

# 1. Voiman momentti

## Tehtävä 1.1.

- a) C
- b) A
- c) A
- d) C
- e) B

## Tehtävä 1.2.

Jos työnnetään pisteestä A, sohvan vasen sivu liikkuu eniten ja sohva kiertyy myötäpäivään.

Jos työnnetään pisteestä B, sohva liikkuu suoraan selkänojan normaalin suuntaan.

Jos työnnetään pisteestä C, sohvan oikea sivu liikkuu eniten ja sohva kiertyy vastapäivään.

## Tehtävä 1.3.

Telaketjuilla kulkevalla kulkuneuvolla voi kääntyä pyörittämällä eri puolilla konetta olevia telaketjuja eri nopeuksilla. Telaketjujen ja maan pinnan välisen kitkan aiheuttama momentti kääntää kulkuneuvoa.

## Tehtävä 1.4.

a) voima  $F = 130 \text{ N}$

voiman varsi  $r = 260 \text{ mm} = 0,26 \text{ m}$

Voiman momentti on

$$M = Fr = 130 \text{ N} \cdot 0,26 \text{ m} = 33,8 \text{ Nm} \approx 34 \text{ Nm}.$$

b) Momentin suuruus on suoraan verrannollinen voiman varteen. Jos varsi on lyhyt, momentti on pieni. Pitkää vartta käyttämällä momenttia saadaan suurennettua.

## Tehtävä 1.5.

- a) Oven avaamiseen tarvitaan tietyn suuruinen momentti. Kun ovea työnnetään auki, oven kiertoakselina on oven sarana. Reunasta työnnettäessä voiman varsi on pidempi kuin lähellä saranaa. Kun ovea siis työnnetään läheltä oven reunaa (joka on usein lähellä kahvaa), momentti saadaan aikaan pienemmällä voimalla kuin työnnettäessä läheltä saranaa.
- b) Työ on voiman ja voiman kanssa yhdensuuntaisen siirtymän tulo. Momentti on kiertävän voiman ja voimaan nähden kohtisuoran voiman varren tulo. Voiman varsi ei kerro kuljettua matkaa, tämän vuoksi kyseessä ei ole työ.

## Tehtävä 1.6.

- a) Reppua kantavan retkeilijän lantio on systeemin kiertoakseli. Kun painavat tavarat pakataan repun pohjalle lähelle selkää, saadaan repun painopiste lähelle lantiota. Tällöin repun painon aiheuttama momentti pysyy pienenä ja repun liikuttamiseen vaikuttavat voimat ovat pienimmillään. Näin retkeilijän on myös helppo pitää tasapaino.
- b) Kun painavat tavarat asetetaan kÄrryn pohjalle, kuorman painopiste on alhaalla eikä kÄrry kaadu helposti. Kuorma kulkee vakaasti. Jos painopiste olisi ylhÄällä, kÄrry kaatuisi helpommin, koska painopiste joutuu tällöin helpommin tukipinnan ulkopuolelle.

## Tehtävä 1.7.

Kun kappale ripustetaan roikkumaan jonkin tukipisteen varaan, asettuu kappale siten, että painopiste on suoraan tukipisteen alapuolella. Ripustetaan kappale roikkumaan ja piirretään ripustuskohdasta kappaleen pintaan viiva suoraan maata kohti. Toistetaan viivan piirto toisesta ripustuskohdasta. Viivojen leikkauspiste kertoo painopisteen paikan. Tuloksen voi varmistaa toistamalla koe vielä kolmannelta ripustuskohdasta.

## Tehtävä 1.8.

- a) Kun jalka nostetaan irti lattiasta, painon vaikutussuora ei kulje enää tukipinnan läpi. Kun nostat oikean jalan irti lattiasta, kallistut seinään päin. Pysyt kuitenkin pystyssä, koska voit ottaa seinästä tukea eli seinä kohdistaa sinuun tukivoiman. Kun nostat vasemman jalan irti lattiasta, kaadut.
- b) Varpaiden koskettaminen ei onnistu. Kun taivutat itseäsi kohti varpaita, painopiste (painon vaikutussuora) siirtyy tukipinnan eli jalkaterien alueen ulkopuolelle.



