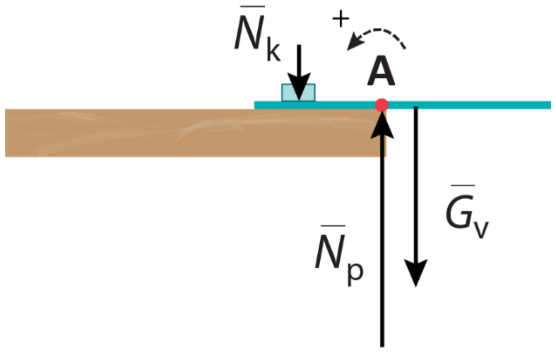
Sijoitetaan vaijerin tukivoiman lauseke voiman yhtälöön.

$$F = \frac{G_\mathrm{p} r_1 - G_\mathrm{v} r_\mathrm{v}}{r_2} = \frac{m_\mathrm{p} g r_\mathrm{p} - m_\mathrm{k} g r_\mathrm{k}}{r_2} = \frac{g(m_\mathrm{p} r_\mathrm{p} - m_\mathrm{k} r_\mathrm{k})}{r_2}$$
$$= \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}(15{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}35\,\mathrm{m} - 2{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}15\,\mathrm{m})}{0{,}025\,\mathrm{m}} = 1942{,}38\,\mathrm{N} \approx 1{,}94\,\mathrm{kN}.$$

b) Voiman varsi on lyhyt, koska lihas kiinnittyy luuhun nivelen lähellä. Tämän vuoksi raajojen liikuttamiseen tarvitaan suuri voima.

Tehtävä 2.6.

viivoittimen massa m_v = 28 g
viivoittimen pituus L = 0,40 m
viivoittimen pöydän ulkopuolella olevan
osan pituus l = 0,242 m
kolikon massa m_k = 8,05 g



$\overline{G}_v$ = viivoittimen paino
$\overline{N}_k$ = kolikon viivoittimeen kohdistama voima
$\overline{N}_p$ = pöydän reunan tukivoima

Pöydän reuna toimii kiertoakselina. Merkitään kolikon etäisyyttä kiertoakselista r_2.

Koska viivoitin on tasapaksu, viivoittimen painopiste sijaitsee etäisyydellä $x = L/2$ = 0,40 m/2 = 0,20 m viivoittimen päästä. Painopisteen etäisyys kiertoakselista on

$$r_1 = l - L/2 = 0{,}242\ \text{m} - 0{,}20\ \text{m} = 0{,}042\ \text{m}$$

Viivoitin pysyy tasapainossa, kun tasapainoehdot ovat voimassa eli viivoitin ei liiku eikä pyöri.

Kirjoitetaan tasapainoehto pyörimisen suhteen.

$$\sum M = 0$$

$$N_k r_2 - G_v r_1 = 0$$

$$G_v r_1 = N_k r_2$$

$$r_2 = \frac{G_v r_1}{N_k} = \frac{m_v \cancel{g} r_1}{m_k \cancel{g}} = \frac{0{,}028\,\text{kg} \cdot 0{,}042\,\text{m}}{0{,}00805\,\text{kg}} = 0{,}14608\,\text{m} \approx 15\,\text{cm}.$$

Vastaus: Kolikko on asetettava viivoittimen päälle vähintään 15 cm etäisyydelle pöydän reunasta, jotta viivoitin pysyisi tasapainossa.

b) Viivoittimen massan määrittämiseksi pitää selvittää, missä kohdassa viivoittimen painopiste on. Tutkitaan, mistä kohdasta kohdasta tuettuna viivoitin pysyy tasapainossa. Asetetaan sitten kolikko viivoittimen toiseen päähän. Kun viivoitinta työnnetään pöydän reunan yli, tutkitaan, kuinka pitkällä viivoitin on juuri ennen putoamista. Viivoittimen massa lasketaan tasapainoehdosta.

Tehtävä 2.7.

a) Simulaation perusteella 10 kg:n massan paikka on 0,75 m.

b) punnuksen massa m_1 = 15 kg
punnuksen m_1 etäisyys kiertoakselista r_1 = 0,50 m
punnuksen massa m_2 = 10 kg
punnuksen m_2 etäisyys kiertoakselista r_1

Keinulauta on tasapainossa pyörimisen suhteen, kun keinulauta on vaakasuorassa. Keinulaudan kiinnityspiste toimii kiertoakselina. Kirjoitetaan tasapainoehto pyörimisen suhteen ja ratkaistaan 10 kg:n kappaleen paikka.

$$
\begin{aligned}
\sum M_{\mathrm{A}} &= 0 \\
G_1 r_1 - G_2 r_2 &= 0 \\
m_1 g r_1 - m_2 g r_2 &= 0 \\
m_1 \cancel{g} r_1 &= m_2 \cancel{g} r_2 \\
r_2 &= \frac{m_1 r_1}{m_2} = \frac{15\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}50\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{kg}} = 0{,}75\,\mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

Tulos on täsmälleen sama kuin a-kohdassa.

Tehtävä 2.8.

Merkitään

G_1 = laatikon paino
G_2 = lankun paino
F = lankkuun kohdistettu voima
r = lankun pituus

Tarkastellaan tilannetta lankun tukipisteen suhteen. Jokaisessa tilanteessa lankkua vääntävien voimien momenttien summa on nolla, sillä lankku on tasapainossa pyörimisen suhteen. Momenttiehdosta saadaan, kun laatikon painon ja voiman etäisyys kiertopisteestä on sama

$$F\frac{r}{2}-G_1\frac{r}{2}=0$$
$$F=G_1.$$

Tilanteessa B tasapainottava voiman F varsi on kaksinkertainen laatikon ja lankun painon varteen verrattuna. Lankun paino aiheuttaa momenttia. Saadaan momenttiehdosta

$$Fr-G_1\frac{r}{2}-G_2\frac{r}{2}=0$$
$$F=\frac{G_1+G_2}{2}.$$

Tilanteessa C saadaan momenttiehdosta

$$F\frac{r}{2} - G_1 r - G_2\frac{r}{2} = 0$$

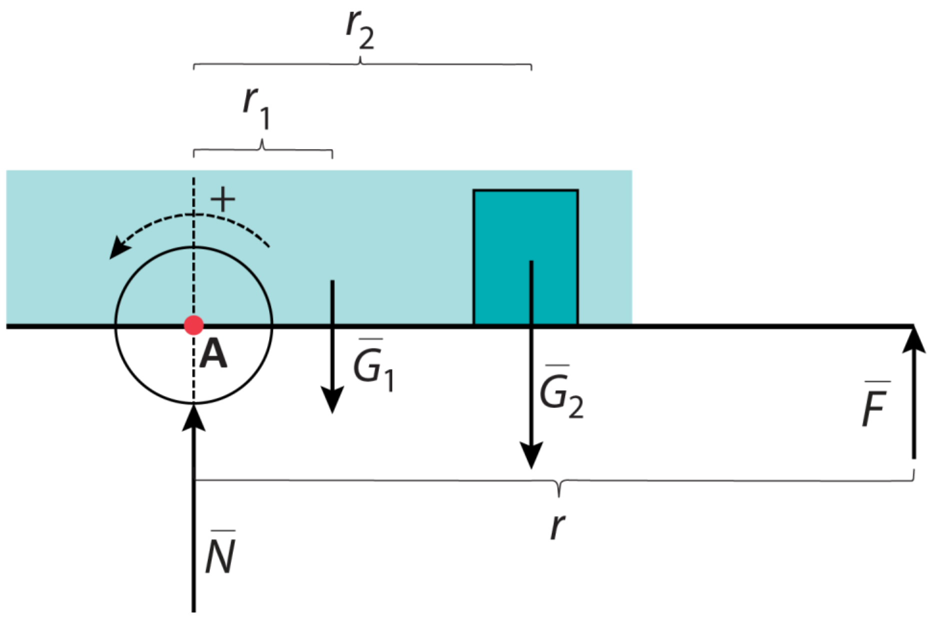
$$F = 2G_1 + G_2.$$

Voima *F* on suurin tilanteessa C.

