Kertauskoe

Tehtävä 1.

a) C

b) C

c) D

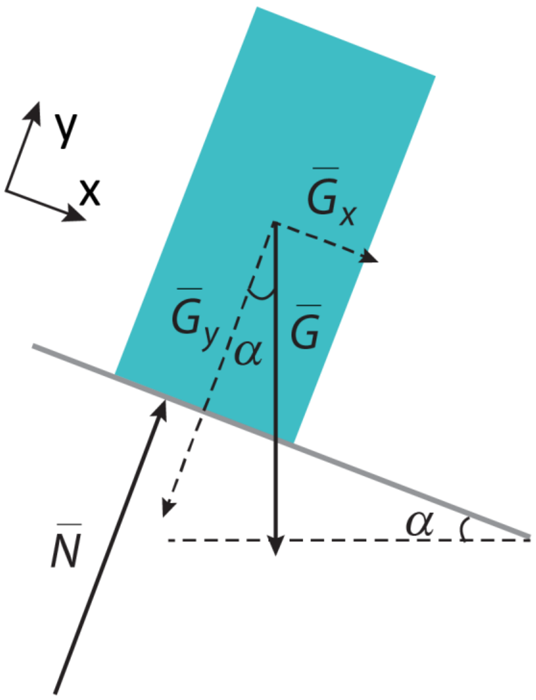
d) D

e) D

f) C

Tehtävä 2.

Aski D kaatuu ensimmäisenä. Tulitikkuaski kaatuu, kun painon vaikutussuora ei enää kulje tukipinnan kautta. Askin D tukipinta on kallistussuunnassa kapea ja askin painopiste on korkealla. Askin painon vaikutussuora ohittaa tukipinnan jo melko pienellä kallistuskulmalla. Tämä voidaan todeta myös voimakuvion avulla.

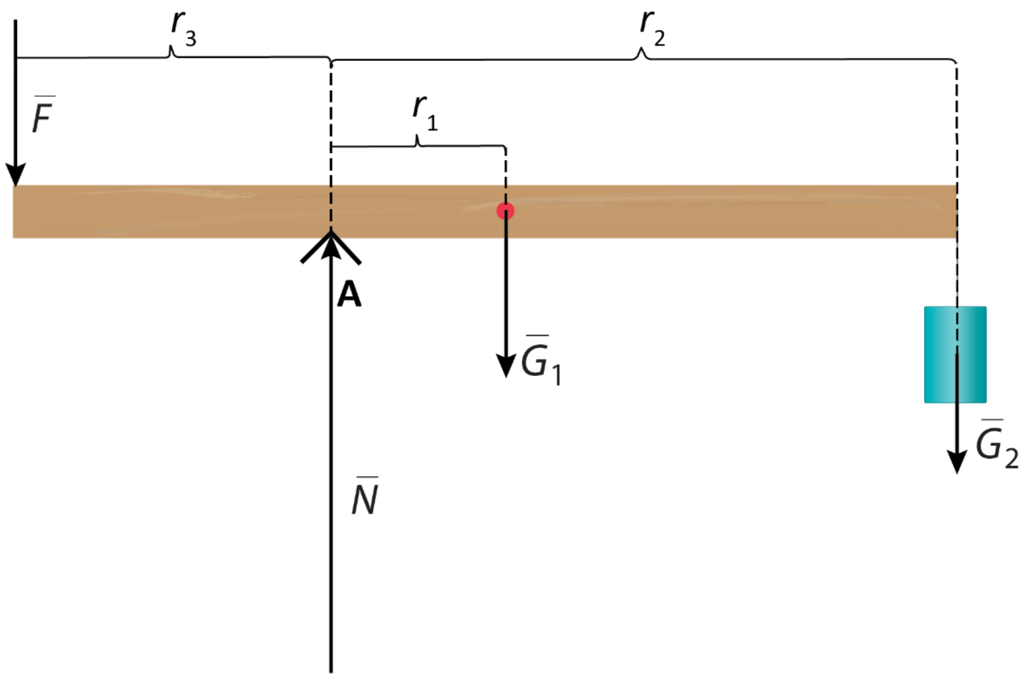


$\overline{G}$ = askin paino

$\overline{N}$ = pinnan tukivoima

Tehtävä 3.

Laaditaan tilanteesta voimakuvio.



$\overline{G}_1 =$ lankun paino

$\overline{G}_2 =$ punnuksen paino

$\overline{N} =$ tuentakohdan lankkuun kohdistama tukivoima

$\overline{F} =$ lankkuun kohdistettu voima

lankun pituus l = 2,8 m
tuentakohdan etäisyys lankun painopisteestä r_1 = 0,65 m
lankun massa m_1 = 13 kg
punnuksen massa m_2 = 7,2 kg
putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Lankku on symmetrinen, joten lankun painopiste sijaitsee lankun keskikohdassa. Punnuksen etäisyys tuentakohdasta on $r_2 = \frac{l}{2} + r_1 = \frac{2{,}8\,\text{m}}{2} + 0{,}65\,\text{m} = 2{,}05\,\text{m}.$

Lankun toiseen päähän kohdistetaan voima *F*, joka on etäisyydellä r_3 tuentapisteestä A.
r_3 = 1,4 m − 0,65 m = 0,75 m