## Tehtävä 1.9.

- a) Useimmiten liike onnistuu, jos vartalon painopiste on lähellä lantiota, joka tässä liikkeessä toimii kiertoakselina. Jos selkälihasten voima saa aikaan suuremman momentin kuin vartalon ja tuolin painon aiheuttama momentti, niin ylösnousu onnistuu. Jos kehon painopiste on selvästi lantion yläpuolella, selkälihasten voima harvoin riittää pystyyn nousemiseen.
- b) Useimmiten liike onnistuu, jos vartalon painopiste on lähellä lantiota, joka tässä liikkeessä toimii kiertoakselina. Jos selkälihasten voima saa aikaan suuremman momentin kuin vartalon painon aiheuttama momentti, niin otsan irrottaminen maasta onnistuu. Jos painopiste on selvästi lantion yläpuolella, selkälihasten voima harvoin riittää liikkeen suorittamiseen.
- c) Seisomaan nouseminen ei onnistu, koska vartalon painon vaikutussuora on tukipintana toimivien jalkaterien ulkopuolella.

## Tehtävä 1.10.

Kun ruuvimeisselillä ruuvataan, käsien ja ruuvimeisselin välinen kitka aiheuttaa momentin ruuvimeisselin kiertoakselin suhteen. Mitä suurempi kitkan aiheuttama momentti on, sitä tiukemmalle ruuvin saa ruuvattua. Koska ruuvimeisselin A kahvan halkaisija on kaikista suurin, sillä saadaan aikaan suurin momentti. Ruuvimeisselillä A saa ruuvattua ruuvin tiukimmin.

## Tehtävä 1.11.

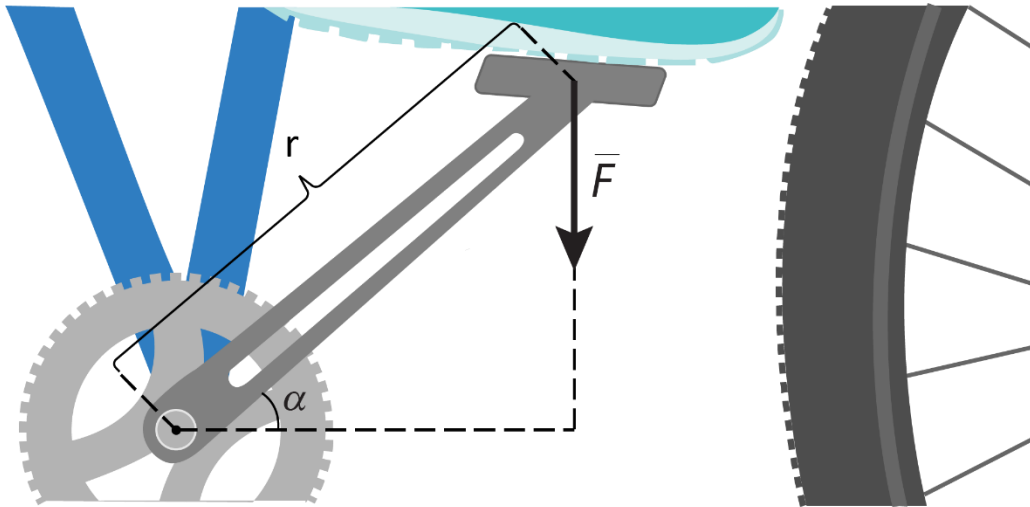
- a) Naulan irrottamiseen tarvitaan tietyn suuruinen momentti Koska sorkkaraudassa on pidempi varsi kuin vasarassa, yhtä suuren momentin tuottamiseen tarvitaan pienempi voima, kun käytetään sorkkarautaa.
- b) Lukon avaamiseen tarvitaan tietyn suuruinen momentti. Mitä leveämpi avaimen pää on, sitä kauempana kiertoakselista on sormien avaimiin kohdistama voima ja sitä pienempi voima tarvitaan avaamaan lukko.
- c) Liinan ja purkin metallikannen välinen kitkakerroin on suurempi kuin käden ja metallikannen välinen kitkakerroin. Kanteen saa näin ollen kohdistettua suuremman kitkan. Lisäksi liinan paksuus lisää voiman vartta. Jos kannen avaamiseen tarvitaan tietyn suuruinen momentti, on tarvittava voima liinan avulla pienempi, koska varsi on suurempi.

## Tehtävä 1.12.

- a) Kun veneellä soudetaan kahdella airolla yhtä voimakkaasti, vene liikkuu suoraan. Jos väliaineen vastus on yhtä suuri kuin airojen venettä eteenpäin liikuttava voima, vene etenee tasaisessa liikkeessä vakionopeudella. Jos airojen aiheuttama voima on erisuuri kuin väliaineen vastus, vene on kiihtyvässä liikkeessä.
- b) Kun oikealla olevaa airoa vedetään suuremmalla voimalla kuin vasemmalla olevaa airoa, vene kääntyy vasemmalla olevan airon suuntaan. Samalla vene liikkuu eteenpäin. Oikealla olevan airon aiheuttama momentti kääntää veneen.

