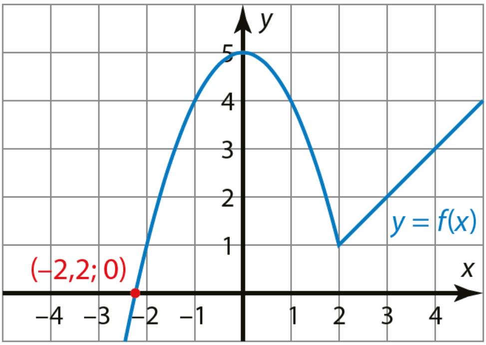
K1

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+5, & \text{kun } x\le 2\\ x-1, & \text{kun } x>2\end{cases}$$

a) Piirretään funktion f kuvaaja geometriaohjelmalla.



GeoGebrassa kuvaaja saadaan piirrettyä komennoilla:

$-x^2+5,\ x\le 2$

$x-1,\ x>2$

b) Määritetään kuvaajan ja x-akselin leikkauspiste.

Funktion f nollakohta on $x\approx -2{,}2$.

c) Ratkaistaan yhtälö $f(x)=0$ erikseen väleillä $x\le 2$ ja $x>2$.

Kun $x\le 2$, niin $f(x)=-x^2+5$.

$$\begin{aligned} f(x)&=0 \\ -x^2+5&=0 \quad \Big| -5 \\ -x^2&=-5 \quad \Big| \cdot(-1) \\ x^2&=5 \\ x=\sqrt{5} \quad &\text{tai} \quad x=-\sqrt{5} \end{aligned}$$

Vain ratkaisu $x=-\sqrt{5}$ toteuttaa ehdon $x\le 2$.

Kun $x > 2$, niin $f(x) = x - 1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x - 1 &= 0 \qquad \vert +1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Ratkaisu ei toteuta ehtoa $x > 2$.

Funktio f nollakohta on $x = \sqrt{5}$.

Vastaus
b) $x \approx -2{,}2$
c) $x = \sqrt{5}$

K2

a) Ratkaistaan, milloin funktion $8-x$ arvot ovat epänegatiivisia.

$$
\begin{aligned}
8-x &\geq 0 && \mid -8 \\
-x &\geq -8 && \mid \cdot(-1) \\
x &\leq 8
\end{aligned}
$$

Funktion $8-x$ arvot ovat epänegatiivisia, kun $x \leq 8$,
ja negatiivisia, kun $x > 3$.

Siis

$$
\begin{aligned}
|8-x| &= \begin{cases} 8-x, & \text{kun } x \leq 8 \\ -(8-x), & \text{kun } x > 8 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 8-x, & \text{kun } x \leq 8 \\ x-8, & \text{kun } x > 8 \end{cases}
\end{aligned}
$$

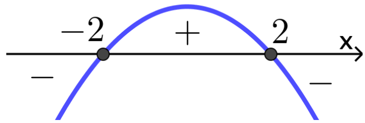
b) Ratkaistaan, milloin funktion $4-x^2$ arvot ovat epänegatiivisia.

$$4-x^2 \geq 0$$

Määritetään funktion $4-x^2$ nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
4-x^2 &= 0 && \mid -4 \\
-x^2 &= -4 && \mid \cdot(-1) \\
x^2 &= 4 \\
x &= \sqrt{4} = 2 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{4} = -2
\end{aligned}
$$

Funktion $4 - x^2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa x-akselin kohdissa $x = -2$ ja $x = 2$.



Funktion $4 - x^2$ arvot ovat epänegatiivisia, kun $-2 \leq x \leq 2$, ja negatiivisia, kun $x < -2$ tai $x > 2$.