Voimakuvion mukaan lankkua pitää painaa alaspäin, jotta lankku olisi pyörimisen suhteen tasapainossa. Tarkastellaan voimien lankkuun kohdistamia momentteja tuentapisteen A suhteen. Kun lankku on pyörimisen suhteen tasapainossa, on voimassa

$$\Sigma M_\text{A} = 0$$
$$Fr_3 - G_1 r_1 - G_2 r_2 = 0.$$

Lankkua täytyy painaa voimalla

$$\begin{aligned} F &= \frac{G_1 r_1 + G_2 r_2}{r_3} \\ &= \frac{m_1 g r_1 + m_2 g r_2}{r_3} \\ &= \frac{13\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}65\,\text{m} + 7{,}2\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2{,}05\,\text{m}}{0{,}75\,\text{m}} \end{aligned}$$
$$F = 303{,}5868\,\text{N} \approx 300\,\text{N}.$$

Lankkuun pitää kohdistaa 300 N voima alaspäin, jotta se pysyy vaakasuorassa.

b) Lankku on tasapainossa etenemisen suhteen, jolloin Newtonin II lain mukaan voimille voidaan esittää suunnat huomioituna

$$N - F - G_1 - G_2 = 0.$$

Tuentakohtaan kohdistuvan voiman suuruus a-kohdan tulosta apuna käyttäen on

$$\begin{aligned}
N &= F + G_1 + G_2 \\
&= F + m_1 g + m_2 g \\
&= 303{,}5868\,\mathrm{N} + 13\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} + 7{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \\
&= 501{,}7488\,\mathrm{N} \approx 500\ \mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Tehtävä 4.

a) Kun punnus on keskellä viivainta, molemmat voima-anturit näyttävät likipitäen samaa lukemaa. Kun punnusta siirretään kohti viivaimen päätä, anturin lukemat muuttuvat. Lähempänä punnusta oleva anturi näyttää suurempaa lukemaa kuin alussa. Kauempana oleva anturi näyttää vastaavasti pienempää lukemaa.

b) Viivain pysyy tasapainossa, joten systeemiin vaikuttavien momenttien summa on nolla. Viivaimen painopistettä voidaan pitää kiertoakselina. Kun punnusta siirretään kohti viivaimen toista päätä, punnuksen paino aiheuttaa viivaimelle momentin. Toisen voima-anturin tukivoiman täytyy kasvaa, jotta momenttien summa olisi edelleen nolla ja viivain pysyisi tasapainossa.

c) Kun punnus asetetaan videolla olevan oikeanpuoleisen voima-anturin päälle, näyttää oikeanpuoleinen anturi lukemaa F_o = 3,36 N ja vasemmanpuoleinen 0 N. Tällöin koko punnuksen paino on oikeanpuoleisen voima-anturin päällä. Punnusten massaksi saadaan

$$F_o = mg$$

$$m = \frac{F_o}{g} = \frac{3{,}36\,\text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2} = 0{,}3425\,\text{kg} \approx 343\,\text{g}.$$

Tehtävä 5.

avaruusaluksen säde r = 335 m
putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2
Kokemus painosta Maan pinnalla on G = mg.

Kun avaruusalus pyörii akselinsa ympäri, astronautti on tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin II lain mukaan astronauttiin kohdistuu voima F ympyräradan keskipistettä kohden. Voima aiheuttaa tasaisessa ympyräliikkeessä olevalle astronautille normaalikiihtyvyyden a_n ympyräradan keskipistettä kohti.

$$F = ma_n.$$

Kun astronautin normaalin suuntainen voima on yhtä suuri kuin astronautin paino, astronautin ratanopeudeksi saadaan

$$\begin{aligned} F &= G \\ \cancel{m}a_n &= \cancel{m}g \\ a_n &= g \\ \frac{v^2}{r} &= g \\ v &= \sqrt{gr}. \end{aligned}$$

Astronautin yhteen kierrokseen kulunut aika on yhtä suuri kuin aluksen yhteen pyörähdykseen kulunut aika. Koska astronautti on tasaisessa ympyräliikkeessä, kierrokseen kuluneelle ajalle on voimassa

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v}.$$

Sijoitetaan aiemmin ratkaistu ratanopeus $v = \sqrt{gr}$.

Tällöin kierrosaika on $t = \dfrac{2\pi r}{\sqrt{gr}}$.

Kierrosten määrä 60 sekunnin aikana

$$N = \frac{60\,\text{s}}{t} = \frac{60\,\text{s}}{\frac{2\pi r}{\sqrt{gr}}} = \frac{60\,\text{s}\sqrt{gr}}{2\pi r} = \frac{60\,\text{s}}{2\pi}\sqrt{\frac{gr}{r^2}} = \frac{60\,\text{s}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$= \frac{60\,\text{s}}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\,\text{m/s}^2}{335\,\text{m}}} = 1{,}634\,41 \approx 1{,}63\,\text{kierrosta}.$$

Avaruusaluksen pitää pyöriä 1,63 kierrosta minuutissa, jotta avaruusaluksessa olevan astronautin paino vastaisi painoa maapallon pinnalla.