## Tehtävä 1.13.

- a) polkimeen kohdistuva voima  $F = 230 \text{ N}$   
voima varsi  $r = 17 \text{ cm} = 0,17 \text{ m}$   
polkimen kulma vaakatasoon nähden  $\alpha = 30^\circ$



Voiman varsi  $r_{\perp}$  on vaakasuuntainen kateetti suorakulmaisessa kolmiossa, jonka hypotenuusa on  $r$ .

Silloin  $\cos \alpha = \frac{r_{\perp}}{r}$  ja  $r_{\perp} = r \cos \alpha$ .

Voiman momentti on tällöin

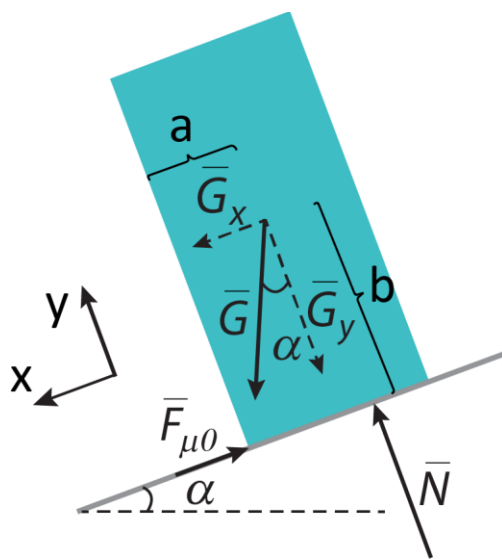
$$M = Fr_{\perp} = Fr \cos \alpha = 230 \text{ N} \cdot 0,17 \text{ m} \cdot \cos 30^\circ \\ = 33,86159 \text{ Nm} \approx 34 \text{ Nm}.$$

b) Voiman polkimeen aiheuttama momentti on  $M = Fr_{\perp} = Fr \cos \alpha$ . Momentti on suurimmillaan, kun termi  $\cos \alpha$  on suurimmillaan, sillä voima  $F$  ja voiman varsi  $r$  eivät muutu. Momentti on suurin, kun voima on kohtisuorassa voiman varteen nähden. Tämä toteutuu, kun poljin on vaakasuorassa.

## Tehtävä 1.14.

- a) Kappale kaatuu, kun painon vaikutussuora kulkee kappaleen tukipinnan ulkopuolella. Tölkin pohjan pinta-ala on paljon pienempi kuin tölkin kyljen pinta-ala, joten tölkin tukipinta on suurin, jos tölkki on kyljellään. Tämän vuoksi kyljellään olevaa tölkkiä voidaan kallistaa paljon ennen kuin painon vaikutussuora joutuu tukipinnan ulkopuolelle. Siksi kyljellään oleva mehutölkki säilyttää paremmin tasapainonsa kuin pystyssä oleva tölkki.

b) Mehutölkin painopiste on symmetrian vuoksi purkin keskipisteessä. Mehutölkki kaatuu, kun painon vaikutussuora joutuu mehutölkin tukipinnan ulkopuolelle. Tarkastellaan tilannetta, jossa painon vaikutussuora kulkee juuri ja juuri tukipinnan läpi. Jos tölkkiä kallistetaan tätä enemmän, tölkki kaatuu.



$\bar{G}$  = mehutölkin paino

$\bar{N}$  = pöydän pinnan tukivoima

$\bar{F}_{\mu 0}$  = pinnan ja tölkin välinen lepokitka

Kuvassa olevat mitat ovat

$$a = \frac{9,3 \text{ cm}}{2} = 4,65 \text{ cm}$$

$$b = \frac{19,4 \text{ cm}}{2} = 9,7 \text{ cm.}$$



Rajatilanteessa purkin painon vaikutussuora kulkee purkin tukipinnan reunalta.

Kuvan perusteella  $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ , joten rajakulma vaakatasoon nähden on

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{a}{b} = \tan^{-1} \left( \frac{4,65 \text{ cm}}{9,7 \text{ cm}} \right) = 25,612^\circ \approx 26^\circ.$$

Tölkki kaatuu, jos tasoa kallistetaan yli  $26^\circ$ .

Vastaus:            b)  $26^\circ$

## Tehtävä 1.15.

Alussa kuppi on kallellaan, koska kupin metallisosan painopiste on hieman kupin keskipisteen sivussa. Kun kuppiin lisätään vettä, kuppi nousee pystyyn, koska lisätyn veden ja kupin yhteinen painopiste on juuri kupin keskipisteen kohdalla. Puolipallon muotoinen kuppi on tasapainossa silloin, kun painon vaikutussuora kulkee kupin ja alustan kosketuspisteen eli kupin tukipinnan läpi.

