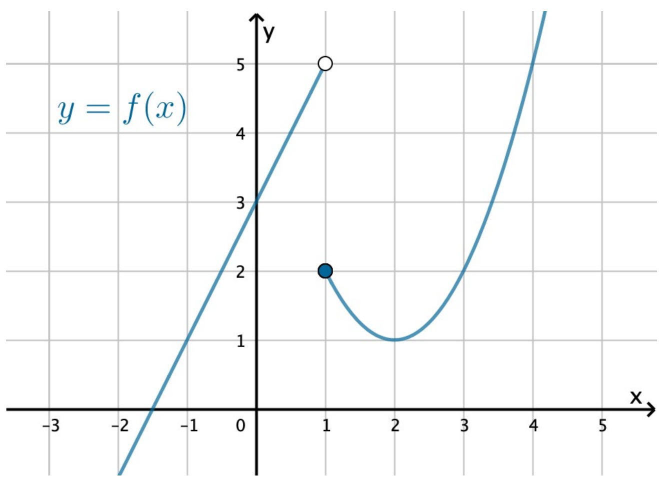
Taitopuntari 1

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) Piirretään funktion $f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{kun } x<1\\ x^2-4x+5, & \text{kun } x\geq 1\end{cases}$ kuvaaja.



kuvaajassa kaksi osaa: 2p
kuvaajan oikeat osat: 2p + 2p

b) Ratkaistaan, milloin lausekkeen $x-4$ arvot ovat epänegatiivisia. 1p

$$x-4\geq 0 \quad \| +4$$
$$x\geq 4$$ 1p

Lausekkeen $x-4$ arvot ovat epänegatiivisia, kun $x\geq 4$,
ja negatiivisia, kun $x<4$. 1p

Siis

$$|x-4| = \begin{cases} -(x-4), & \text{kun } x < 4 \\ x-4, & \text{kun } x \geq 4 \end{cases}$$ 2p

$$= \begin{cases} -x+4, & \text{kun } x < 4 \\ x-4, & \text{kun } x \geq 4. \end{cases}$$ 1p

Vastaus

b) $|x-4| = \begin{cases} -x+4, & \text{kun } x < 4 \\ x-4, & \text{kun } x \geq 4 \end{cases}$

Taitopuntari 2

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{kun } x < 1 \\ -3x + 6, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$

määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko **R**. 1p

Väleillä $x < 1$ ja $x > 1$ funktion f lauseke on polynomi, joten funktio f on jatkuva, kun $x \neq 1$. 2p

Kohdassa $x = 1$ funktion f lauseke vaihtuu. On osoitettava, että funktio f on jatkuva myös kohdassa $x = 1$. 2p

Määritetään funktion f arvo ja toispuoliset raja-arvot kohdassa 1.

1) Kohdassa $x = 1$ on $f(x) = -3x + 6$.

Siten $f(1) = -3 \cdot 1 + 6 = 3$. 1p

2) Kohdan $x = 1$ vasemmalla puolella on $f(x) = x^2 + 2$.

Siten $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} (x^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3$. 2p

3) Kohdan $x = 1$ oikealla puolella on $f(x) = -3x + 6$.

Siten $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (-3x + 6) = -3 \cdot 1 + 6 = 3$. 2p

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo, funktio f on jatkuva kohdassa 1. 2p

On osoitettu, että funktio f on kaikkialla jatkuva. □

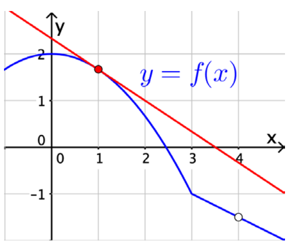
Taitopuntari 3

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

1. a) Funktio f on derivoituva kohdassa 1. 2p

Perustelu (ei vaadittu):

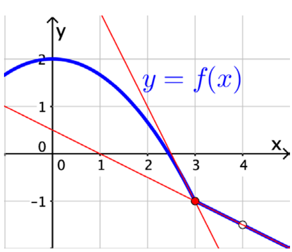
Kohtaan $x = 1$ kuvaajalla voidaan piirtää tangentti yksikäsitteisellä tavalla.



b) Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 3. 2p

Perustelu (ei vaadittu):

Kohdassa $x = 3$ funktion f kuvaajassa on terävä kärki, eikä siihen voida piirtää tangenttia yksikäsitteisellä tavalla.



c) Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 4. 2p

Perustelu (ei vaadittu):

Kohdassa $x = 4$ funktiota f ei ole määritelty, joten siihen kohtaan funktion kuvaajalle ei voida piirtää tangenttia.