Vastaus: 1,63

Tehtävä 6.

a) Kun alumiinilevyä aletaan pyörittää, aluksi kaikki kolikot pysyvät paikoillaan. Kun nopeus suurenee, kolikot lähtevät liukumaan levyä pitkin. Ensimmäisenä liukumaan lähtee kolikko, joka on kauimpana kiertoakselista. Tämän jälkeen liukuu keskimmäinen ja viimeisenä kiertoakselia lähinnä oleva kolikko.

b) Lepokitka pitää kolikon ympyräradalla ja myös lisää kolikon nopeutta. Tarkastellaan hetkeä, jolloin kolikko lähtee liukumaan levyä pitkin. Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituna säteen suunnassa

$$F_{\mu 0} = ma_n.$$

Vaakasuoralla pinnalla $F_{\mu 0} = \mu_0 N = G = mg$ ja $a_n = \frac{v^2}{r}$.

Saadaan ehdoksi

$$\mu_0 \cancel{m} g = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

$$\mu_0 g = \frac{v^2}{r}.$$

Kolikko on tasaisessa ympyräliikkeessä, jolloin yhden kierroksen aikana

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t}.$$

Saadaan

$$\mu_0 g = \frac{(\frac{2\pi r}{t})^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{t^2}.$$

Mitä suurempi on etäisyys ympyräliikkeen keskipisteestä, sitä suurempi pitää olla lepokitkakertoimen. Tämä vuoksi kauempana levyn keskipisteestä oleva kolikko lähtee liikkeelle ensin.

Yhtälöstä havaitaan, että kolikon ja alumiinilevyn pinnan välinen lepokitkakerroin μ_0 on suoraan verrannollinen kolikon etäisyyteen alumiinilevyn pyörimisakselista r eli $\mu_0 \sim r$. Tästä voidaan päätellä, että mitä kauempana kolikko on kiertoakselista, sitä suurempi lepokitkakertoimen pitää olla, jotta kolikko pysyisi paikallaan levyssä. Siksi kauimpana kiertoakselista oleva kolikko lähtee liukumaan ensimmäisenä ja lähimpänä oleva kolikko viimeisenä.

Tehtävä 7.

satelliitin 2 säde r_2
satelliitin 1 säde $r_1 = 2r_2$
satelliitin 2 massa m_2
satelliitin 1 massa $m_1 = 2m_2$

Satelliitin nopeus ratkaistaan sen liikeyhtälöstä.

$$\begin{aligned} F &= ma_\mathrm{n} \\ \gamma \frac{\cancel{m}M}{r^{\cancel{2}}} &= \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \\ v &= \sqrt{\gamma \frac{M}{r}} \end{aligned}$$

Satelliitin liike-energia voidaan laskea yhtälöstä

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\sqrt{\gamma\frac{M}{r}}^2 = \gamma\frac{mM}{2r}. \end{aligned}$$

Lasketaan liike-energioiden suhde.

$$\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{\gamma\frac{m_1M}{2r_1}}{\gamma\frac{m_2M}{2r_2}} = \frac{\cancel{\gamma}\frac{m_1\cancel{M}}{\cancel{2}r_1}}{\cancel{\gamma}\frac{m_2\cancel{M}}{\cancel{2}r_2}} = \frac{\frac{2m_2}{2r_2}}{\frac{m_2}{r_2}} = \frac{2m_2}{2r_2}\cdot\frac{r_2}{m_2} = 1$$

Liike-energiat ovat yhtä suuret.

Tehtävä 8.

punnuksen massa m_1 = 0,370 kg
jousen venymä punnuksella x_1 = 0,014 m

a) jousen venymä hauen tapauksessa x_2 = 0,068 m

Määritetään ensin jousen jousivakio. Kun jouseen ripustetaan punnus, jousi asettuu tasapainotilaan ja Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituna

$$F_\mathrm{j} - G_1 = 0$$
$$kx_1 = m_1 g.$$

Jousen jousivakioksi saadaan

$$k = \frac{m_1 g}{x_1} = \frac{0{,}370\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}014\,\mathrm{m}} = 259{,}264\,\mathrm{N/m}.$$

Kun jouseen ripustettiin hauki, jousi ja hauki asettuvat tasapainoon. Newtonin II lain mukaan suunnat huomioituna

$$F_\mathrm{j} - G_2 = 0$$
$$kx_2 = m_2 g.$$

Hauen massa on

$$m_2 = \frac{kx_2}{g} = \frac{m_1 g x_2}{x_1 g} = \frac{m_1 x_2}{x_1} == \frac{0{,}370\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}068\,\mathrm{m}}{0{,}014\,\mathrm{m}} = 1{,}797\,\mathrm{kg} \approx 1{,}8\,\mathrm{kg}.$$

b) Lasketaan jousen venymä, kun kalan massa on 1,0 kg.