## Tehtävä 1.16.

- a) voiman etäisyys kiertoakselista  $r = 0,183 \text{ m}$   
kohtisuoran voiman suuruus  $F = 74 \text{ N}$

Voiman mutteriin aiheuttama momentti on

$$M = Fr = 74 \text{ N} \cdot 0,183 \text{ m} = 13,542 \text{ Nm} \approx 14 \text{ Nm}.$$

- b) voiman etäisyys kiertoakselista  $r = 0,183 \text{ m}$   
voiman ja kiintoavaimen välinen kulma  $\alpha = 60^\circ$

Määritetään kiintoavainta vastaan kohtisuoraa voimaa

$$F_{\perp} = F \sin \alpha.$$

Voiman mutteriin aiheuttama momentti

$$M = F_{\perp} r = F \sin \alpha \cdot r = 74 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,183 \text{ m} = 11,7277 \text{ Nm} \approx 12 \text{ Nm}.$$

## Tehtävä 1.17.

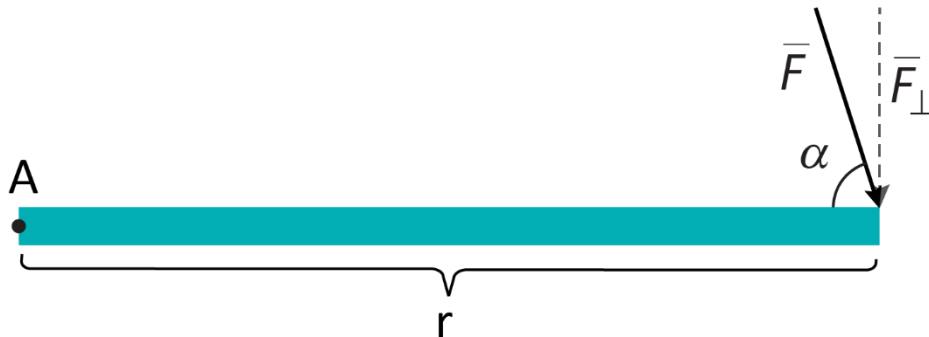
- a) voiman etäisyys kiertoakselista  $r = 0,52 \text{ m}$   
voiman aiheuttama momentti  $M = 115 \text{ Nm}$

Tutkitaan voiman  $F$  aiheuttamaa momenttia pisteen A suhteen  $M_A = Fr$ .

Tarvittavan voiman suuruus on

$$F = \frac{M_A}{r} = \frac{115 \text{ Nm}}{0,52 \text{ m}} = 221,15 \text{ N} \approx 220 \text{ N}.$$

b) voiman ja momenttiavaimen varren  
välinen kulma  $\alpha = 78^\circ$



Tutkitaan voiman  $F$  aiheuttamaa momenttia pisteen A  
suhteen

$$M_A = F_\perp r = rF \sin \alpha.$$

Tarvittavan voiman suuruus

$$F = \frac{M_A}{r \sin \alpha} = \frac{115 \text{ Nm}}{0,52 \text{ m} \cdot \sin 78^\circ} = 226,09 \text{ N} \approx 230 \text{ N}.$$

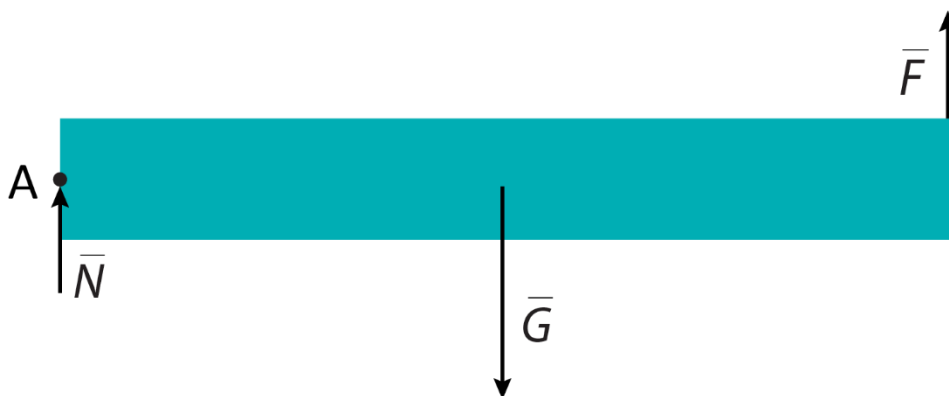
Vastaus:            a) 220 N            b) 230 N

## Tehtävä 1.18.

Kun teipistä vedetään, ovi kiertyy saranoiden suhteen. Vetävä voima aiheuttaa oven momentin. Mitä kauempana teippi on oven saranasta eli kiertoakselista, sitä suurempi on teipin aiheuttaman voiman varsi ja sitä pienempi voima tarvitaan avaamaan ovi. Mitä lähemmäksi oven saranareunaa teippi laitetaan, sitä pienempi on voiman momentin varsi ja sitä suurempi voima tarvitaan.