2) **Tapa 1.** Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} && \text{1p}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(3(1+h)^2-4\right)-\left(3\cdot 1^2-4\right)}{h} && \text{1p}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3(1+2h+h^2)-4+1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3+6h+3h^2-3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6h+3h^2}{h} && \text{2p}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(6+3h)}{\cancel{h}}\\
&= \lim_{h\to 0}(6+3h) && \text{1p}\\
&= 6+3\cdot 0 = 6 && \text{1p}
\end{aligned}
$$

Tapa 2. Käytetään määritelmää $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} && \text{1p}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\left(3x^2-4\right)-\left(3\cdot 1^2-4\right)}{x-1} && \text{1p}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4+1}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-1)}{x-1} && \text{1p}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{3(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} && \text{1p}\\
&= \lim_{x\to 1}\big(3(x+1)\big) && \text{1p}\\
&= 3\cdot(1+1)=6 && \text{1p}
\end{aligned}
$$

Vastaus

1) **a)** on **b)** ei ole **c)** ei ole

2) $f'(1)=6$

Taitopuntari 4

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) 1) Tutkitaan, onko funktio $f(x)=\begin{cases} -x+5, & \text{kun } x \leq 3 \\ x^2-7x+14, & \text{kun } x>3 \end{cases}$

jatkuva kohdassa 3. Määritetään funktion arvo ja toispuoliset raja-arvot.

$f(3)=-3+5=2$ 1p

$\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-}(-x+5)=-3+5=2$ 1p

$\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+}(x^2-7x+14)=3^2-7\cdot 3+14=2$ 1p

Koska $f(3)=\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+} f(x)$, niin funktio f on jatkuva kohdassa 3, ja siten se voi olla derivoituva kohdassa 3. 1p

2) Tutkitaan, onko funktio f derivoituva kohdassa 3. Koska funktion lauseke vaihtuu tässä kohdassa, on määritettävä toispuoliset derivaatat.

Lasketaan funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa 3.

$$f'_{-}(3)=\lim_{x\to 3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3-}\frac{-x+5-2}{x-3}$$ Lasketaan CAS-laskimella. 2p

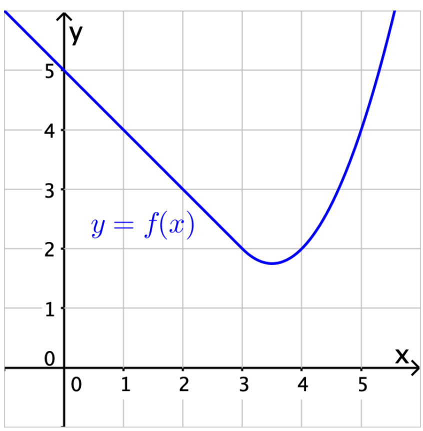
$$=-1$$ 1p

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa 3.

$$
\begin{aligned}
f'_{+}(3) &= \lim_{x \to 3+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3+} \frac{x^2 - 7x + 14 - 2}{x - 3} \quad \text{Lasketaan CAS-laskimella.} \qquad 2p \\
&= -1 \qquad 1p
\end{aligned}
$$

Koska toispuoliset derivaatata ovat yhtä suuret, niin $f'(3) = -1$.
Funktio f on siis derivoituva kohdassa 3.

b) Piirretään funktion f kuvaaja.