a-kohdan mukaan saadaan ehto

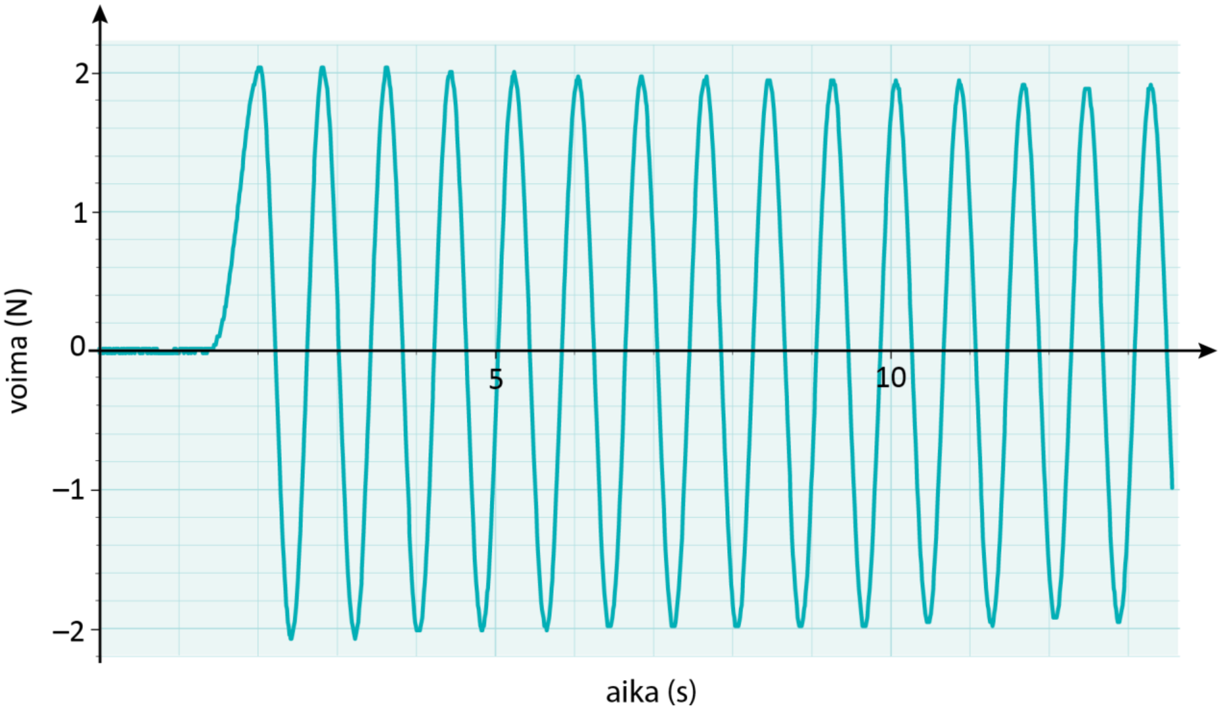
$$kx = mg$$

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{1{,}0\,\text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{259{,}264\,\text{N/m}} = 0{,}0378\,\text{m} \approx 3{,}8\,\text{cm}.$$

Tehtävä 9.

punnuksen massa m = 410 g

a) Esitetään voima-anturin lukema ajan suhteen.



Jousen voima välittyy voima-anturiin, joten jousen voima muuttuu samalla tavalla kuin voima-anturin lukema. Määritetään jousen värähtelyn jaksonaika kymmenen värähdyksen jaksonajan keskiarvosta.

$$T = \frac{8{,}04\ \mathrm{s}}{10} = 0{,}804\ \mathrm{s} \approx 0{,}80\ \mathrm{s}$$

b) Voima-anturi nollattiin, kun punnus roikkui vapaana jousessa. Kun jousta venytetään, voima välittyy jousen kautta voima-anturille. Jousen voima muuttuu yhtä paljon kuin voima-anturin voima. Kuvaajan ensimmäinen voiman lukeman kasvu on venytystapahtuma. Jousta venytettiin enimmillään 2,06 N:n voimalla. Jousi vaikuttaa käteen yhtä suurella, mutta vastakkaissuuntaisella voimalla kuin käsi jouseen. Tällöin venytyksessä jousen jousivoima *F* = 2,06 N.

Määritetään jousen jousivakio jaksonajan perusteella.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{m}{k}$$

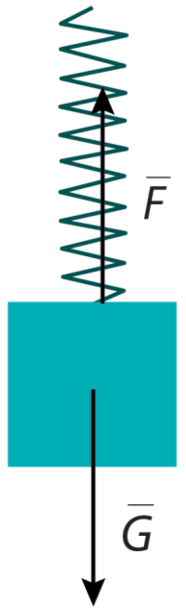
$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Jousen venymä saadaan jousivoiman avulla

$$F = kx = \frac{4\pi^2 m}{T^2}x$$

$$x = \frac{FT^2}{4\pi^2 m} = \frac{2{,}06\,\text{N} \cdot (0{,}804\text{ s})^2}{4\pi^2 \cdot 0{,}410\,\text{kg}} = 0{,}0822689\,\text{m} \approx 8{,}2\,\text{cm}.$$

c) Piirretään voimakuvio tilanteesta, jossa punnus on ripustettu jouseen.



$\overline{G} =$ punnuksen paino

$\overline{F} =$ jousen jousivoima

Valitaan positiivinen suunta ylöspäin. Kun punnus on paikallaan ja tasapainossa, Newtonin II lain mukaan punnukseen kohdistuva kokonaisvoima on

$F - G = 0.$

Kun punnus ripustettiin jouseen, jousen venymä oli

$$F = G$$
$$kx = mg$$
$$x = \frac{mg}{k}.$$

Koska jousivakio on jouselle ominainen suure, b-kohdan mukaan jousen venymäksi saadaan

$$x = \frac{\cancel{m}g}{\frac{4\pi^2 \cancel{m}}{T^2}} = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}804\ \mathrm{s})^2}{4\pi^2} = 0{,}1606\ \mathrm{m} \approx 16{,}1\ \mathrm{cm}.$$

Kun punnus otettiin jousesta pois, jousi lyheni venymän *x* = 16,1 cm verran.