## Tehtävä 1.20.

a)



$\bar{G}$  = vatupassin paino

$\bar{F}$  = voima-anturin vatupassiinkohdistama voima

$\bar{N}$  = statiivin vatupassiin kohdistama tukivoima

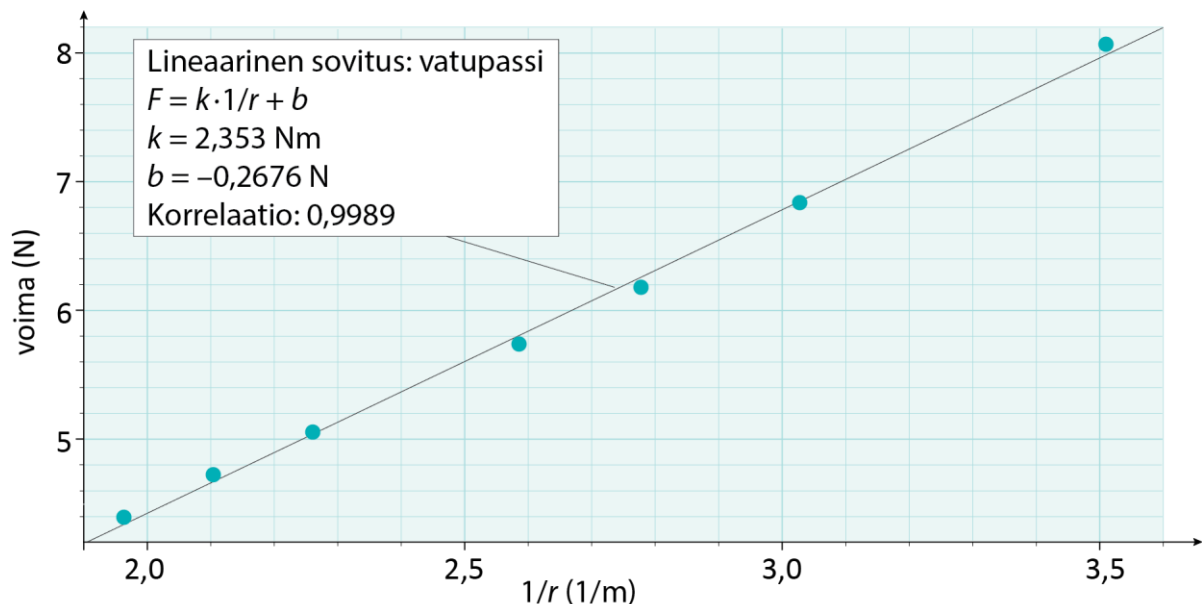
b) Voima-anturin aiheuttama momenttia kiertoakselin A suhteen on  $M = Fr$ . Koska voima-anturin aiheuttaman voiman  $F$  ja voima-anturin etäisyyden  $r$  tulo on vakio, ovat  $F$  ja  $r$  kääntäen verrannolliset suureet.

Muodostetaan yhtälö voima-anturin aiheuttaman voiman sekä voima-anturin ja kiertoakselin välisen etäisyyden välille

$$F = M \frac{1}{r}.$$

Voima-anturin aiheuttama momentti on

$(\frac{1}{r}, F)$ -koordinaatistoon laaditun kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin. Lasketaan uusi sarake  $1/r$  ja määritetään kulmakerroin.



Voima-anturin vatupassiin aiheuttama momentti on  $M = 2,353 \text{ Nm} \approx 2,4 \text{ Nm}$ .



## Tehtävä 1.21.

Kun tanko on tasapainossa, siihen kohdistuvien voimien momenttien summa on nolla. Narun jännitysvoiman aiheuttama momentti on yhtä suuri kuin tangon painon aiheuttama momentti. Kun narun kulmaa muutetaan, narun jännitysvoima kasvaa. Jotta narun jännitysvoiman momentti olisi sama, tulee narun jännitysvoiman tankoon nähden kohtisuoran komponentin pysyä samana. Tällöin pienemmällä kulmalla narun jännitysvoiman on oltava suurempi.

## Tehtävä 1.22.

- a) pienen hammasrattaan säde  $r_p = 4,0 \text{ cm} = 0,040 \text{ m}$   
suuren hammasrattaan säde  $r_s = 7,0 \text{ cm} = 0,070 \text{ m}$   
pienen hammasrattaan momentti  $M_p = 0,55 \text{ Nm}$

Pienen hammasrattaan momentti on  $M_p = Fr_p$ .