Siis

$$\left|4 - x^2\right| = \begin{cases} -(4 - x^2), & \text{kun } x < -2 \\ 4 - x^2, & \text{kun } -2 \leq x \leq 2 \\ -(4 - x^2), & \text{kun } x \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 4, & \text{kun } x < -2 \\ 4 - x^2, & \text{kun } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

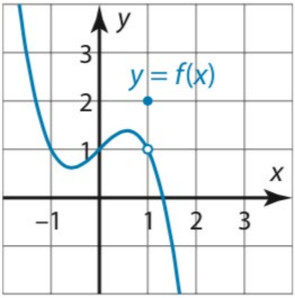
Vastaus

a) $\left|8 - x\right| = \begin{cases} 8 - x, & \text{kun } x \leq 8 \\ x - 8, & \text{kun } x > 8 \end{cases}$

b) $\left|4 - x^2\right| = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{kun } x < -2 \\ 4 - x^2, & \text{kun } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$

K3

a)



1) Funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on
$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 1$.

Funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on
$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 1$.

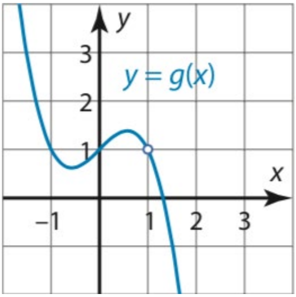
Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, funktiolla f on raja-arvo kohdassa 1: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

2) Funktio f ei ole vasemmalta jatkuva kohdassa 1, koska
$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 1$ ja $f(1) = 2$.

Funktio f ei ole vasemmalta jatkuva kohdassa 1, koska
$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 1$ ja $f(1) = 2$.

Funktio f ei ole jatkuva kohdassa 1, koska
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ ja $f(1) = 2$.

b)



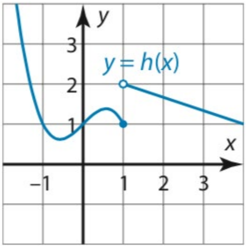
1) Funktion g vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on $\lim\limits_{x\to 1-} g(x) = 1$.

Funktion g oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on $\lim\limits_{x\to 1+} g(x) = 1$.

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, funktiolla g on raja-arvo kohdassa 1: $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$

2) Funktiota g ei ole määritelty kohdassa 1. Siten funktio g ei ole vasemmalta jatkuva, ei oikealta jatkuva eikä jatkuva kohdassa 1.

c)



1) Funktion h vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on
$\lim\limits_{x \to 1-} h(x) = 1$.

Funktion h oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on
$\lim\limits_{x \to 1+} h(x) = 2$.

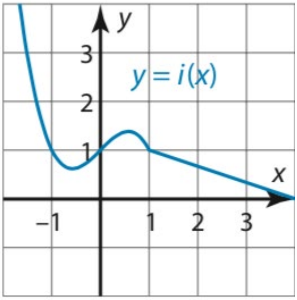
Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla h ei ole raja-arvoa kohdassa 1.

2) Funktio h on vasemmalta jatkuva kohdassa 1, koska
$\lim\limits_{x \to 1-} h(x) = 1$ ja $h(1) = 1$.

Funktio h ei ole oikealta jatkuva kohdassa 1, koska $\lim\limits_{x \to 1+} h(x) = 2$
ja $h(1) = 1$.

Funktio h ei ole jatkuva kohdassa 1, koska funktiolla h ei ole raja-arvoa kohdassa 1.

d)



1) Funktion i vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on $\lim\limits_{x \to 1-} i(x) = 1$.

Funktion i oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on $\lim\limits_{x \to 1+} i(x) = 1$.

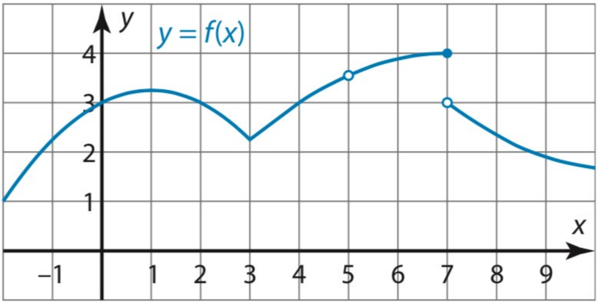
Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, funktiolla i on raja-arvo kohdassa 1: $\lim\limits_{x \to 1} i(x) = 1$

2) Funktio i on vasemmalta jatkuva kohdassa 1, koska $\lim\limits_{x \to 1-} i(x) = 1$ ja $i(1) = 1$.