Tehtävä 10.

a) Videolta havaitaan, että aluksi molemmat punnukset heiluivat samaan tahtiin. Sitten toinen punnuksista poistettiin ja heilahduksen amplitudia kasvatettiin. Seuraavaksi langan pituutta lyhennettiin ja heilahdusaika lyheni selvästi.

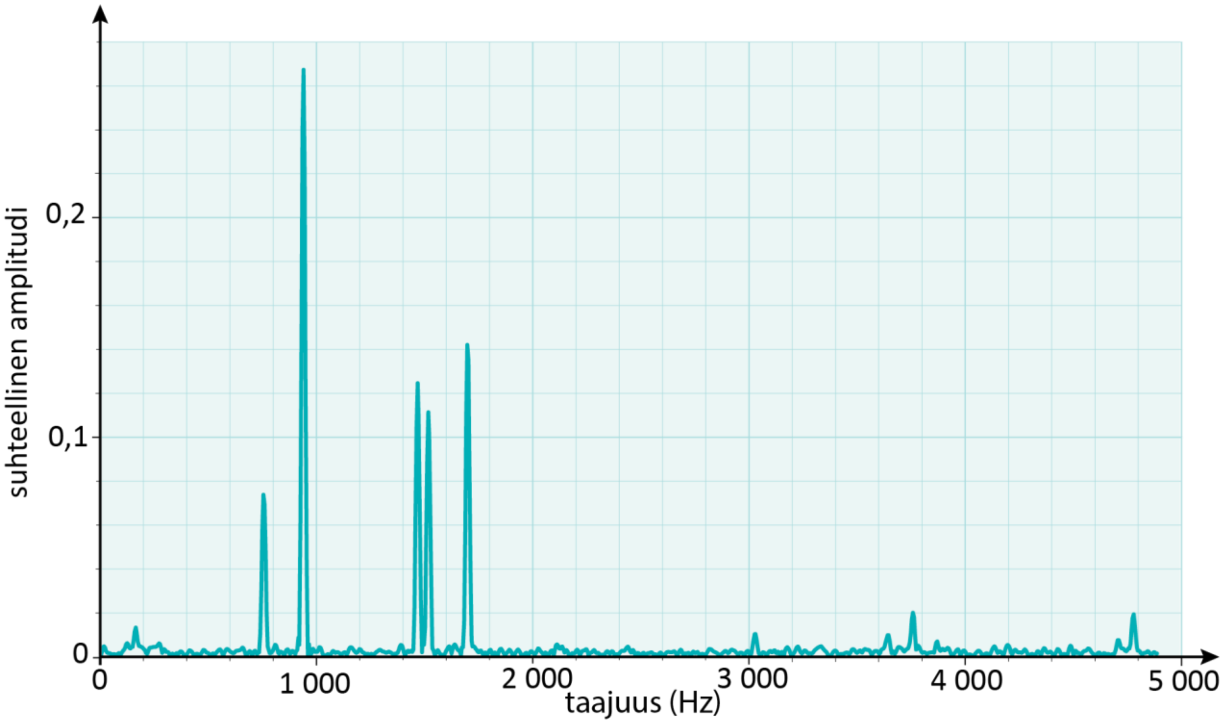
b) Jaksonaikaan vaikuttaa langan pituus. Mitä pidempi on lanka, sitä suurempi on jaksonaika. Videon on kaksi eri massaista kuulaa. Video perusteella matemaattisen heilurin langan päässä oleva massa ei vaikuta heilahdusaikaan. Myös heilahtelun amplitudi ei vaikuta jaksonaikaan.

c) Videon perusteella kuuden heilahduksen aika on t = 29,58 s – 21,04 s = 8,18 s. Heilurin heilahdusaika on T = 8,18 s / 6 = 1,363 s ≈ 1,4 s.

Tehtävä 11.

a) Ääni ilmassa on ilmassa eteneviä paineaaltoja. Kun triangelia lyödään teräksisellä puikolla, triangeli alkaa värähdellä. Värähtely aiheuttaa ilmaan jaksottaisesti muuttuvia paineaaltoja eli ääntä.

b) Määritetään triangelin tuottamien äänten taajuudet FFT-analyysilla. Korkein piikki kuvaa sen äänen taajuutta, joka kuuluu voimakkaimmin.



Kuvaajan perusteella suurin suhteellinen amplitudi on taajuudella f = 937,5 Hz ≈ 940 Hz.

Tehtävä 12.

äänimerkin taajuus f_0 = 510 Hz
auton nopeus v_l = 45 km/h
äänen nopeus v = 340 m/s

a) Kun äänilähde tai havaitsija liikkuvat toisiinsa nähden, havaitsija kuulee äänen taajuuden muuttuvan. Kyseessä on Dopplerin ilmiö. Kun äänilähde liikkuu, sen edessä ääniaaltorintamat ovat tiheämmässä. Auton etupuolella oleva jalankulkija kohtaa samassa ajassa enemmän aaltorintamia eli jalankulkija kuulee äänimerkin äänen korkeampana. Kuultavan äänen taajuus on suurempi kuin auton tuottaman äänimerkin taajuus. Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $v = f\lambda$ eli kun taajuus f suurenee, niin aallonpituus λ pienenee, sillä äänen nopeus on ilmassa sama, 340 m/s.