1p

Koska funktio f on derivoituva kohdassa 3, funktion kuvaajan osat liittyvät kohdassa $x = 3$ yhteen ilman terävää kärkeä. 1p

Vastaus

on derivoituva kohdassa 3

Taitopuntari 5

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

Määritetään funktion $f(x)=3x^4-2x^3-3x^2$
derivaattafunktio f' ja toisen kertaluvun derivaattafunktio f''.

$$f'(x)=12x^3-6x^2-6x$$
$$f''(x)=36x^2-12x-6$$

1p + 1p

Ratkaistaan derivaattafunktion f' nollakohdat.

$$12x^3-6x^2-6x=0$$
$$6x(2x^2-x-1)=0$$
$$6x=0 \text{ tai } 2x^2-x-1=0$$

Erotetaan yhteinen tekijä.

1p

$$x=0 \qquad x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}$$
$$=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}$$
$$x=\frac{1+3}{4}=1 \quad \text{tai} \quad x=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$$

1p + 1p + 1p

Lasketaan toisen kertaluvun derivaattafunktion arvo derivaattafunktion nollakohdissa $-\frac{1}{2}$, 0 ja 1

$f''(-\frac{1}{2}) = 9 > 0$

$f''(0) = -6 < 0$

$f''(1) = 18 > 0$

1p + 1p + 1p

Koska $f''(-\frac{1}{2}) > 0$, niin $x = -\frac{1}{2}$ on minimikohta.

Koska $f''(0) < 0$, niin $x = 0$ on maksimikohta.

Koska $f''(1) > 0$, niin $x = 1$ on minimikohta.

1p + 1p + 1p

Vastaus

maksimikohta $x = 0$, minimikohdat $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = 1$

Taitopuntari 6

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) Päätellään funktion monotonisuus derivaattafunktion merkeistä.
Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 - 5$. 1p

$f'(x) = 3x^2$ 1p

Koska $f'(x) = 0$ ainoastaan kohdassa $x = 0$
ja muulloin $f'(x) > 0$,
niin funktio f on aidosti kasvava. 2p

Siten funktiolla f on käänteisfunktio. □ 2p

b) Käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke saadaan selville ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$. 1p

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ x^3 - 5 &= y \quad |: +5 \\ x^3 &= y + 5 \\ x &= \sqrt[3]{y+5} \end{aligned}$$ 2p

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+5}$. 1p

Kun muuttujaksi vaihdetaan x, saadaan $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5}$.
2p

Vastaus

b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5}$

Taitopuntari 7

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$(f^{-1})'(-6) = \frac{1}{f'(x)}$, missä $f(x) = -6$. 2p

Määritetään funktion $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 10$ derivaattafunktio.

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$ 2p

Ratkaistaan käänteisfunktion derivointia varten muuttuja x.

$$\begin{aligned} f(x) &= -6 \\ x^3 + 6x^2 + 12x + 10 &= -6 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella. 2p

Siis

$f(-4) = -6$,

$f'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 12 \cdot (-4) + 12 = 12$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$ 3p

ja

$(f^{-1})'(-6) = \frac{1}{f'(-4)} = \frac{1}{12}$. 3p

Vastaus

$(f^{-1})'(-6) = \frac{1}{12}$

Taitopuntari 8

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3}{9x-4x^3}$ $(x^3$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8}{\frac{9}{x^2}-4}$ 2p

$= \dfrac{8}{0-4}$ 2p

$= -2$ 1p

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^3-7x^2)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3\cdot(3-\frac{7}{x})\right)$ 2p

$= -\infty\cdot(3-0)$ 1p

$= -\infty$ 1p

Raja-arvoa ei ole olemassa, epäoleellinen raja-arvo on $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x}{5\cdot 7^x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{5}\cdot\frac{3^x}{7^x}\right)$ 1p

$= \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^x)$ 1p

$= \frac{1}{5}\cdot 0$ 1p

$= 0$ 1p

Vastaus

a) –2

b) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo on $-\infty$

c) 0

Taitopuntari 9

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

Funktio $f(x) = \frac{2-x}{2x^2-8}$ ei ole määritelty, kun $2x^2 - 8 = 0$.

Ratkaistaan määrittelyehto.