Funktio i on oikealta jatkuva kohdassa 1, koska $\lim\limits_{x \to 1+} i(x) = 1$ ja $i(1) = 1$.

Funktio f on jatkuva kohdassa 1, koska $\lim\limits_{x \to 1} i(x) = 1$ ja $i(1) = 1$.

K4



a) Kohtaan $x = 1$ voidaan piirtää tangentti yksikäsitteisellä tavalla.

Funktio f on derivoituva kohdassa 2.

b) Kohdassa $x = 3$ kuvaajassa on terävä kärki, eikä siihen voida piirtää tangenttia yksikäsitteisellä tavalla.

Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 3.

c) Kohdassa $x = 5$ funktiota ei ole määritelty, joten kohtaan $x = 5$ ei voida piirtää tangenttia.

Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 5.

d) Kohdassa $x = 7$ funktio f on epäjatkuva, eikä sen kuvaajalle voida piirtää tangenttia yksikäsitteisellä tavalla.

Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 7.

K5

a) Funktio $f(x)=\dfrac{|x|-1}{|x^2-1|}$ on määritelty ja jatkuva kohdassa $x=0$.

Täten $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=\dfrac{|0|-1}{|0^2-1|}=\dfrac{-1}{1}=-1$

b) Funktio $f(x)=\dfrac{|x|-1}{|x^2-1|}$ ei ole määritelty kohdassa $x=1$. Lasketaan toispuoliset raja-arvot.

Kun $x\to 1-$, niin $x^2<1$ eli $x^2-1<0$. Tällöin $|x^2-1|=-(x^2-1)$.

Kun $x\to 1-$, niin $x>0$. Tällöin $|x|=x$.

Lasketaan funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-}\frac{|x|-1}{|x^2-1|} &= \lim_{x\to 1-}\frac{x-1}{-(x^2-1)} \\
&= \lim_{x\to 1-}\frac{\overset{1}{\cancel{x-1}}}{-(x+1)\cancel{(x-1)}} \\
&= \lim_{x\to 1-}\frac{1}{-x-1} \\
&= \frac{1}{-1-1}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Kun $x \to 1+$, niin $x^2 > 1$ eli $x^2 - 1 > 0$. Tällöin $\left|x^2 - 1\right| = x^2 - 1$.

Kun $x \to 1+$, niin $x > 0$. Tällöin $|x| = x$.

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1+} \frac{|x| - 1}{\left|x^2 - 1\right|} &= \lim_{x \to 1+} \frac{x - 1}{x^2 - 1} \\
&= \lim_{x \to 1+} \frac{\overset{1}{\cancel{x - 1}}}{(x + 1)\,\cancel{(x - 1)}} \\
&= \lim_{x \to 1+} \frac{1}{x + 1} \\
&= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 1.

Vastaus

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$

b) ei raja-arvoa

K6

a) Epätosi.

Lisäksi täytyy olla $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

b) Tosi.

Funktio f on jatkuva kohdassa 3, jos $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$. Tämä edellyttää, että funktiolla on raja-arvo kohdassa 3 ja funktion arvo $f(3)$ on määritelty.

c) Tosi.

Funktio f on jatkuva kohdassa 3, jos $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

d) Epätosi.

Lisäksi täytyy olla $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

e) Tosi.

Funktio f on jatkuva kohdassa 3, jos $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

K7

Tapa 1. Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \qquad f(x) = x^2 - 3$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 3 - (2^2 - 3)}{h} \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot (4+h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4+h)$$

$$= 4 + 0 = 4$$

Tapa 2. Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \qquad f(x) = x^2 - 3$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3 - (2^2 - 3)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2) \cdot \cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x+2)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

Vastaus $f'(2) = 4$

K8

a) $f(x)=\begin{cases}3x-5, \text{ kun } x<3\\ x^2-5, \text{ kun } x\geq 3\end{cases}$

Määritetään funktion arvo ja toispuoliset raja-arvot kohdassa 3.