   Kuultavan äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen äänilähteen ja havaitsijan välisen etäisyyden neliöön. Koska äänimerkin lähettänyt auto lähestyy jalankulkijaa, myös äänen intensiteetti suurenee, mikäli äänimerkkiä toistetaan pitkään. Tällöin jalankulkija kuulee äänen voimakkaampana.

b) Tarkastellaan tilannetta Dopplerin ilmiönä, jossa äänilähde liikkuu kohti jalankulkijaa. Jalankulkijan kokema äänen taajuus on

$$f = f_0 \frac{v}{v \pm v_l}.$$

Koska taajuus kasvaa, pitää yhtälön nimittäjän pienentyä ja siksi yhtälöstä valitaan miinusmerkki. Kuullun äänen taajuus on

$$f = f_0 \frac{v}{v - v_l}.$$

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan saadaan havaitsijan kokeman äänen aallonpituus

$$v = f\lambda$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{v}{f_0 \dfrac{v}{v - v_0}} = \frac{v - v_0}{f} = \frac{340\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{45}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{510\,\text{Hz}} = 0{,}642\,\text{m} \approx 64\,\text{cm}.$$

Tehtävä 13.

Kun tuotetaan ääntä, jonka taajuus vastaa lasin ominaistaajuutta, lasi on resonanssissa äänen kanssa. Lasin värähtelyn amplitudi kasvaa ja on lopulta niin suuri, että lasi rikkoutuu. Kaiuttimen tuottaman energian määrä täytyy olla hyvin suuri.

Tehtävä 14.

intensiteettitaso 12 metrin etäisyydellä L_1 = 41 dB
etäisyys keskustelijoista alussa r_1 = 3,8 m
vertailuintensiteetti $I_0 = 1 \cdot 10^{-12}$ W/m^2

a) Intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Kun mittaaja menee lähemmäksi keskustelijoita, etäisyys pienenee, joten äänen intensiteetti kasvaa.

b) kuullun äänen intensiteettitaso L_2 = 62 dB

Ratkaistaan äänen intensiteetti. Se saadaan intensiteettitasosta.

$$L_1 = 10\lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right)\text{dB} \quad \| : 10\,\text{dB}$$

$$\frac{L_1}{10\,\text{dB}} = \lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \quad \| \, 10^{()}$$

$$10^{\lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right)} = 10^{\frac{L_1}{10\,\text{dB}}}$$

$$\frac{I_1}{I_0} = 10^{\frac{L_1}{10\,\text{dB}}} \quad \| \cdot I_0$$

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10\,\text{dB}}}$$

$$= 1\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\cdot 10^{\frac{41\,\cancel{\text{dB}}}{10\,\cancel{\text{dB}}}}$$

$$= 1\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\cdot 10^{4,1}$$

$$= 1\cdot 10^{-7,9}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$= 1,258925412\cdot 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Määritetään kuullun 62 dB:n äänen intensiteetti.

$$L_1 = 10\lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right)\text{dB} \quad \| : 10\,\text{dB}$$

$$\frac{L_1}{10\,\text{dB}} = \lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \quad \| \, 10^{()}$$

$$10^{\lg\left(\frac{I_1}{I_0}\right)} = 10^{\frac{L_1}{10\,\text{dB}}}$$

$$\frac{I_1}{I_0} = 10^{\frac{L_1}{10\,\text{dB}}} \quad \| \cdot I_0$$

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10\,\text{dB}}}$$

$$= 1 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{\frac{62\,\cancel{\text{dB}}}{10\,\cancel{\text{dB}}}} = 1 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{6,2} = 1 \cdot 10^{5,8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$= 1{,}584\,89 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Äänilähteen tuottaman äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön $I \sim \frac{1}{r^2}$. Intensiteettien suhteeksi saadaan $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}}$.

Keskustelijoiden tuottama intensiteettitaso on 62 dB, kun mittaajan etäisyys on

$$r_2^{\,2} = \frac{r_1^{\,2} I_1}{I_2}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{r_1^{\,2} I_1}{I_2}} = \sqrt{\frac{(3{,}8\,\text{m})^2 \cdot 1{,}258\,925\,412 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1{,}584\,893\,192 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}} = 0{,}338\,675\,\text{m} \approx 34\,\text{cm}.$$

Tehtävä 15.