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 8 &= 0 \\
2x^2 &= 8 \\
x^2 &= 4 \\
x &= \sqrt{4} = 2 \text{ tai } x = -\sqrt{4} = -2
\end{aligned}
$$

Funktion f on siis määritelty, kun $x \neq -2$ ja $x \neq 2$. 1p

Sievennetään funktion f lauseketta.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2-x}{2x^2-8} \\
&= \frac{2-x}{2(x^2-4)} \\
&= \frac{2-x}{2(x^2-2^2)} \\
&= \frac{\overset{-1}{\cancel{-(x-2)}}}{2(x+2)\underset{1}{\cancel{(x-2)}}} && \text{1p} \\
&= \frac{-1}{2(x+2)}, \text{ missä } x \neq -2 \text{ ja } x \neq 2 && \text{1p}
\end{aligned}
$$

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-1}{2 \cdot (x+2)} = \dfrac{-1}{2 \cdot (-2+2)} = \dfrac{-1}{0}$ ei määritelty 1p

Koska nimittäjän raja-arvo on nolla, mutta osoittajan raja-arvo ei ole nolla, niin funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa –2. 1p

Tutkitaan funktion $f(x) = \dfrac{-1}{2(x+2)}$ merkkiä kohdan $x = -2$ läheisyydessä.

Kun $x \to -2-$, niin $x + 2 < 0$. 1p

Siten $f(x) = \dfrac{-1}{2\underbrace{(x+2)}_{<0}} > 0$ ja $\lim\limits_{x \to -2-} f(x) = \infty$. 1p

Kun $x \to -2+$, niin $x + 2 > 0$. 1p

Siten $f(x) = \dfrac{-1}{2\underbrace{(x+2)}_{>0}} < 0$ ja $\lim\limits_{x \to -2-} f(x) = -\infty$

1p

Koska toispuoliset epäoleelliset raja-arvot ovat eri merkkiset, funktiolla f ei ole epäoleellista raja-arvoa kohdassa –2. 1p

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-1}{2 \cdot (x+2)} = \dfrac{-1}{2 \cdot (2+2)} = -\dfrac{1}{8}$ 2p

Vastaus

a) ei raja-arvoa eikä epäoleellista raja-arvoa

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\dfrac{1}{8}$

Taitopuntari 10

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) Funktio $f(x)=\dfrac{1}{x}$ on määritelty välillä $[1,\infty[$ ja saa tällä välillä vain positiivisia arvoja. 1p

Lasketaan pinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x && \text{1p} \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_{1}^{t} \ln|x| && \text{1p} \\
&= \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) && \text{1p} \\
&= \infty - 0 \\
&= \infty && \text{1p}
\end{aligned}
$$

Pinta-ala on äärettömän suuri. 1p

b) Funktio $f(x)=\frac{1}{x^2}$ on määritelty välillä $[1,\infty[$ ja saa tällä välillä vain positiivisia arvoja. 1p

Lasketaan pinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-2}dx && \text{1p} \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_1^t -x^{-1} && \text{1p} \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_1^t -\frac{1}{x} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t}-\left(-\frac{1}{1}\right)\right) && \text{1p} \\
&= 0+1 \\
&= 1 && \text{1p}
\end{aligned}
$$

Alueen pinta-ala on 1. 1p

Vastaus

a) äärettömän suuri

b) 1

Taitopuntari 11

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

Kyseessä on epäoleellinen integraali, koska funktio ei ole määritelty integroimisvälin jokaisessa kohdassa.

Funktio $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ on määritelty, kun $x \neq 0$. 1p

Koska $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} > 0$ aina, niin kysytty pinta-ala on

$A = \int_{-4}^{4} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x$, mikäli tämä epäoleellinen integraali suppenee.

Jaetaan integraali kahteen osaan kohdassa 0, jossa lauseke $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ ei ole määritelty.