1) Kohdassa $x = 3$ funktion lauseke on $f(x)=x^2-5$.

Siten $f(3)=3^2-5=4$

2) Kohdan $x = 3$ vasemmalla puolella on $f(x)=3x-5$.

Siten $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-}(3x-5)=3\cdot 3-5=4$.

3) Kohdan $x = 3$ oikealla puolella on $f(x)=x^2-5$.

Siten $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+}(x^2-5)=3^3-5=4$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo, funktio f on jatkuva kohdassa 3.

b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, \text{ kun } x<3\\ x-1, \quad \text{ kun } x>3\end{cases}$

Funktiota f ei ole määritelty kohdassa 3, joten se ei voi olla jatkuva kohdassa 3.

Vastaus
a) on jatkuva **b)** ei ole jatkuva

K9

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{ kun } x<1 \\ 2x, \quad\quad \text{kun } x\geq 1 \end{cases}$

1) Tutkitaan, onko funktio f jatkuva kohdassa 1. Määritetään funktion f arvo ja toispuoliset raja-arvot.

$f(1)=2\cdot 1=2$ $\quad\quad$ $f(x)=2x, \text{ kun } x=1$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x^2+1)=2$ $\quad\quad$ $f(x)=x^2+1, \text{ kun } x<1$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(2x)=2$ $\quad\quad$ $f(x)=2x, \text{ kun } x>1$

Koska $f(1)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$, niin funktio f on jatkuva kohdassa 1 ja siten se voi olla derivoituva kohdassa 1.

2) Tutkitaan, onko funktio f derivoituva kohdassa 1. Lasketaan funktion toispuoliset derivaatat kohdassa 1.

Lasketaan funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa 1.

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1-}\frac{x^2+1-2}{x-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$f(x)=x^2+1, \text{ kun } x<1$

$f(1)=2$

Lasketaan CAS-laskimella.

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa 1.

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$f(x) = 2x,$ kun $x > 1$

$f(1) = 2$

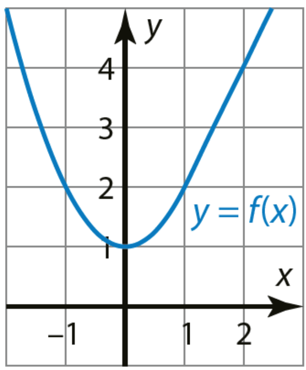
$$= \lim_{x \to 1+} \frac{2x - 2}{x - 1}$$

Lasketaan CAS-laskimella.

$$= 2$$

Koska toispuoliset derivaatat ovat yhtä suuret, niin $f'(1) = 2$.
Funktio f on siis derivoituva kohdassa 1.

Piirretään funktion f kuvaaja.



b) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{ kun } x\le 1 \\ x^2-1, \text{ kun } x>1 \end{cases}$

1) Tutkitaan, onko funktio f jatkuva kohdassa 1. Määritetään funktion f arvo ja toispuoliset raja-arvot.

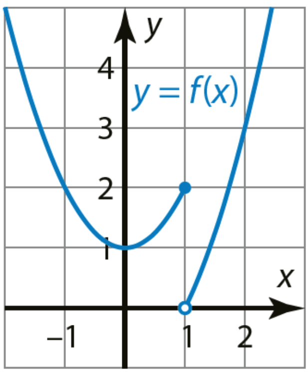
$f(1)=1^2+1=2$ $\quad\quad$ $f(x)=x^2+1, \text{ kun } x=1$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x^2+1)=2$ $\quad\quad$ $f(x)=x^2+1, \text{ kun } x<1$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x^2-1)=0$ $\quad\quad$ $f(x)=x^2-1, \text{ kun } x>1$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 1. Siten funktio f ei ole jatkuva kohdassa 1, joten funktio f ei voi olla myöskään derivoituva kohdassa 1.

Piirretään funktion f kuvaaja.