äänen nopeus ilmassa v_1 = 343 m/s
äänen nopeus vedessä v_2 = 1 480 m/s
äänen tulokulma α = 9,2°

a) Äänen nopeus on suurempi vedessä kuin ilmassa. Taittumislain mukaan $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$. Koska aallon nopeus kasvaa, myös taitekulma kasvaa, joten aaltorintama kääntyy normaalista poispäin. Jos tulokulma on riittävän suuri, kokonaisheijastuminen on mahdollista.

b) Kun ääni kohtaa rajapinnan, osa äänestä heijastuu. Heijastunut ääni noudattaa heijastumislakia. Osa ääniaallosta taittuu rajapinnassa. Lasketaan taittuneen ääniaallon taitekulma taittumislain avulla.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \sin^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1\right)\\ &= \sin^{-1}\left(\frac{1\,480\,\text{m/s}}{343\,\text{m/s}}\sin 9{,}2^\circ\right)\\ &= 43{,}6195^\circ \approx 44^\circ.\end{aligned}$$

Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan $v = f\lambda$. Äänen taajuus ei muutu rajapinnassa. Koska äänen nopeus kasvaa, myös ääniaallon aallonpituus kasvaa rajapinnassa.

c) Koska äänen taajuus ei muutu rajapinnassa, niin aaltoliikkeen perusyhtälön ja taittumislain avulla voidaan ratkaista aallonpituus vedessä.

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\cancel{f}\lambda_1}{\cancel{f}\lambda_2}$$

$$\lambda_2=\frac{v_2}{v_1}\lambda_1=\frac{1480\,\text{m/s}}{343\,\text{m/s}}\lambda_1=4{,}3148688\lambda_1\approx 4{,}31\lambda_1.$$

Aallonpituuden kasvu prosentteina

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}\cdot 100\,\%=\frac{4{,}31\lambda_1-\lambda_1}{\lambda_1}\cdot 100\,\%=313\,\%.$$

Tehtävä 16.

kitaran kielen pituus L = 0,65 m
kielen tuottaman äänen taajuus f = 110 Hz

a) Kun kieli värähtelee perustaajuudella, kieleen syntyy seisova aalto, jossa on yksi kupu. Tällöin aallonpituudelle on voimassa

$$L = \frac{\lambda}{2}$$
$$\lambda = 2L.$$

Aaltoliikkeen perusyhtälön avulla saadaan syntyneen aallon nopeus.

$v = f\lambda = f2L$ = 110 Hz · 2 · 0,65 m = 143 m/s ≈ 140 m/s

b) Lämpötilassa 20 °C äänen nopeus on 343 m/s.

Toisestä päästä suljettuun pilliin syntyy seisova aalto, jossa on puolikas kupu. Tällöin aallonpituudelle on voimassa

$$L = \frac{\lambda}{4}$$
$$\lambda = 4L.$$

Kun äänen taajuus on 110 Hz, saadaan aaltoliikkeen perusyhtälöstä pillin pituudeksi

$$v = f\lambda$$

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$$4L = \frac{v}{f}$$

$$L = \frac{v}{4f} = \frac{343\,\mathrm{m/s}}{4 \cdot 110\,\mathrm{Hz}} = 0{,}7795\,\mathrm{m} \approx 78\,\mathrm{cm}.$$

Tehtävä 17.

a) Lääketieteellisessä kuvantamisessa ultraäänen eri nopeuteen eri aineissa. Kuvantamisessa käytettävässä ultraäänitutkimuksessa ultraäänikuva muodostetaan kudosten rajapinnoilta heijastuneiden signaalien perusteella. Kun ultraääni osuu rajapintaan, osa ultraäänestä läpäisee rajapinnan ja osa heijastuu. Kun ultraäänisignaalin nopeus kudoksessa tunnetaan, ultraäänisignaalin ja kaiun välisestä aikaerosta saadaan selville, kuinka kaukana rajapinta sijaitsee. Ultraääntä käytetään hyvin yleisesti esimerkiksi sikiön tai pehmytkudoksen, kuten sydämen tai sappirakon tutkimisessa.

b) ultraäänen nopeus kudoksessa v = 1 500 m/s
ultraäänen aallonpituus λ = 0,72 mm

Ultraääni tuotetaan pietsosähköisellä kiteellä, jonka värähdystaajuus kertoo, kuinka monta kertaa sekunnissa kide värähtää. Ultraääni noudattaa aaltoliikkeen perusyhtälöä, josta voidaan ratkaista taajuus.

$$v = f\lambda$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1\,500\,\text{m/s}}{0{,}72\cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 2\,083\,333\,\text{Hz}$$

Pietsosähköinen kide värähtää $2{,}1 \cdot 10^6$ kertaa sekunnissa.

Tehtävä 18.

opettajan huilun äänen taajuus f_1 = 440 Hz
huojuntataajuus f_h = 5,2 Hz

a) Kun poikkihuilua soitetaan, poikkihuilun sisällä olevaan ilmapatsaaseen syntyy seisova aalto, jolla on tietty taajuus. Taajuus riippuu syntyneen aallon aallonpituudesta sekä aallon nopeudesta. Kun opiskelija tulee pakkasella sisälle, soitin on kylmempi kuin sisällä oleva soitin. Äänen nopeus ilmassa riippuu ilman lämpötilasta. Oppilaan huilun sisällä olevassa kylmässä ilmassa äänen nopeus on pienempi. Koska huilun pituus ei juuri ollenkaan muutu, sillä pituuden lämpölaajeneminen on niin pientä huilun materiaalilla pienellä lämpötila-alueella, huiluun syntyneen seisovan aallon aallonpituus ei muutu. Näin ollen aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaisesti, kun äänen nopeus pienenee, myös äänen taajuus pienenee. Kylmän huilun äänen taajuus on hiukan pienempi kuin lämpimässä olleen huilun äänen taajuus. Kun soittimia soitetaan yhtä aikaa, kuullaan huojunta. Tällöin soittimien tuottamien äänten interferenssi voimistaa ja heikentää kuultavan äänen voimakkuutta jaksollisesti. Ääniaaltojen muodostaman summa-aallon amplitudi vuoroin suurenee ja pienenee.

b) Edellisen kohdan mukaan oppilaan huilun äänen taajuus on pienempi kuin opettajan huilun äänen taajuus. Tällöin huojuntataajuuden avulla saadaan määritettyä oppilaan huilun äänen taajuus.