Tehtävä 2.9.

peräkärryn massa m_1 = 210 kg
kiven massa m_2 = 260 kg
akselin etäisyys auton peräkoukusta r = 2,9 m
peräkärryn painopisteen etäisyys akselista r_1 = 0,60 m
aisan koukkuun kohdistama kuorma m = 75 kg

Peräkärry on tasapainossa etenemisen ja pyörimisen suhteen.



$\bar{G}_1$ = peräkärryn paino
$\bar{G}_2$ = kiven paino
$\bar{F}$ = aisan tukivoima
$\bar{N}$ = tukivoima, jonka tienpinta kohdistaa peräkärryn renkaisiin

Tarkastellaan voimien aiheuttamaa momenttia peräkärryn akselin suhteen. Kun peräkärry on tasapainossa pyörimisen suhteen, on voimassa

$$\begin{aligned} \sum M_{\mathrm{A}} &= 0 \\ Fr - G_1 r_1 - G_2 r_2 &= 0 \\ Fr - m_1 g r_1 - m_2 g r_2 &= 0. \end{aligned}$$

Koska aisan koukkuun kohdistama kuorma voi olla maksimissaan 75 kg, on koukun tukivoima *F* = *mg*. Ratkaistaan kiven etäisyys tilanteessa, jossa aisan koukkuun kohdistama kuorma on 75 kg.

$$m\cancel{g}r - m_1\cancel{g}r_1 - m_2\cancel{g}r_2 = 0$$

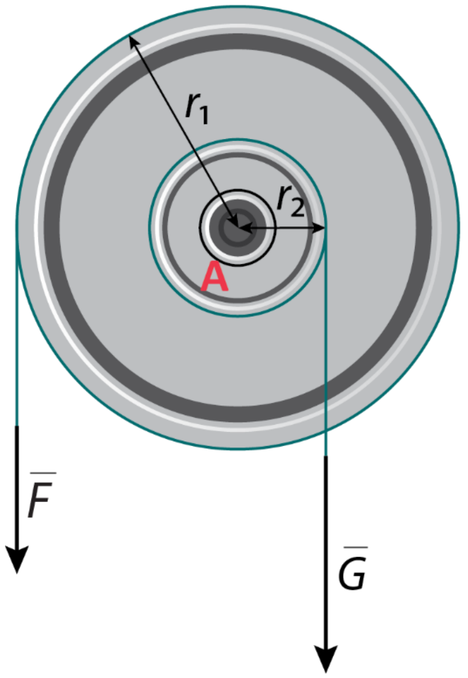
$$r_2 = \frac{mr - m_1 r_1}{m_2} = \frac{75\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}9\,\mathrm{m} - 210\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}60\,\mathrm{m}}{260\,\mathrm{kg}} = 0{,}3519\,\mathrm{m} \approx 35\ \mathrm{cm}.$$

Kivi voidaan siis asettaa enintään 35 cm etäisyydelle peräkärryn akselista.

Tehtävä 2.10.

suuremman sylinterin halkaisija r_1 = 0,127 m
pienemmän sylinterin halkaisija r_2 = 0,024 m
moottorin massa m = 180 kg

Piirretään voimakuvio, josta liinoissa vaikuttavat voimat käyvät ilmi.



Voimien vinssin pisteeseen A kohdistamat momentit ovat yhtä suuret

$Fr_1 = Gr_2$

Moottorin paino $G = mg$. Moottorin nostamiseen tarvittavan voiman suuruus

$$F = \frac{mgr_2}{r_1} = \frac{180\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}024\,\text{m}}{0{,}127\,\text{m}} = 333{,}694\,\text{N} \approx 330\,\text{N}.$$

b) Kun moottoria nostetaan, moottorin potentiaalienergia suurenee. Nostamisessa tehty työ on yhtä suuri kuin moottorin potentiaalienergian muutos

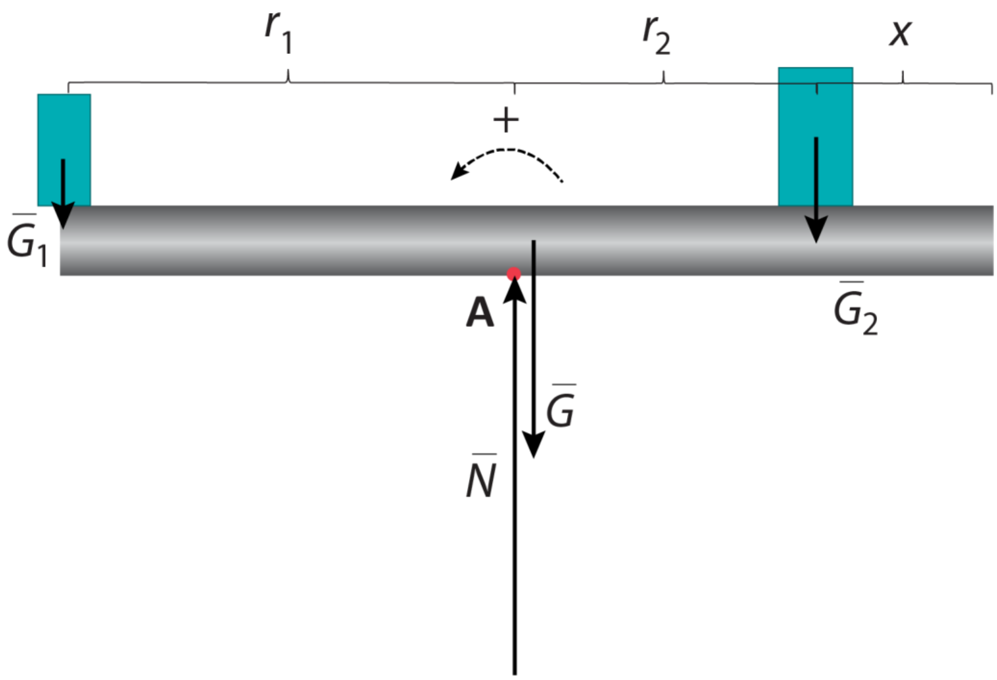
$$\begin{aligned} W &= \Delta E_p \\ &= mgh \\ &= 180\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 1{,}2\,\text{m} \\ &= 2118{,}96\,\text{J} \approx 2{,}1\,\text{kJ}. \end{aligned}$$

Vastaus: a) 330 N b) 2,1 kJ

Tehtävä 2.11.

punnuksen 1 massa $m_1 = 1{,}4$ kg
rautatangon pituus $l = 0{,}86$ m
punnuksen 2 etäisyys rautatangon päästä $x = 0{,}18$ m

a)



$\overline{G}_1 =$ punnuksen 1 paino
$\overline{G}_2 =$ punnuksen 2 paino
$\overline{G} =$ rautatangon paino
$\overline{N} =$ tankoa kannatteleva tukivoima

b) Valitaan kiertoakseliksi piste, josta rautatanko on tuettu. Merkitään kiertoakselia kirjaimella A.