1p

$$\int_{-4}^{4} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Lasketaan epäoleelliset integraalit.

$$\int_{-4}^{0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to 0-} \int_{-4}^{r} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

1p

$$= \lim_{r\to 0-} \int_{-4}^{r} x^{-\frac{2}{5}}\,\mathrm{d}x$$

1p

$$= \lim_{r\to 0-} \Big/_{-4}^{r} \left(\frac{5}{3} x^{\frac{3}{5}}\right)$$

1p

$$= \frac{5}{3} \cdot \lim_{r\to 0-} \Big/_{-4}^{r} x^{\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \lim_{r\to 0-} \left(r^{\frac{3}{5}} - (-4)^{\frac{3}{5}}\right)$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \left(0 + \sqrt[5]{4^3}\right)$$

1p

$$= \frac{5}{3} \cdot \sqrt[5]{4^3}$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \sqrt[5]{64}$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \sqrt[5]{32 \cdot 2}$$

$$= \frac{10\sqrt[5]{2}}{3}$$

1p

$$\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to 0+} \int_{r}^{4} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

1p

$$= \frac{5}{3} \cdot \lim_{r\to 0+} \Big/_{r}^{4} x^{\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \lim_{r\to 0+} \left(4^{\frac{3}{5}} - r^{\frac{3}{5}}\right)$$

1p

$$= \frac{5}{3} \cdot \left(\sqrt[5]{4^3} - 0\right)$$

1p

$$= \frac{5}{3} \cdot \sqrt[5]{4^3}$$

$$= \frac{10\sqrt[5]{2}}{3}$$

1p

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{4}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_{-4}^{0}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{10\sqrt[5]{2}}{3}+\frac{10\sqrt[5]{2}}{3}\\ &= \frac{20\sqrt[5]{2}}{3}\quad(\approx 7{,}66)\end{aligned}$$

1p

Pinta-ala on $\frac{20\sqrt[5]{2}}{3}$.

Vastaus

$\frac{20\sqrt[5]{2}}{3}$

Taitopuntari 12

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Ehdon 1 mukaan tulee olla $\frac{a}{x^2} \geq 0$ kaikilla $3 \leq x \leq 6$.

Siten $a \geq 0$. 1p

Määritetään vakio a ehdon 2 avulla.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{3} f(x)\mathrm{d}x + \int_{3}^{6} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$ 1p

$$\int_{-\infty}^{3} 0\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{6} \frac{a}{x^2}\mathrm{d}x + \int_{6}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = 1$$ CAS-laskimella 1p

$$\frac{a}{6} = 1$$

$$a = 6$$ 1p

Saatu ratkaisu toteuttaa ehdon $a \geq 0$, joten $a = 6$.

b) Lasketaan todennäköisyys.

$$P(X \leq 4) = \int_{-\infty}^{4} f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{1p}$$

$$= \int_{-\infty}^{3} f(x)\mathrm{d}x + \int_{3}^{4} f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{1p}$$

$$= \int_{-\infty}^{3} 0\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{4} \frac{6}{x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{CAS-laskimella} \qquad \text{1p}$$

$$= \frac{1}{2} = 0{,}50 \qquad \text{1p}$$

c) Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{1p}$$

$$= \int_{-\infty}^{3} x f(x)\mathrm{d}x + \int_{3}^{6} x f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{1p}$$

$$= \int_{-\infty}^{3} x \cdot 0\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{6} x \cdot \frac{6}{x^2}\mathrm{d}x + \int_{6}^{\infty} x \cdot 0\,\mathrm{d}x \qquad \text{CAS-laskimella 1}$$

$$= 6\ln 2 \approx 4{,}2 \qquad \text{1p}$$

Vastaus

a) 6

b) $\frac{1}{2} = 0{,}50$

c) 4,2

Taitopuntari 13

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 2 \\ \dfrac{8}{x^3}, & \text{kun } x \geq 2. \end{cases}$$

a) Kertymäfunktion arvo kohdassa t on $F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x.$

Kun $t < 2$, niin

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} 0\,\mathrm{d}x = 0.$$ 1p+1p

Kun $t \geq 2$, niin

$$F(t) = \int_{-\infty}^{2} 0\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{t} \frac{8}{x^3}\,\mathrm{d}x$$ CAS-laskimella 1p + 1p

$$= \frac{t^2 - 4}{t^2}.$$ 1p

Kertymäfunktio on 1p

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x^2}, & \text{kun } x \geq 2. \end{cases}$$