$f_\mathrm{h} = f_1 - f_2$

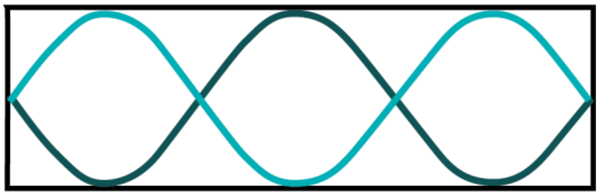
$f_2 = f_1 - f_\mathrm{h} = 440\ \mathrm{Hz} - 5{,}2\ \mathrm{Hz} = 434{,}8\ \mathrm{Hz} \approx 435\ \mathrm{Hz}.$

Tehtävä 19.

putken pituus L = 4,8 m
äänen nopeus v = 340 m/s

a) Kun putkessa oleva ilma liikkuu, putken sisälle syntyy aalto, joka heijastuu suljetusta päästä samanlaisena takaisin samanlaisena. Heijastuneen aallon taajuus ja aallonpituus ovat samat kuin alkuperäisen aallon taajuus ja aallopituus. Jos aallon taajuus on juuri sopiva, kohtaavien aaltojen interferenssi eli yhteisvaikutus tuottaa putkeen seisovan aallon.

b) Toisen ylävärähtelyn tapauksessa molemmista päistä suljettuun putkeen syntyy kolme kupua



Syntyneen seisovan aallon aallonpituus on

$$L = \frac{3}{2}\lambda$$

$$\lambda = \frac{2}{3}L.$$

Äänen taajuus saadaan ratkaistua aaltoliikkeen perusyhtälöstä.

$$v = f\lambda = f\frac{2}{3}L$$

$$f = \frac{3v}{2L} = \frac{3 \cdot 340\,\mathrm{m/s}}{2 \cdot 4{,}8\,\mathrm{m}} = 106{,}25\,\mathrm{Hz} \approx 110\,\mathrm{Hz}$$

Tehtävä 20.

a) Lepakot tuottavat ultraääniä, jotka heijastuvat ympäristön pinnoista sekä saalishyönteisistä. Ultraäänen kaikujen perusteella lepakot pystyvät havainnoimaan ympäristöään myös pimeässä.

b) Ihmisten ja valaiden kudoksissa on paljon nestettä. Koska ultraääni heikkenee ilmassa selvästi voimakkaammin kuin vedessä, valaat pystyvät kaikuluotauksen perusteella päättelemään esimerkiksi lajitovereidensa keuhkoissa olevan ilman määrän. Sairaaloissa ultraäänitutkimuksissa hyödynnetään samaa ilmiötä. Ultraääni etenee ja vaimenee eri kudoksissa eri tavoin, joten heijastuneiden ultraäänien avulla saadaan tietoa esimerkiksi potilaan sisäelimistä tai verenkierrosta.

c)

Huom!

Painetussa kirjassa on virhe vaimenevaa aaltoa kuvaavassa funktiossa. Oikea kaava on:

$$y(x,t) = Ae^{-\alpha x} \sin\left(\frac{2\pi f}{v}x + 2\pi ft + \varphi\right),$$

Tehtävän ratkaisu on laskettu tämän oikean kaavan mukaan.

vaimenemiskerroin ilmassa α_{ilma} = 12 cm^{-1}
vaimenemiskerroin vedessä α_{vesi} = 0,0022 cm^{-1}
etäisyys ultraäänilähteestä x = 1,0 cm

Ultraäänisignaalin amplitudi pienenee, kun aalto etenee väliaineessa matkan x verran. Pienentyneen amplitudin suuruus etäisyydellä x on $Ae^{-\alpha x}$. Kun ultraääniaalto on edennyt 1 cm matkan, amplitudien suuruudet ovat

ilmassa: $A_{\text{ilma}} = Ae^{-\alpha_{\text{ilma}}x} = Ae^{-12\frac{1}{\text{cm}}\cdot 1\,\text{cm}} = Ae^{-12} = A \cdot 6{,}144 \cdot 10^{-6}$

vedessä: $A_{vesi} = Ae^{-\alpha_{\text{vesi}}x} = Ae^{-0{,}0022\frac{1}{\text{cm}}\cdot 1\,\text{cm}} = Ae^{-0{,}0022} = A \cdot 0{,}9978.$

Kun verrataan pienentyneitä amplitudeja ilmassa ja vedessä, huomataan että amplitudi vedessä on moninkertainen verrattuna vastaavaan amplitudiin ilmassa. Amplitudien suhde on

$$\frac{A_{\text{vesi}}}{A_{\text{ilma}}}=\frac{A\cdot 0{,}9978}{A\cdot 6{,}144\cdot 10^{-6}}=162\,402\approx 160\,000.$$