Punnuksen 1 etäisyys rautatangon keskipisteestä $r_1 = \frac{l}{2}$.

Punnuksen 2 etäisyys rautatangon keskipisteestä

$r_2 = \frac{l}{2} - x$.

Systeemi on tasapainossa pyörimisen suhteen. Tarkastellaan momenttiehtoa kiertoakselin A suhteen.

$$\begin{aligned} \sum M_\mathrm{A} &= 0 \\ G_1 r_1 - G_2 r_2 &= 0 \\ m_1 g r_1 - m_2 g r_2 &= 0 \end{aligned}$$

Lisättävän punnuksen massa on

$$m_1 \cancel{g} r_1 = m_2 \cancel{g} r_2$$

$$m_2 = \frac{m_1 r_1}{r_2} = \frac{m_1 \frac{l}{2}}{\frac{l}{2} - x} = \frac{1{,}4\,\mathrm{kg} \cdot \frac{0{,}86\,\mathrm{m}}{2}}{\frac{0{,}86\,\mathrm{m}}{2} - 0{,}18\,\mathrm{m}} = 2{,}408\,\mathrm{kg} \approx 2{,}4\,\mathrm{kg}.$$

c) Systeemi on tasapainossa etenemisen suhteen, jolloin $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Otetaan voimien suunnat huomioon ja tarkastellaan voimien suuruuksia tasapainoehdon ja b-kohdan tuloksen mukaan. Lasketaan tankoa tukevan voiman *N* suuruus.

$$N - G - G_1 - G_2 = 0$$

$$N = mg + m_1 g + m_2 g$$

$$N = g(m + m_1 + m_2)$$

$$= 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot (21\,\mathrm{kg} + 1{,}4\,\mathrm{kg} + 2{,}408\,\mathrm{kg})$$

$$= 243{,}366\,\mathrm{N} \approx 240\,\mathrm{N}.$$

Vastaus: a) 2,4 kg b) 240 N

Tehtävä 2.12.

a) Koska tölkinavaajassa voimat kohdistuvat tukipisteen samalle puolelle, kyseessä on yksivartinen vipu. Korkinavaajassa voimat kohdistuvat tukipisteen eri puolille, joten kyseessä on kaksivartinen vipu.

b) käden etäisyys kiertoakselista r_1 = 140 mm = 0,140 m
avaajan pään etäisyys kiertoakselista r_2 = 0,028 m
käden avaajaan kohdistama voima F = 8,5 N

Kaksivartisessa vivussa voimien aiheuttamat momentit ovat yhtä suuret. Koska vipu on tasapainossa pyörimisen suhteen eli $\sum M = 0,$ niin voidaan ratkaista korkinavaajan aiheuttaman voiman F_2 suuruus.

Tällöin

$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

$$F_2 = \frac{F_1 r_1}{r_2} = \frac{8{,}5\,\mathrm{N} \cdot 0{,}140\,\mathrm{m}}{0{,}028\,\mathrm{m}} = 42{,}5\,\mathrm{N} \approx 43\,\mathrm{N}.$$

c) käden etäisyys kiertopisteestä r_1 = 124 mm = 0,124 m

tölkinavaajan tölkkiin kohdistaman voiman etäisyys kiertopisteestä r_2 = 8,4 mm = 0,0084 m

Yksivartisessa vivussa on voimien aiheuttamat momentit yhtä suuret. Koska vipu on tasapainossa pyörimisen suhteen, niin $\sum M = 0$. Ratkaistaan, kuinka moninkertaisen voiman tölkinavaaja kohdistaa kanteen käytettyyn voimaan verrattuna.

$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

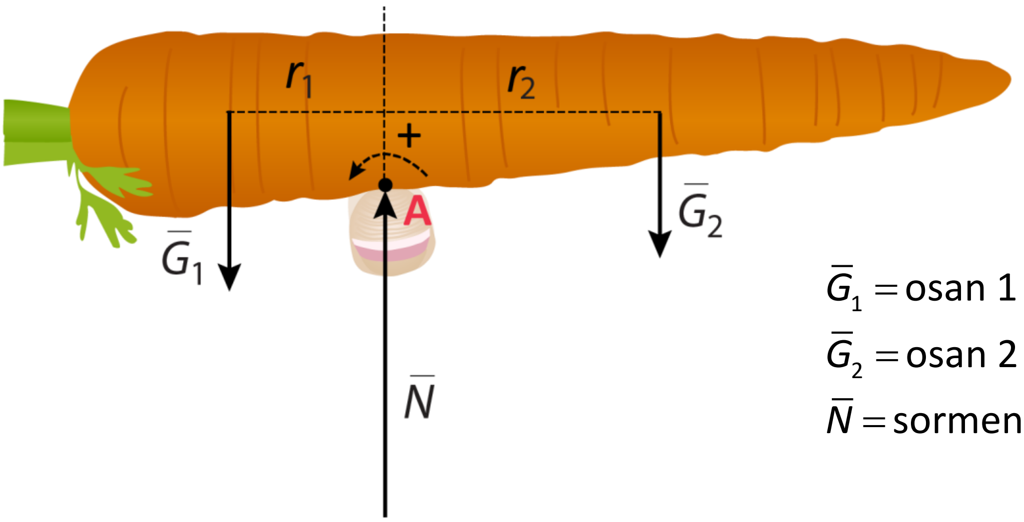
$$F_2 = \frac{F_1 r_1}{r_2} = \frac{F_1 \cdot 0{,}124\,\mathrm{m}}{0{,}0084\,\mathrm{mm}} = 14{,}76 F_1 \approx 15 F_1.$$

Tölkinavaajan kanteen kohdistama voima on 15-kertainen.

Vastaus: b) 43 N c) 15-kertainen

Tehtävä 2.13.

Porkkana on tasapainossa pyörimisen suhteen.



$\overline{G}_1 =$ osan 1 paino

$\overline{G}_2 =$ osan 2 paino

$\overline{N} =$ sormen tukivoima

Kirjoitetaan tasapainoehto kiertoakselin A suhteen.