K10

Funktion f määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko **R**.

Väleillä $x < -2$, $-1 < x < 1$ ja $x > 1$ funktion f lauseke on polynomi, joten funktio f on jatkuva, kun $x \neq -2$ ja $x \neq 1$.

Kohdassa $x = -2$ funktion f lauseke vaihtuu. On määritettävä funktio f jatkuvaksi myös kohdassa -2. Määritetään funktion arvo ja toispuoliset raja-arvot kohdassa -2.

1) Kohdassa $x = -2$ funktion lauseke on $f(x) = ax^2 + b$.

Siten $f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b = 4a + b$

2) Kohdan $x = -2$ vasemmalla puolella on $f(x) = a$.

Siten $\lim\limits_{x \to -2-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2-} a = a$.

3) Kohdan $x = -2$ oikealla puolella on $f(x) = ax^2 + b$.

Siten $\lim\limits_{x \to -2+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2+} (ax^2 + b) = a \cdot (-2)^2 + b = 4a + b$

Funktio f on jatkuva kohdassa -2, jos $\boldsymbol{4a + b = a}$.

Kohdassa $x = 1$ funktion f lauseke vaihtuu. On määritettävä funktio f jatkuvaksi myös kohdassa 1. Määritetään funktion arvo ja toispuoliset raja-arvot kohdassa 1.

1) Kohdassa $x = 1$ funktion lauseke on $f(x) = ax^2 + b$.

Siten $f(1) = a \cdot 1^2 + b = a + b$

2) Kohdan $x = 1$ vasemmalla puolella on $f(x) = ax^2 + b$.

Siten $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (ax^2 + b) = a \cdot 1^2 + b = a + b$

3) Kohdan $x = 1$ oikealla puolella on $f(x) = bx - 1$.

Siten $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (bx - 1) = b \cdot 1 - 1 = b - 1$

Funktio f on jatkuva kohdassa 1, jos $\boldsymbol{a + b = b - 1}$.

Muodostetaan saaduista ehdoista yhtälöpari ja ratkaistaan vakioiden a ja b arvot.

$$\begin{cases} 4a + b = a \\ a + b = b - 1 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$a = -1$ ja $b = 3$

Funktio f on kaikkialla jatkuva, kun $a = -1$ ja $b = 3$.

Vastaus
$a = -1$ ja $b = 3$

K11

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{kun } x \leq 1 \\ bx - 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

Väleillä $x < 1$ ja $x > 1$ funktion f lauseke on polynomi, joten funktio f on derivoituva, kun $x \neq 1$.

Kohdassa $x = 1$ funktion f lauseke vaihtuu. Pitää määrittää vakiot a ja b niin, että funktio on derivoituva myös kohdassa $x = 1$.

1) Jotta funktio f voi olla derivoituva kohdassa 1, sen pitää olla jatkuva kohdassa 1. Määritetään funktion f arvo ja toispuoliset raja-arvot kohdassa 1.

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b = a + b \qquad f(x) = ax^2 + b, \text{ kun } x = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1-} f(x) &= \lim_{x \to 1-} (ax^2 + b) \qquad f(x) = ax^2 + b, \text{ kun } x < 1 \\ &= a \cdot 1^2 + b \\ &= a + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1+} f(x) &= \lim_{x \to 1+} (bx - 1) \qquad f(x) = bx - 1, \text{ kun } x > 1 \\ &= b \cdot 1 - 1 \\ &= b - 1 \end{aligned}$$

Funktio f on jatkuva kohdassa 2, kun toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo. Siten

$$\begin{aligned} a + b &= b - 1 \quad \Big| -b \\ a &= -1 \end{aligned}$$

2) Jatkuvuuden perusteella $a = -1$. Määritetään vakio b niin, että funktio f on derivoituva kohdassa 1. Koska funktion lauseke vaihtuu tässä kohdassa, on määritettävä toispuoliset derivaatat.