Se tarkoittaa, että hammasratasta pyöritetään rattaan

reunasta voimalla  $F = \frac{M_p}{r_p}$ . Koska pieni ratas pyörittää

suurta ratasta yhtä suurella voimalla, suureen rattaaseen kohdistuu momentti

$$M_s = Fr_s = \frac{M_p}{r_p} r_s = \frac{0,55 \text{ Nm}}{0,040 \text{ m}} \cdot 0,070 \text{ m} = 0,9625 \text{ Nm} \approx 0,96 \text{ Nm}.$$

- b) Tarkastellaan hammasrattaita ympyröinä. Kun rattaat pyörivät, niiden kehät kiertyvät yhtä pitkän matkan. Ison hammasrattaan kehän pituus on  $2\pi r_s$ . Pienen hammasrattaan kehän pituus on  $2\pi r_p$ . Kun suuri ratas kiertää yhden kierroksen pieni ratas kiertää  $n$  kierrosta. Ratkaistaan pienemmän rattaan kierrosmäärä.

$$n \cdot 2\pi r_p = 2\pi r_s$$

$$n = \frac{r_s}{r_p} = \frac{0,070 \text{ m}}{0,040 \text{ m}} = 1,75 \approx 1,8$$

## Tehtävä 1.23.

- a) Jos pultti on liian löysästi kiristetty, kappaleiden liitos ei ole pitävä. Jos pulttia kiristetään liikaa, pultti voi murtua, ja liitos ei pidä.
  
- b) Momenttiavaimella pultti ja mutteri saadaan kiristettyä haluttuun momenttiin. Momenttiavaimessa voi olla mekanismi, joka estää liian kiristämisen tai avaimessa voi olla mittari, josta nähdään kiristysmomentin suuruus. Näin vältetään esimerkiksi liian löysä tai liian kireä kiinnitys.
  
- c) Pultti ja mutteri aiheuttavat kiinnitettäviin kappaleisiin puristavan voiman. Newtonin III lain mukaisesti pulttiin kohdistuu yhtä suuri, mutta vastakkaissuuntainen voima. Tätä voimaa kutsutaan vetojännitykseksi.
  
- d) Pultin myötölujuuden raja-arvoa suuremmilla vetojännityksillä pultin sisäisessä rakenteessa tapahtuu muutoksia. Pulttiin voi syntyä esimerkiksi hiusmurtumia, mutta pultti ei kuitenkaan katkea.

e) Pultin lujuusluokka 8.8 tarkoittaa sitä, että pultin vetomurtolujuus on  $800 \text{ N/mm}^2$ . Koska pultin halkaisija on  $8,0 \text{ mm}$ , pultin ruuviosan poikkipinta-ala on

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (4,0 \text{ mm})^2 = 50,2655 \text{ mm}^2.$$

Pulttiin voi kohdistua enimmillään voima,

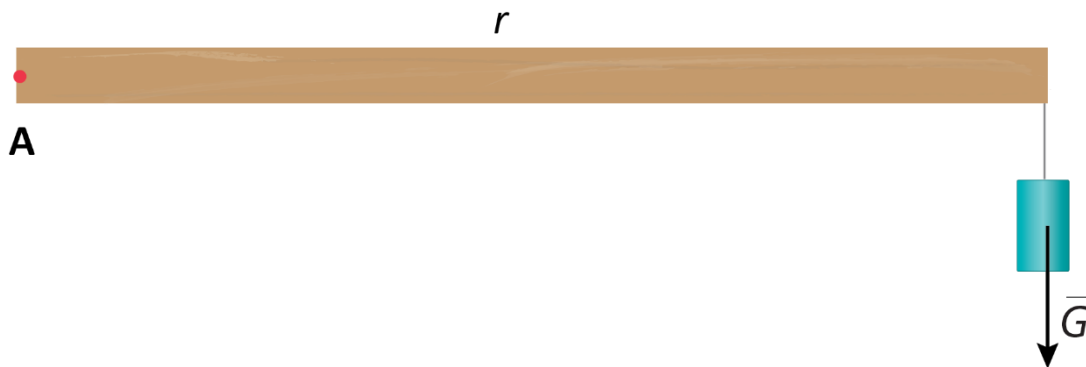
jonka suuruus on

$$F = 800 \text{ N/mm}^2 \cdot 50,2655 \text{ mm}^2 = 40\,212,386 \text{ N} \approx 40,2 \text{ kN}.$$

## Tehtävä 1.24.

naurun etäisyys ruuvista  $r = 0,75 \text{ m}$   
punnuksen massa  $m = 1,690 \text{ kg}$

a)