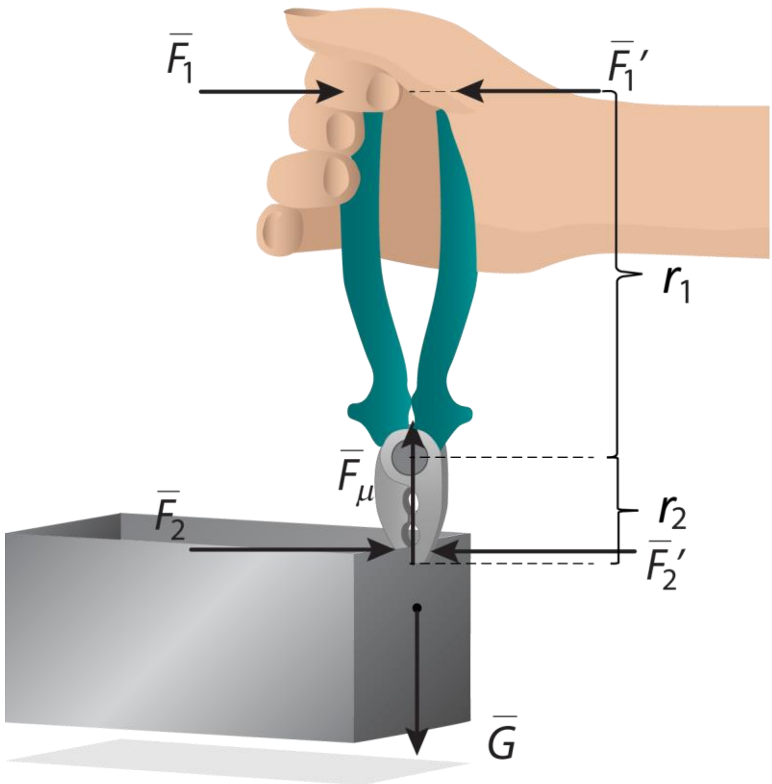
$$
\begin{aligned}
\sum M_A &= 0 \\
G_1 r_1 - G_2 r_2 &= 0 \\
G_1 r_1 &= G_2 r_2 \\
m_1 g r_1 &= m_2 g r_2 \\
m_1 r_1 &= m_2 r_2 .
\end{aligned}
$$

Yhtälöstä nähdään, että r:n kasvaessa m pienenee. Jos $r_1 < r_2$, niin $m_1 < m_2$. Väite on väärin.

Tehtävä 2.14.

metallikappaleen massa m = 3,0 kg
leukojen etäisyys kiertoakselista r_1 = 5,0 cm = 0,0050 m
pihdin varsien pituus r_2 = 16,0 cm = 0,160 m
leukojen ja metallin välinen lepokitkakerroin on μ = 0,30

Piirretään tilanteesta voimakuvio.



$\overline{G}$ = metallikappaleen paino

$\overline{F}_1$ = pihtien puristamiseen tarvittava voima

$\overline{F}_2$ = pihtien kappaleeseen kohdistama voima

$\overline{F}_\mu$ = lepokitka

Metallikappale pysyy pihtien välissä. Valitaan positiivinen suunta ylöspäin, jolloin Newtonin II lain mukaisesti

$$\begin{aligned}\sum \bar{F} &= \bar{0}\\ F_\mu - G &= 0\\ F_\mu &= G.\end{aligned}$$

Pihdit kohdistavat metallikappaleeseen voiman F_2. Lepokitkan suuruudeksi voidaan kirjoittaa $F_\mu = \mu N = \mu F_2$.

Yhtälöstä ratkaistaan voima F_2.

$$F_2 = \frac{F_\mu}{\mu} = \frac{G}{\mu} = \frac{mg}{\mu}$$

Momentin tasapainoehdon mukaan pihtejä tulee puristaa voimalla

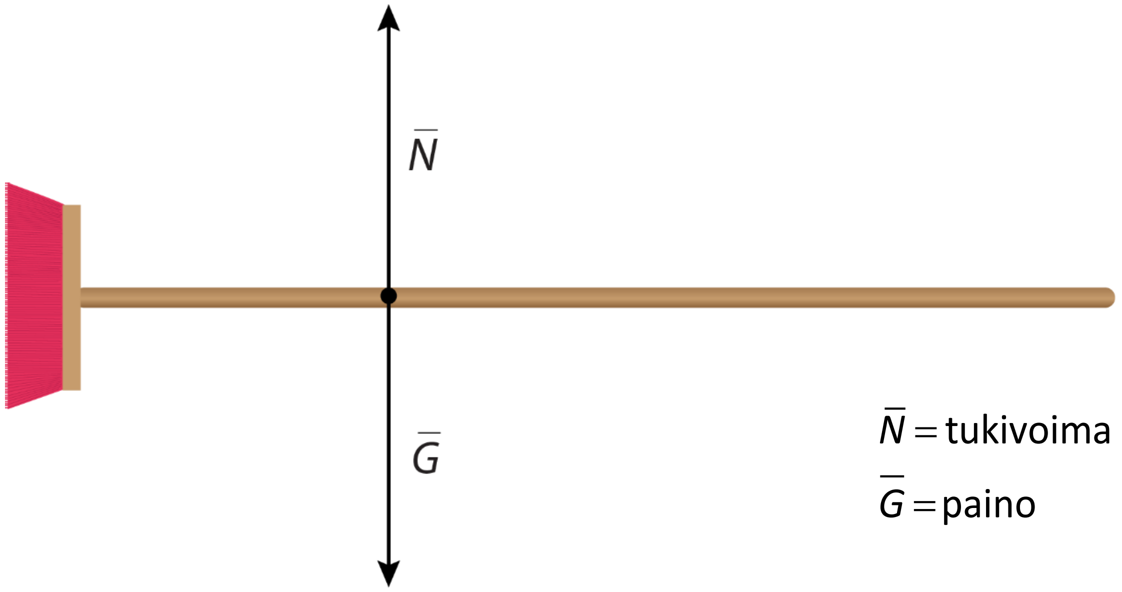
$$\begin{aligned}\sum M &= 0\\ F_1 r_1 - F_2 r_2 &= 0\\ F_1 &= \frac{F_2 r_2}{r_1}\end{aligned}$$

Sijoitetaan voima F_2 edelliseen yhtälöön.

$$F_1 = \frac{mgr_2}{\mu r_1} = \frac{3{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}050\,\mathrm{m}}{0{,}30 \cdot 0{,}16\,\mathrm{m}} = 30{,}656\,\mathrm{N} \approx 31\,\mathrm{N}.$$

Pihtejä pitää puristaa vähintään 31 N:n voimalla.

Tehtävä 2.15.



b) Painopisteestään tuettu kappale on tasapainossa. Jos mikään muu voima kuin paino ja tukivoima eivät vaikuta harjaan, harja pysyy kallistetussa asennossa.