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$f(x) = -x^2 + b$, kun $x < 1$

$f(1) = a + b = -1 + b$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{-x^2 + b - (-1+b)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{-x^2 + 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{-(x^2 - 1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{-(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$= -(1+1) = -2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$f(x) = bx - 1$, kun $x > 1$

$f(1) = -1 + b$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{bx - 1 - (-1+b)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{bx - b}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{b\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$= b$$

Funktio f on derivoituva kohdassa 1, kun toispuoliset derivaatat ovat yhtä suuret. Siten $b = -2$.

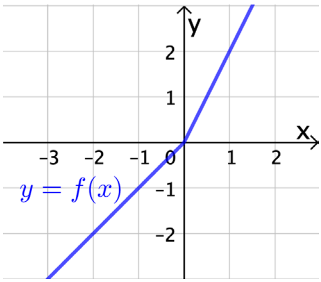
Funktio f on derivoituva kohdassa 1, kun $a = -1$ ja $b = -2$.

Vastaus

$a = -1$ ja $b = -2$

K12

a) Hahmotellaan ensin kuvaaja funktiosta, joka on kasvava ja origossa jatkuva mutta ei derivoituva.



Muodostetaan sitten funktion lauseke.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \le 0 \\ 2x, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

b) **1)** Perustellaan ehto $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Funktio f on määritelty kaikilla $x \le 0$ ja kaikilla $x > 0$.
Funktion f arvot ovat reaalilukuja.
Siten ehto toteutuu.

2) Perustellaan, että funktio on kasvava.

Olkoon $x_1 < x_2 \le 0$. Tällöin $f(x_1) = x_1 < x_2 = f(x_2)$.

Olkoon $0 < x_1 < x_2$. Tällöin $f(x_1) = 2x_1 < 2x_2 = f(x_2)$.

Olkoon $x_1 \le 0 < x_2$. Tällöin $f(x_1) = 2x_1 \le 0 < 2x_2 = f(x_2)$.

Koska $f(x_1) \le f(x_2)$ aina, kun $x_1 < x_2$, niin funktio f on kasvava.

3) Perustellaan, että funktio on jatkuva kohdassa 0.

Lasketaan funktion f arvo ja toispuoliset raja-arvot kohdassa 0.

$f(0) = 0$ $\quad$ $f(x) = x, \text{ kun } x = 0$

$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} x = 0$ $\quad$ $f(x) = x, \text{ kun } x < 0$

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} 2x = 0$ $\quad$ $f(x) = 2x, \text{ kun } x > 0$

Koska funktion toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo, niin funktio f on jatkuva kohdassa 0.

4) Perustellaan, että funktio ei ole derivoituva kohdassa 0.

Lasketaan funktion f toispuoliset derivaatat kohdassa 0.

$$
\begin{aligned}
f'_-(0) &= \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0-} \frac{x}{x} \\
&= \lim_{x \to 0-} 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$f(x) = x, \text{ kun } x < 0$
$f(0) = 0$

$$
\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{2x}{x} \\
&= \lim_{x \to 0+} 2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$f(x) = 2x, \text{ kun } x > 0$
$f(0) = 0$

Koska toispuoliset derivaatat ovat eri suuret, niin funktio f ei ole derivoituva kohdassa 0.

K13

Tehtävänä on osoittaa, että $\ln f(x) = x$ eli $\ln f(x) - x = 0$, jollakin välille $[1, 2]$ kuuluvalla x:n arvolla. Tutkitaan siis funktiota $g(x) = \ln f(x) - x$.

Koska funktio f on jatkuva välillä $[1, 2]$, myös funktio $h(x) = \ln f(x) - x$ on jatkuva välillä $[1, 2]$.

Olkoon x_1 kohta, jossa funktio f saa pienimmän arvonsa välillä $[1, 2]$. Siis $f(x_1) = 1$.

Olkoon x_2 kohta, jossa funktio f saa suurimman arvonsa välillä $[1, 2]$. Siis $f(x_2) = 8$.