Huomaa, että kertymäfunktion voi antaa myös muodossa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 2 \\ 1 - \dfrac{4}{x^2}, & \text{kun } x \geq 2. \end{cases}$$

b) $P(X < 3) = P(X \le 3)$

$$= F(3) \qquad \text{1p}$$

$$= \frac{3^2 - 4}{3^2} \qquad \text{1p}$$

$$= \frac{5}{9} = 0,5555... \approx 0,56 \qquad \text{1p}$$

c) $P(3 \le X < 5) = P(3 \le X \le 5)$

$$= F(5) - F(3) \qquad \text{1p}$$

$$= \frac{5^2 - 4}{5^2} - \frac{3^2 - 4}{3^2} \qquad \text{1p}$$

$$= \frac{64}{225} = 0,2844... \approx 0,28 \qquad \text{1p}$$

Vastaus

a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x^2}, & \text{kun } x \ge 2. \end{cases}$

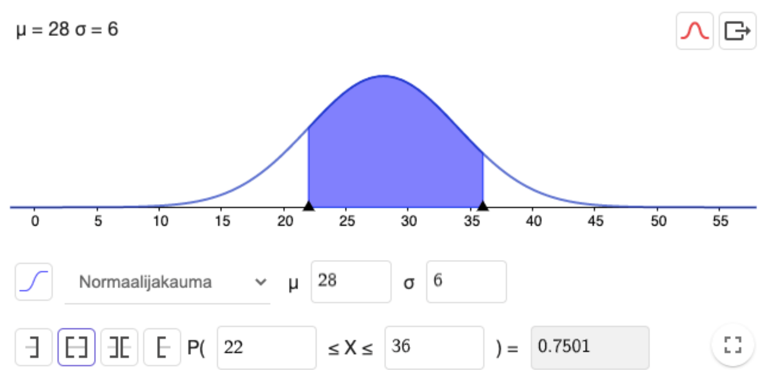
b) 0,56

c) 0,28

Taitopuntari 14

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

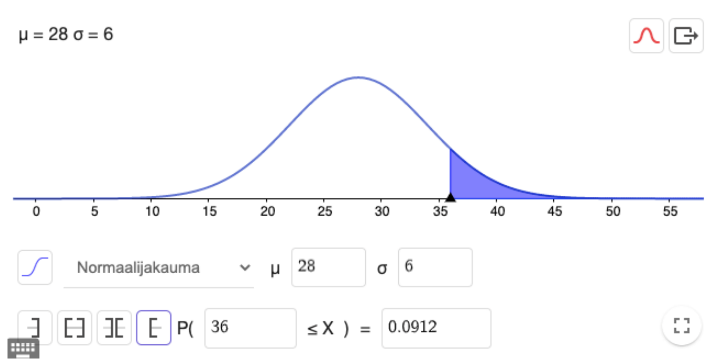
a) Normaalijakauman N(28, 6) odotusarvo $\mu = 28$
ja keskihajonta $\sigma = 6$. 1p



1p

$P(22 \leq X \leq 36) \approx 0,75$ 1p

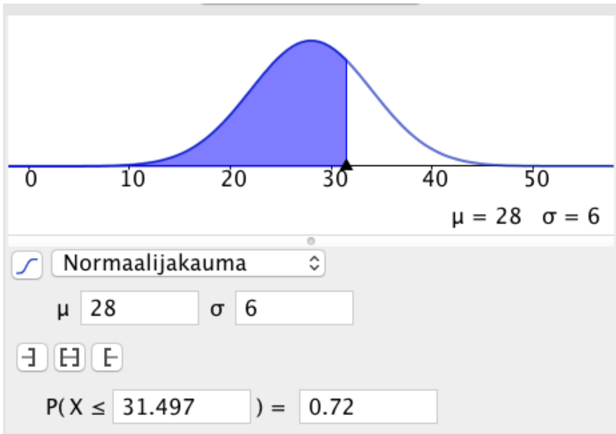
b)