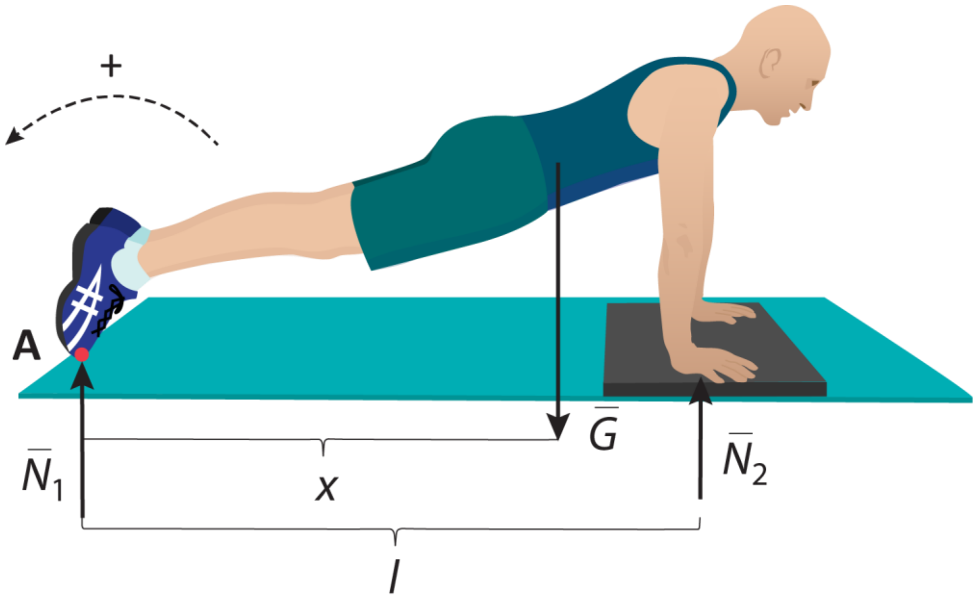
c) Massat eivät ole yhtä suuret. Harjapuolen massa on suurempi.

Jos harjaa ajatellaan kahtena eri kappaleena, varsipuolen painopisteen etäisyys kiertoakselista on suurempi kuin harjapuolen painopisteen etäisyys kiertoakselista. Koska harja on tasapainossa, tasapainoehdosta voidaan päätellä, että harjapuolen massa on suurempi.

Tehtävä 2.16.

Painopisteen paikan voi määrittää esimerkiksi seuraavasti.

Ensin punnitaan oma massa vaa'alla normaalisti. Sitten asetutaan punnerrusasentoon kädet vaa'alla. Kirjataan ylös vaa'an lukema, sekä varpaiden etäisyys käsistä punnerrusasennossa.



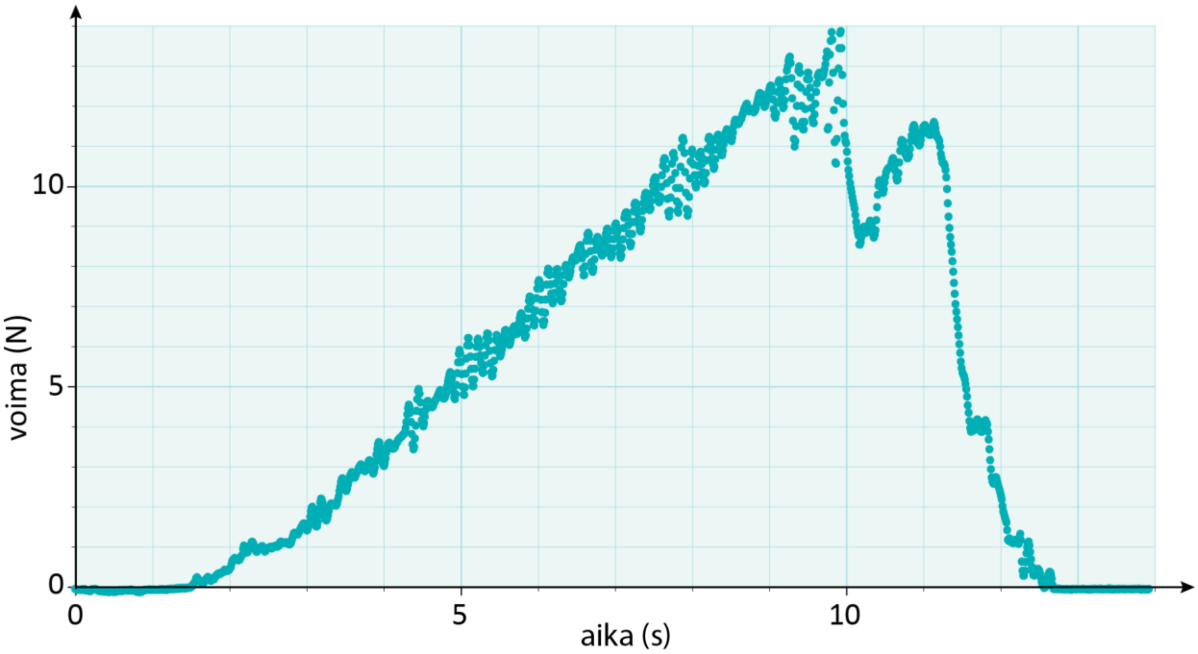
Punnitustulosten perusteella voidaan määrittää vaa'an tukivoima N_2 punnerrusasennossa sekä kehon paino *G*.

Kun kiertoakseliksi valitaan varpaiden kärki, voidaan painon vaikutuspisteen etäisyys ratkaista tasapainoehdon avulla.

$$\sum M = 0$$
$$-Gx + N_2 l = 0$$
$$x = \frac{N_2 l}{G} = \ldots$$

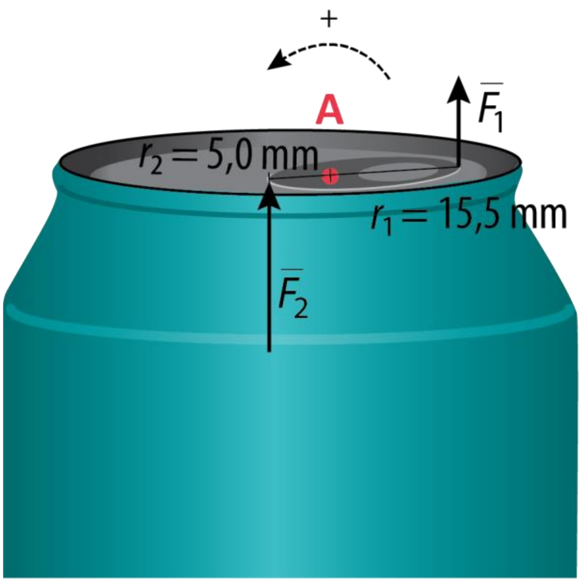
Tehtävä 2.17.

a)



b) voima-anturin voiman etäisyys kiertopisteestä
r_1 = 0,155 m

kannen klipsin kohdistaman voiman etäisyys kiertopisteestä r_2 = 0,050 m



$\overline{F}_1$ = voima-anturin voima

$\overline{F}_2$ = kannen klipsiin kohdistama voima

Newtonin III lain mukaan avausrenkaan kanteen kohdistama voima on yhtä suuri, mutta vastakkaissuuntainen kuin kannen avausrenkaaseen kohdistama voima. Voima $\overline{F}_2$ kuvaa kanteen kohdistuvaa voimaa. Avausrengas on tasapainossa pyörimisen suhteen. Tarkastellaan tilanteessa vaikuttavia momentteja. Kiertoakseli on piste A.

$$\sum M_A = 0$$
$$F_1 r_1 - F_2 r_2 = 0$$
$$F_1 r_1 = F_2 r_2.$$

Voima-anturin avausrenkaaseen kohdistama voima oli kuvaajan perusteella $F_{1,\max}$ = 13,8 N.