Lasketaan funktion g arvot välin $[x_1, x_2]$ päätepisteissä.

$$g(x_1) = \ln f(x_1) - 1 = \ln 1 - 1 = -1$$

$$g(x_2) = \ln f(x_2) - 2 = 8 - 2 = 6$$

Koska funktio g on jatkuva ja sen arvot välin $[x_1, x_2]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $]x_1, x_2[$.

Koska sekä x_1 että x_2 kuuluvat välille $[1, 2]$, niin väli $[x_1, x_2]$ sisältyy väliin $[1, 2]$.

On osoitettu, että välillä $]1, 2[$ on ainakin yksi sellainen kohta x, jossa

$$\ln f(x) - x = 0$$

eli

$$\ln f(x) = x.$$

On siis osoitettu, että välillä $[1, 2]$ on ainakin yksi sellainen kohta a, että $\ln f(a) = a$. $\square$

K14

Funktiolla f on seuraavat ominaisuudet.

- $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y
- f on derivoituva kohdassa 0
- $f'(0)=1$.

a) Sijoitetaan $x=0$ ja $y=0$ ja ratkaistaan funktion arvo $f(0)$.

$$
\begin{aligned}
f(0+0) &= f(0)+f(0)+2\cdot 0\cdot 0 \\
f(0) &= 2\cdot f(0) \qquad \Big| -f(0) \\
0 &= f(0) \\
f(0) &= 0
\end{aligned}
$$

Siis $f(0)=0$.

b) Koska funktio f on derivoituva kohdassa 0, $f'(0)=1$ ja $f(0)=0$, niin

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1.$$

Määritetään funktion f derivaatta kohdassa x.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) + f(h) + 2xh - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) + 2xh}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} + \frac{2x\cancel{h}}{\cancel{h}} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h \to 0} 2x$$

$$= 1 + 2x$$

Koska erotusosamäärällä on raja-arvo kohdassa x, niin funktio f on derivoituva kaikkialla. $\square$

c) Koska $f'(x) = 1 + 2x$, niin

$$f(x) = \int (1 + 2x)\mathrm{d}x = x + x^2 + C.$$

Koska lisäksi $f(0) = 0$, niin

$$0 + 0^2 + C = 0$$
$$C = 0.$$

Siten $f(x) = x + x^2$.

Vastaus

a) $f(0) = 0$

c) $f(x) = x + x^2$

K15

a) Funktion kuperuus päätellään toisen kertaluvun derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x)=x^4+2x^3-12x^2+3$ toisen kertaluvun derivaattafunktio.

$$f'(x)=4x^3+6x^2-24x$$
$$f''(x)=12x^2+12x-24$$

Ratkaistaan toisen kertaluvun derivaattafunktion nollakohdat.

$$12x^2+12x-24=0 \quad |:12$$
$$x^2+x-2=0$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm3}{2}$$
$$x=\frac{-1+3}{2}=1 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-1-3}{2}=-2$$

Laaditaan funktion f kuperuuskaavio. Toisen kertaluvun derivaattafunktio f'' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -2 ja 1.

Päätellään toisen kertaluvun derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f''(x)=12x^2+12x-24$$
$$f''(-3)=48>0 \qquad +$$
$$f''(0)=-24<0 \qquad -$$
$$f''(2)=48>0 \qquad +$$

		-2		1	
$f''(x)$	$+$	|	$-$	|	$+$
$f(x)$	$\cup$	|	$\cap$	|	$\cup$

Funktio f on ylöspäin kupera välillä $-2 \le x \le 1$.

Funktio f on alaspäin kupera välillä $x \le -2$ ja välillä $x \ge 1$.

b) Toisen kertaluvun derivaattafunktion f'' merkki vaihtuu sen kummassakin nollakohdassa. Siten funktion f käännekohdat ovat $x = -2$ ja $x = 1$.

Vastaus
a) ylöspäin kupera välillä $-2 \le x \le 1$;
alaspäin kupera välillä $x \le -2$ ja välillä $x \ge 1$
b) $x = -2$ ja $x = 1$

K16.