2p

$P(X > 36) \approx 0,09$ 1p

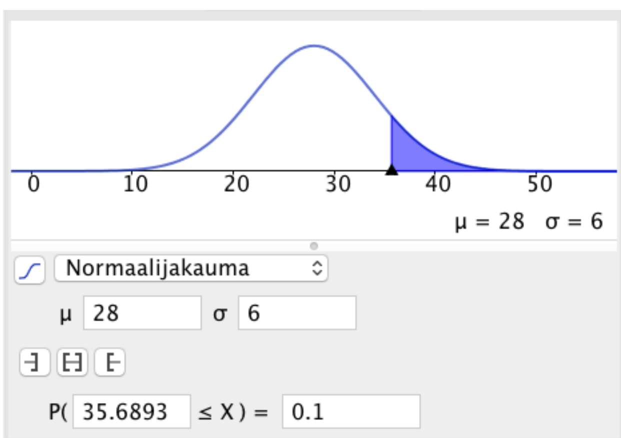
c)



2p

$P(X \le a) = 0{,}72;$ kun $a \approx 31{,}5.$ 1p

d)



2p

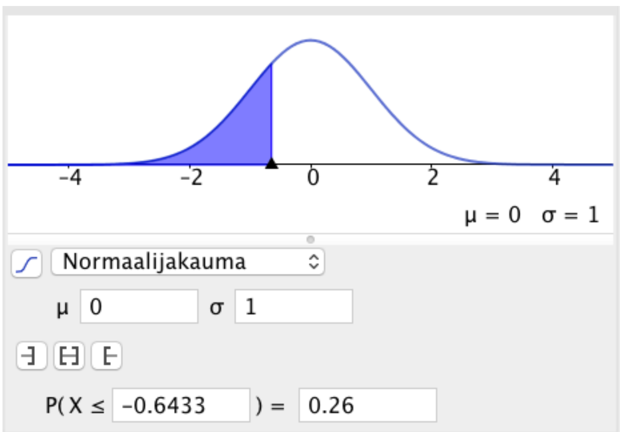
$P(X \ge a) = 0{,}10;$ kun $a \approx 35{,}7.$ 1p

Vastaus
a) 0,75
b) 0,09
c) 31,5
d) 35,7

Taitopuntari 15

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

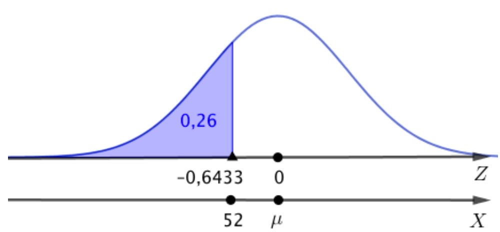
a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



3p

$P(Z \leq a) = 0{,}26$, kun $a \approx -0{,}6433$. 1p

b) a-kohdan perusteella satunnaismuuttujan arvoa $X = 52$ vastaava normitettu arvo on $Z = -0{,}6433$. 2p



Ratkaistaan satunnaismuuttujan X odotusarvo normitusyhtälön avulla.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \left| \begin{aligned} z &= -0{,}6433 \\ x &= 52 \\ \sigma &= 8 \end{aligned} \right.$$

$$-0{,}6433 = \frac{52-\mu}{8} \qquad \text{CAS-laskimella} \qquad \text{3p}$$

$$\mu = 75{,}1464 \approx 75 \qquad \text{2p}$$

Odotusarvo on 75. 1p

Vastaus
a) –0,6433
b) 75

Taitopuntari 16

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) Kyseessä on toistokoe, jossa $n = 80$ ja $p = 0{,}5$.
Lasketaan odotusarvo ja keskihajonta.

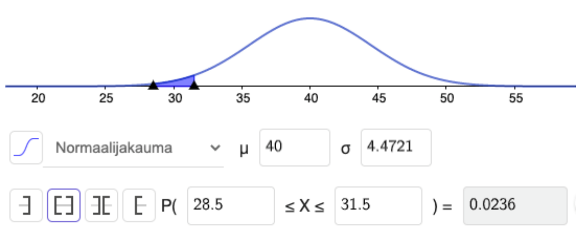
$$E(X) = np = 80 \cdot 0{,}5 = 40$$ 2p

$$D(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{80 \cdot 0{,}5 \cdot (1-0{,}5)} \approx 4{,}4721$$ 2p

Odotusarvo on 40 ja keskihajonta noin 4,5.