Avausrengas kohdistaa momenttiehdon perusteella kanteen suurimmillaan voiman

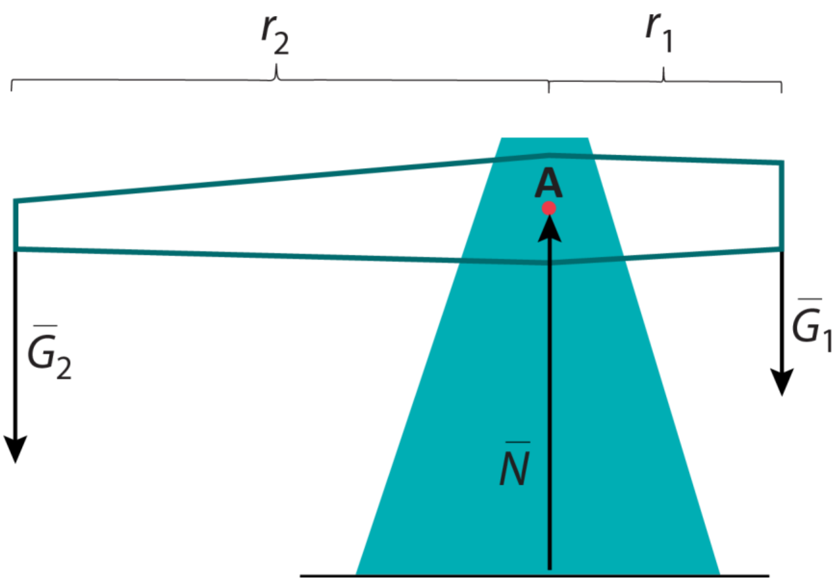
$$F_2 = \frac{F_1 r_1}{r_2} = \frac{13{,}8\,\mathrm{N} \cdot 0{,}0155\,\mathrm{m}}{0{,}0050\,\mathrm{m}} = 42{,}78\,\mathrm{N} \approx 43\,\mathrm{N}.$$

Vastaus: b) 43 N

Tehtävä 2.18.

opiskelijan 1 etäisyys akselista r_1 = 0,85 m
opiskelijan 1 massa m_1 = 68 kg
opiskelijan 2 etäisyys akselista r_2 = 2,7 m
opiskelijan 2 massa m_2 = 76 kg

a) Tarkastellaan opiskelijoiden aiheuttamaa momenttia laitteen akselin A suhteen.



$\overline{G}_1$ = opiskelijan 1 paino
$\overline{G}_2$ = opiskelijan 2 paino
$\overline{N}$ = akselin tukivoima

Opiskelijan 1 aiheuttama momentti

$$M_1 = G_1 r_1 = m_1 g r_1 = 68\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}85\,\mathrm{m} = 567{,}018\,\mathrm{Nm} \approx 570\,\mathrm{Nm}.$$

Kun laitteen varsi on paikallaan vaakasuorassa, systeemi on tasapainossa pyörimisen suhteen eli $\sum M_A = 0$. Tällöin opiskelijoiden aiheuttamat momentit ovat yhtä suuret, sillä ne kiertävät vartta eri suuntiin. Opiskelijan 2 aiheuttama momentti on $M_2 = M_1$ = 570 Nm.

b) Opiskelija pystyy aiheuttamaan varteen enintään oman painonsa G_2 suuruisen voiman. Kun varsi on vaakasuorassa, systeemi on tasapainossa pyörimisen suhteen eli

$$\sum M_A = 0$$

$$G_2 r_2 - G r_1 = 0$$

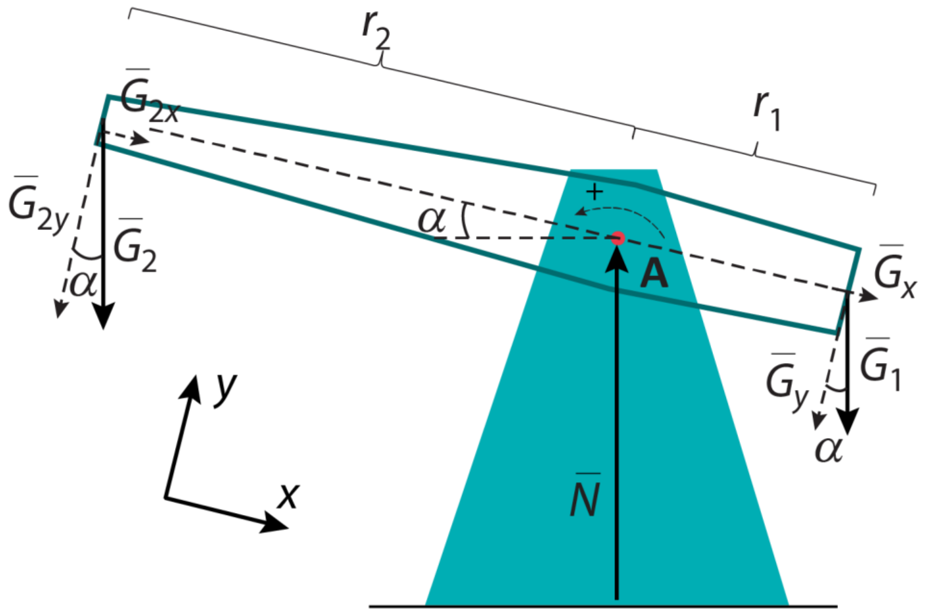
$$m_2 g r_2 - m g r_1 = 0$$

Ratkaistaan, kuinka suuri on suurin massa, jota opiskelija pystyy kannattelemaan.

$$m_2 \cancel{g} r_2 = m \cancel{g} r_1$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{m_2 r_2}{r_1} \\ &= \frac{76\,\text{kg} \cdot 2{,}7\,\text{m}}{0{,}85\,\text{m}} \\ &= 241{,}41\,\text{kg} \approx 240\,\text{kg}. \end{aligned}$$

c) Jos istuinkori on lattialla, nosturin varsi on vaakatasoon nähden kulmassa α.



Vinossa oleva varsi on pyörimisen suhteen tasapainossa. Tarkastellaan pyörimisehtoa kiertoakselin A suhteen.

$$G_{2y}r_2 - G_y r_1 = 0.$$

Esitetään painojen komponentit kulman α avulla, jolloin

$$m_2 g \cos\alpha r_2 = mg\cos\alpha r_1$$
$$m_2 r_2 = mr_1.$$

Opiskelija pystyy nostamaa kuorman $m = \dfrac{m_2 r_2}{r_1}$.

Koska tulos on sama kuin b-kohdan tulos, nostettavan kuorman suuruus ei riipu varren asennosta ja opiskelija pystyy nostamaan kuorman.