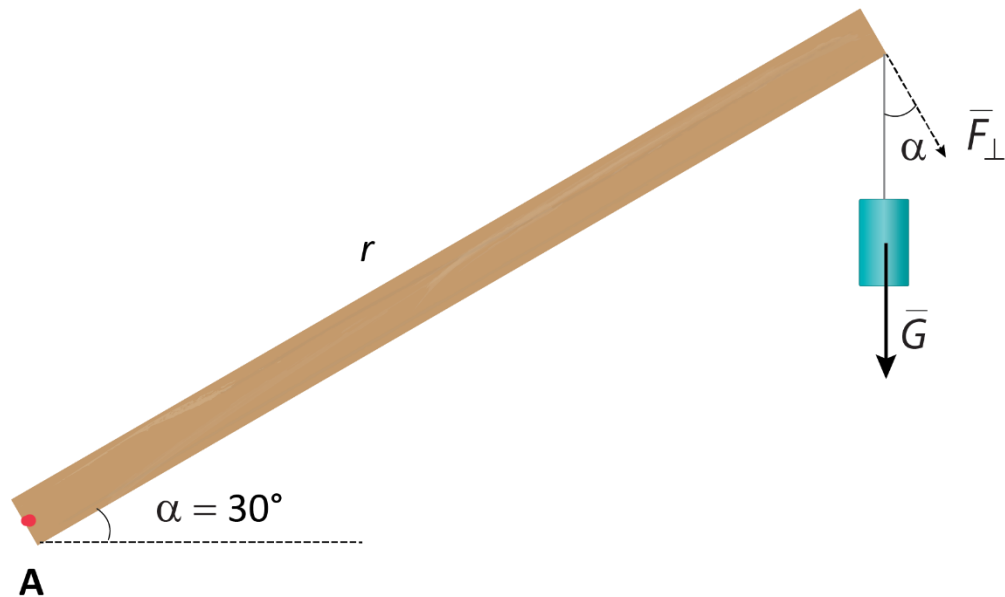
Punnuksen paino välittyy langan kautta listaan.  
Tarkastellaan tilanteessa 1 momenttia ruuvin suhteen.  
Voiman aiheuttama momentti on

$$M = Fr = Gr = mgr \quad (2 \text{ p})$$
$$= 1,690 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,75 \text{ m} = 12,43 \text{ Nm} \approx 12 \text{ Nm}.$$

Tilanteessa 2

voiman ja listan välinen kulma  $\alpha = 30^\circ$

Määritetään painon listaa vastaan kohtisuora voima



$$F_\perp = G \cos \alpha = mg \cos \alpha. \quad (1 \text{ p})$$

Voiman ruuviin aiheuttama momentti

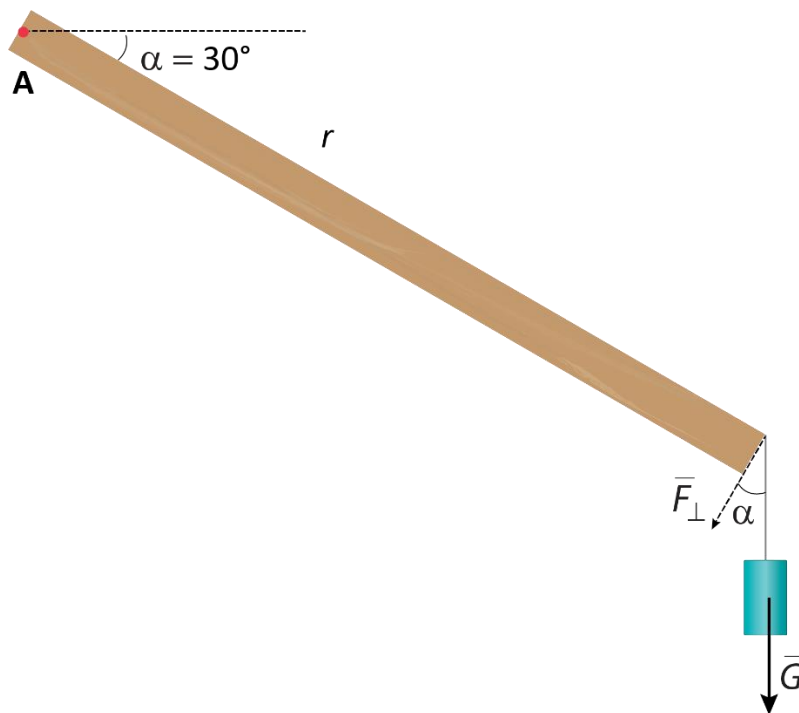
$$\begin{aligned} M &= F_\perp r \\ &= mg \cos \alpha \cdot r \\ &= 1,690 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,75 \text{ m} \quad (2 \text{ p}) \\ &= 10,768 \text{ Nm} \approx 11 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

b) Tilanne 1 on sama kuin a-kohdassa, jolloin punnuksen painon ruuviin aiheuttama momentti on

$$M = F_{\perp} r = mg \cos \alpha \cdot r.$$

Tilanne 2

Määritetään painon listaan vastaan kohtisuora voima



$$F_{\perp} = G \cos \alpha = mg \cos \alpha. \quad (1 \text{ p})$$

Voiman ruuviin aiheuttama momentti  $M = F_{\perp} r = mg \cos \alpha \cdot r$ .  
(1 p)