b) Satunnaismuuttuja X noudattaa likimain
normaalijakaumaa N(40; 4,4721). 1p

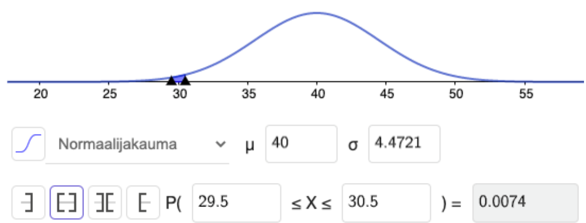
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada 29–31 kruunaa eli $P(28{,}5 \leq X < 31{,}5)$.



1p

$$P(28{,}5 \leq X < 31{,}5) \approx 0{,}0236$$ 2p

c) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys saada 30 kruunaa eli $P(29{,}5 \leq X < 30{,}5)$.



2p

$P(29{,}5 \leq X < 30{,}5) \approx 0{,}0074$ 2p

Vastaus
a) $E(X) = 40$, $D(X) \approx 4{,}5$
b) 0,0236
c) 0,0074

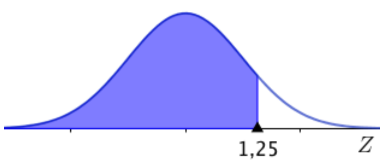
Taitopuntari 17

Vertaa omaa ratkaisuasi malliratkaisuun ja anna itsellesi pisteet.
Testistä voi saada enintään 12 pistettä.
Jos saat vähintään 8 pistettä, olet oppinut tästä luvusta perustaidot.
Huomaa, että tämä testi ei kerro, onko osaamisesi kiitettävää tasoa.

a) Todennäköisyys $P(Z \leq 1{,}25)$ voidaan lukea suoraan normaalijakauman taulukosta.

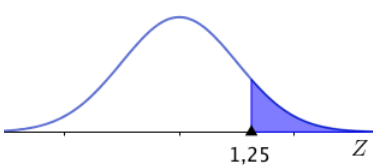
$P(Z \leq 1{,}25)$
$= \Phi(1{,}25)$ 1p
$\approx 0{,}8944$ 2p

	...	3	4	5	6
...					
1,2		8907	8925	8944	8962
1,3		9082	9099	9115	9131



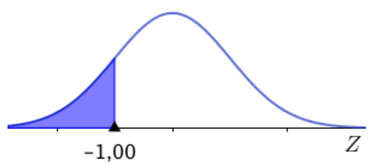
b) Tapahtuman $Z \geq 1{,}25$ vastatapahtuma on $Z < 1{,}25$.

$P(Z \geq 1{,}25) = 1 - P(Z < 1{,}25)$ 1p
$\approx 1 - 0{,}8944$ 1p
$= 0{,}1056$ 1p



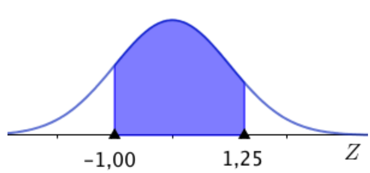
c) Normaalijakauman symmetrian perusteella

$$\begin{aligned} P(Z \le -1{,}00) &= P(Z \ge 1{,}00) && \text{1p} \\ &= 1 - P(Z \le 1{,}00) && \text{1p} \\ &= 1 - \Phi(1{,}00) \\ &\approx 1 - 0{,}8413 \\ &= 0{,}1587 && \text{1p} \end{aligned}$$



d) Kohtien a ja c perusteella

$$\begin{aligned} P(-1{,}00 \le Z \le 1{,}25) &= P(Z \le 1{,}25) - P(Z \le -1{,}00) && \text{1p} \\ &\approx 0{,}8944 - 0{,}1587 && \text{1p} \\ &= 0{,}7357 && \text{1p} \end{aligned}$$



Vastaus

a) $P(Z \le 1{,}25) \approx 0{,}8944$

b) $P(Z \ge 1{,}25) \approx 0{,}1056$

c) $P(Z \le -1{,}00) \approx 0{,}1587$

d) $P(-1{,}00 \le Z \le 1{,}25) \approx 0{,}7357$