Tehtävä 2.19.

a) Etujarrulla jarruttaminen aiheuttaa moottoripyöräilijän ja moottoripyörän systeemille momentin, jonka kiertoakselina on etupyörän ja tien kosketuskohta. Jos momentti on liian suuri, nousee takapyörä irti tiestä, jolloin moottoripyöräilijä voi lentää sarvien yli tai menettää tasapainon.

b) Valitaan kiertoakseliksi moottoripyöräilijän ja moottoripyörän yhteinen painopiste. Jarrutus aiheuttaa momentin, joka painaa etupyörää tietä vasten. Tämän vuoksi etupyörän tukivoima on suurempi kuin takapyörän. Siksi etujarrulla jarrutettaessa kitka on suurempi kuin takajarrulla jarrutettaessa.

Tehtävä 2.20.

a) pään massa m = 5,0 kg
kulmat α = 23° ja β = 29°
mitat a = 7,0 cm = 0,070 m ja b = 4,3 cm = 0,043 m

Tarkastellaan tilannetta sen pisteen suhteen, johon niskan tukivoima vaikuttaa. Niskan tukivoiman momentti on tämän pisteen suhteen nolla. Jotta pää pysyy tasapainossa, pään painon aiheuttaman momentin pitää olla yhtä suuri kuin lihaksen aiheuttaman voiman momentti. Valitaan positiivinen suunta vastapäivään.

Ratkaistaan päätä tukevan voiman suuruus tasapainoehdosta pyörimisen suhteen.

$$\sum M = 0$$
$$-Ga + Fb = 0$$

$$F = \frac{Ga}{b} = \frac{mga}{b} = \frac{5{,}0\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}070\,\text{m}}{0{,}043\,\text{m}} = 79{,}8488\,\text{N} \approx 80\,\text{N}.$$

Lihas tukee päätä voimalla 80 N.

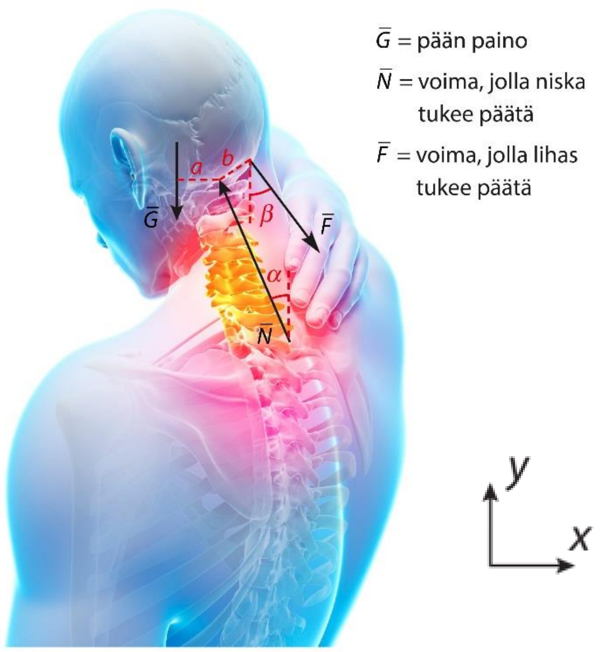
b) Kun pää on tasapainossa, $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Jaetaan voimat vaaka- ja pystysuuntaisiin komponentteihin.

Kuvasta nähdään, että $\dfrac{F_x}{F} = \sin\beta$, joten $F_x = F\sin\beta = \dfrac{mga}{b}\sin\beta$

ja

$\dfrac{F_y}{F} = \cos\beta$, joten $F_y = F\cos\beta = \dfrac{mga}{b}\sin\beta$.



$\overline{G} =$ pään paino

$\overline{N} =$ voima, jolla niskatukee päätä

$\overline{F} =$ voima, jolla lihas tukee päätä

x-suunnassa: $F_x - N_x = 0$, joten $N_x = F_x$

y-suunnassa: $N_y - F_y - G = 0$, joten $N_y = F_y + G$

Niskan tukivoima voidaan ratkaista voiman komponenttien avulla Pythagoraan lausetta käyttämällä.

$$N = \sqrt{N_x^{\ 2} + N_y^{\ 2}} = \sqrt{F_x^{\ 2} + (F_y + mg)^2} = \sqrt{\left(\frac{mga}{b}\sin\beta\right)^2 + \left(\frac{mga}{b}\cos\beta + mg\right)^2}$$

$$= mg\sqrt{\left(\frac{a}{b}\sin\beta\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\cos\beta + 1\right)^2}$$

$$= 5{,}0\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{7{,}0\,\mathrm{cm}}{4{,}3\,\mathrm{cm}}\cdot\sin 29^\circ\right)^2 + \left(\frac{7{,}0\,\mathrm{cm}}{4{,}3\,\mathrm{cm}}\cdot\cos 29^\circ + 1\right)^2}$$

$$= 125{,}0311\,\mathrm{N} \approx 130\,\mathrm{N}$$

Niska tukee päätä 130 N:n voimalla.

Tehtävä 2.21.

a) Palkin taipuma f_R on kääntäen verrannollinen kimmokertoimeen E mallin $f_R = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}$ mukaisesti.

b) Koska teräksen kimmokerroin on 10 kertaa suurempi kuin puun kimmokerroin, mallin $f_R = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}$ perusteella teräspalkin taipuma f_R on 10 kertaa pienempi kuin puupalkin taipuma.

c) Jos ajallisesti vaihtelevan kuormituksen taajuus on lähellä palkin ominaistaajuutta, palkin värähtely voimistuu resonanssin vuoksi. Tällöin palkin taipuma voi kasvaa merkittävästi, jolloin palkin rasitus kasvaa.

d) teräspalkin pituus l = 5,0 m

käytetyn teräsmateriaalin kimmokerroin
$E = 200\ \text{GPa} = 200 \cdot 10^9\ \text{N/m}^2$

teräspalkin jäyhyysmomentti
$J = 1\,950\,000\ \text{mm}^4 = 195 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4$

teräspalkille asetettu kuorma $q = 2\,000\ \text{N/m}$

Hyödynnetään aineistossa annettua kaavaa ja lasketaan palkin taipuma.

$$f_R = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ} = \frac{5}{384} \cdot \frac{2000\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (5{,}0\,\text{m})^4}{200 \cdot 10^9\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 195 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4} = 0{,}042\,\text{m} = 42\,\text{mm}$$