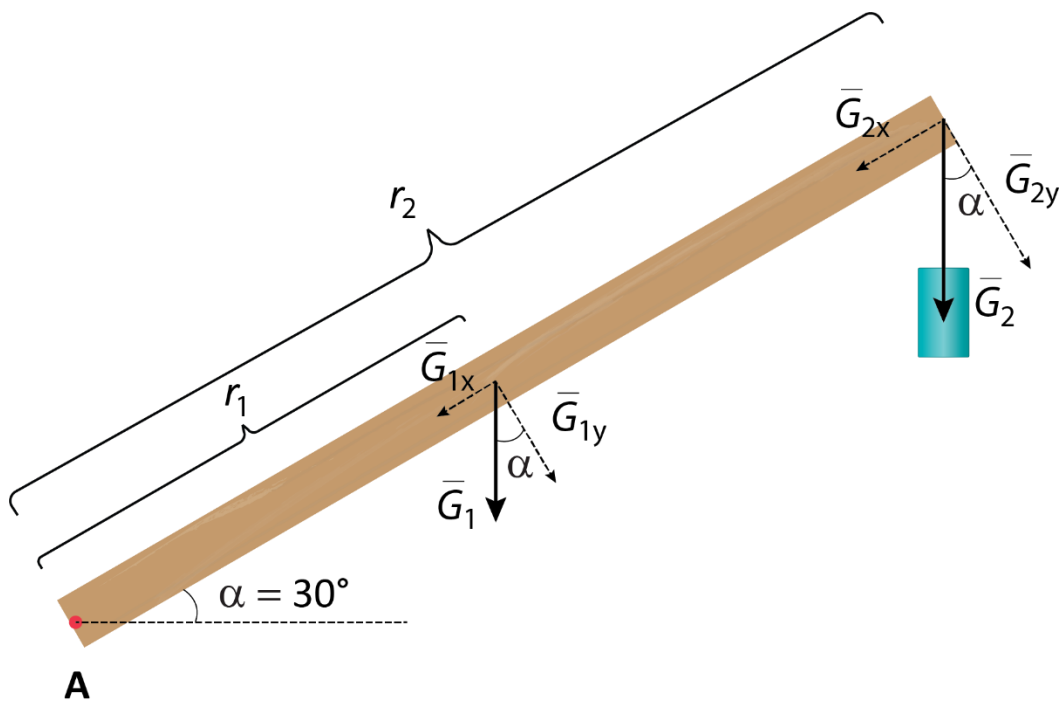
Tilanteiden 1 ja 2 momentin yhtälöistä nähdään, että momentit ovat yhtä suuret, joten ei ole väliä, muodostuuko kulma vaakatasosta ylöspäin vai alaspäin.  
(2 p)

c) puulistan massa  $m_1 = 0,127 \text{ kg}$

Puulistan painon etäisyys ruuvista on symmetrian vuoksi

$$r_1 = \frac{0,75 \text{ m}}{2}.$$

Tarkastellaan puulistan  $m_1$  ja punnuksen  $m_2$  painojen ruuvin kohdalle aiheuttamia momentteja



$$M_1 = G_1 r_1 = m_1 g r_1 \cos \alpha \quad (1 \text{ p})$$

$$M_2 = G_2 r_2 = m_2 g r_2 \cos \alpha.$$

Tilanteessa, jossa momentit ovat yhtä suuret

$$M_1 = M_2$$

$$m_1 g r_1 \cos \alpha = m_2 g r_2 \cos \alpha \quad (2 \text{ p})$$

$$m_1 r_1 = m_2 r_2.$$



Momenttien yhtälöstä nähdään, että kulma ei vaikuta tilanteeseen. (1 p)

Lasketaan punnuksen etäisyys, jolla punnuksen painon aiheuttama momentti on yhtä suuri kuin listan painon aiheuttama momentti

$$r_2 = \frac{m_1 r_1}{m_2} = \frac{0,127 \text{ kg} \cdot 0,75 \text{ m}}{1,690 \text{ kg}} = 0,02818 \text{ m} \approx 2,8 \text{ cm. (2 p)}$$