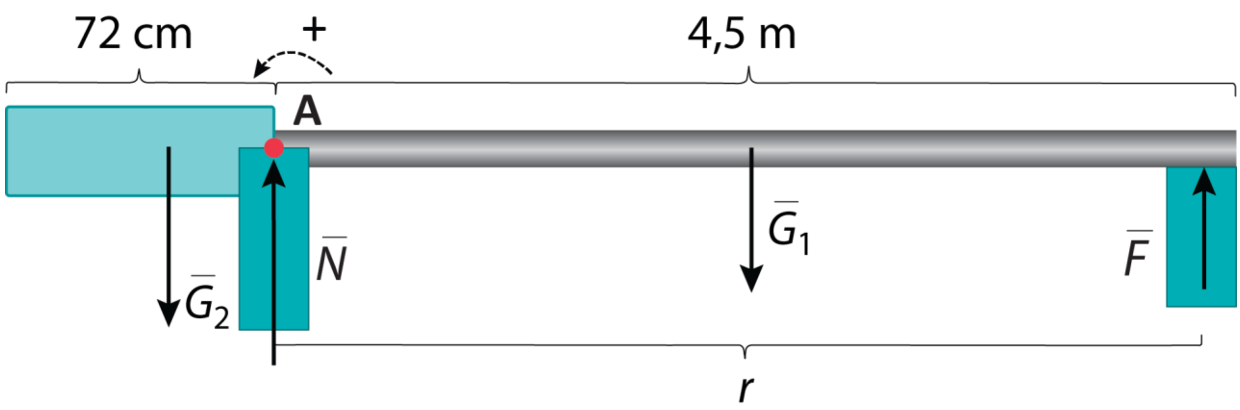
Taipuma 42 mm ylittää sallitun 10 mm:n rajan. Toisin sanoen palkille ei saa asettaa 2 000 N/m viivakuormaa.

Tehtävä 2.22.

putkiosuuden massa m_1 = 42,6 kg
vastapainon massa m_2 = 68 kg
putken pituus l_1 = 4,5 m
vastapainon pituus l_2 = 0,72 m

a) kannatinpalkin etäisyys akselista r = 4,4 m

Piirretään tilanteeseen liittyvä voimakuvio. (1 p)



$\overline{G}_1$ = puomin paino
$\overline{G}_2$ = vastapainon paino
$\overline{N}$ = akselin tukivoima
$\overline{F}$ = kannatinpalkin tukivoima

Tarkastellaan voimien aiheuttamaa momenttia akselin suhteen. Systeemi on tasapainossa pyörimisen suhteen, jolloin

$$\sum M_{\mathrm{A}} = 0$$

$$Fr - G_1\frac{l_1}{2} + G_2\frac{l_2}{2} = 0 \quad \text{(2 p)}$$

$$Fr - m_1 g\frac{l_1}{2} + m_2 g\frac{l_2}{2} = 0.$$

Kannatinpalkin putkeen kohdistama voima on

$$Fr = m_1 g\frac{l_1}{2} - m_2 g\frac{l_2}{2}$$

$$Fr = \frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{2}$$

$$F = \frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{2r} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(28{,}6\,\mathrm{kg}\cdot 4{,}5\,\mathrm{m} - 108\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}72\,\mathrm{m})}{2\cdot 4{,}4\,\mathrm{m}}$$

$$= 56{,}7865\,\mathrm{N} \approx 57\,\mathrm{N}.$$

(2 p)

b) Puomi on paikallaan ja etenemisen suhteen tasapainossa, jolloin $\sum\overline{F} = \overline{0}.$ Voimakuvion perusteella voidaan kirjoittaa

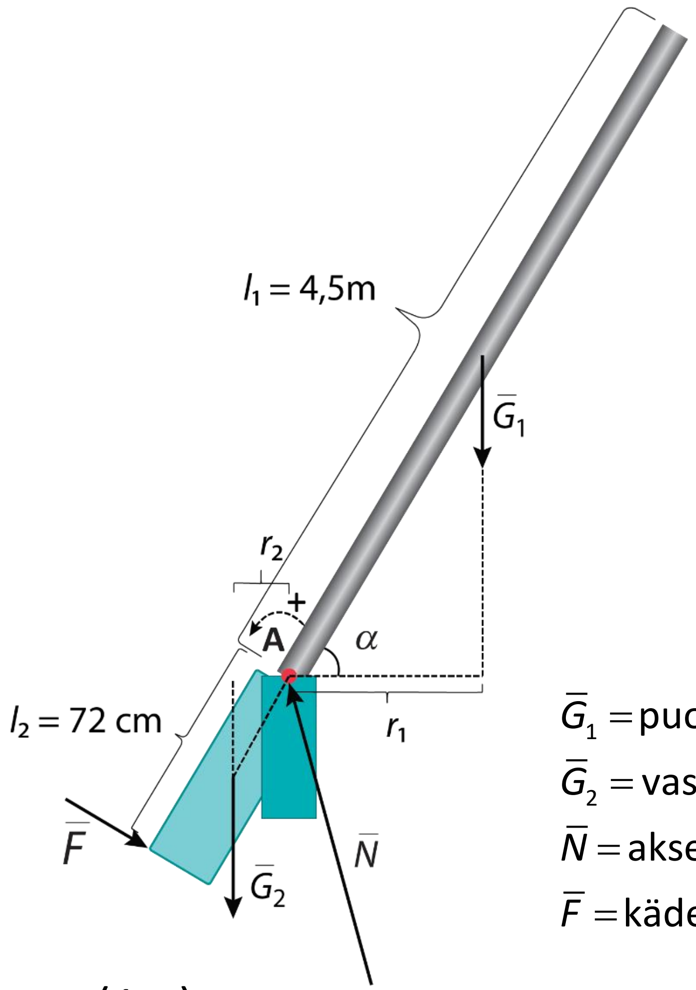
$$N + F - G_1 - G_2 = 0.$$ (2 p)

a-kohdan tulosta hyödyntäen akseliin kohdistuvaksi tukivoimaksi saadaan

$$N = mg_1 + m_2g - F$$
$$= 28{,}6\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 + 108\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 56{,}786\,\text{N}$$
$$= 1283{,}259\,\text{N} \approx 1{,}3\,\text{kN}.$$

(2 p)

c) Tarkastellaan tilanteeseen liittyvää voimakuviota. Kun käsi painaa vastapainoa vinosti, tukee akselin tukivoima akselia vinosti.



$\bar{G}_1$ = puomin paino
$\bar{G}_2$ = vastapainon paino
$\bar{N}$ = akselin tukivoima
$\bar{F}$ = käden vastapainoon kohdistama voima

(1 p)

Puomi on tasapainossa pyörimisen suhteen. Akselin suhteen tarkasteltuna puomiin kohdistuvien momenttien summa on nolla.

$$\sum M_A = 0$$

$$Fl_2 + G_2r_2 - G_1r_1 = 0$$

(2 p, jos ei sanallista mainintaa max. 1 p)

Määritetään voimien kohtisuorat etäisyydet puomin akselista.

$r_1 = \frac{l_1}{2}\cos\alpha$ ja $r_2 = \frac{l_2}{2}\cos\alpha$ (1 p)

Puomin paikallaan pitämiseen tarvittava voima on

$$Fl_2 = m_1 g \frac{l_1}{2}\cos\alpha - m_2 g \frac{l_2}{2}\cos\alpha$$

$$F = \frac{g\cos\alpha}{2l_2}(m_1 l_1 - m_2 l_2)$$

$$= \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot\cos 70^\circ}{2\cdot 0{,}72\,\mathrm{m}}(28{,}6\,\mathrm{kg}\cdot 4{,}5\,\mathrm{m} - 108\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}72\,\mathrm{m}) = 118{,}69\,\mathrm{N} \approx 120\,\mathrm{N}.$$

(2 p)