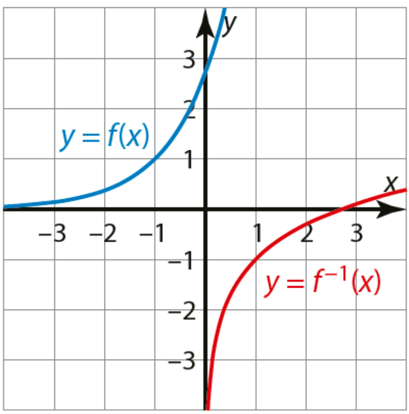
a) Käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke saadaan selville ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$
$$e^{x+1} = y \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = \ln y - 1$$

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \ln y - 1$.

Kun muuttujaksi vaihdetaan x, saadaan $f^{-1}(x) = \ln x - 1$.

b) Piirretään funktioiden $f(x) = e^{x+1}$ ja $f^{-1}(x) = \ln x - 1$ kuvaajat geometriaohjelmalla.



Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko $]0, \infty[$.

Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on $]0, \infty[$ ja arvojoukko $\mathbf{R}$.

Vastaus

a) $f^{-1}(x) = \ln x - 1$.

b) Funktion f määrittelyjoukko on **R** ja arvojoukko $]0, \infty[$.

Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on $]0, \infty[$ ja arvojoukko **R**.

K17.

a) Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko on $\mathbf{R}$.

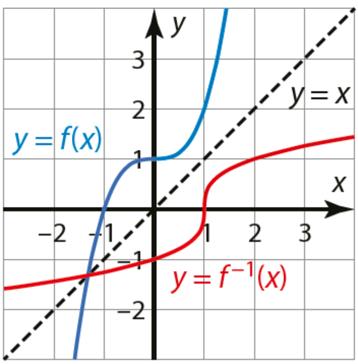
Käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke saadaan selville ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ x^3 + 1 &= y \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x &= \sqrt[3]{y-1} \end{aligned}$$

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$.

Kun muuttujaksi vaihdetaan x, saadaan
$f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

b) Piirretään funktioiden $f(x) = x^3 + 1$ ja $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ kuvaajat geometriaohjelmalla.



Havaitaan, että kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.

c) $f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x-1})$

$= (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1$

$= x - 1 + 1$

$= x$

Vastaus

a) $f:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

b) Kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.

c) $f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x-1})$

$= (\sqrt[3]{x-1})^3$

$= x - 1 + 1 = 1$

K18.

a) Päätellään funktion f monotonisuus derivaattafunktion merkeistä.
Määritetään funktion $f(x) = -\mathrm{e}^{-x} + x + 3$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1$$

Koska $\mathrm{e}^{-x} + 1 > 0$ kaikilla x, niin funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio. $\square$

b) Käänteisfunktion nollakohta on se muuttujan y arvo, jolla
$f^{-1}(y) = 0$ eli $f(0) = y$.

Koska
$f(0) = -\mathrm{e}^{0} + 0 + 3 = 2$,

niin

$$f^{-1}(2) = 0.$$

Käänteisfunktion nollakohta on 2.

c) Käänteisfunktion f^{-1} lauseke saataisiin ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $-\mathrm{e}^{-x}+x+3=y$. Yhtälöä ei ole kuitenkaan mahdollista ratkaista, joten käänteisfunktiolle ei saada lauseketta.

Tehtävänä on määrittää sellainen x, että

$f^{-1}(0)=x$ ja $f(x)=0$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x)=0$.

$$f(x)=0$$

Yhtälöllä $f(x)=0$ on vain yksi ratkaisu, koska f on aidosti monotoninen.

$$-\mathrm{e}^{-x}+x+3=0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\begin{aligned} x &= -0,7920... \\ &\approx -0,79 \end{aligned}$$

Koska $f(-0,79)\approx 0$, niin $f^{-1}(0)\approx -0,79$.

Vastaus

b) 2

c) $f^{-1}(0)\approx 0,79$

K19.

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$(f^{-1})'(-\frac{4}{3}) = \frac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = -\frac{4}{3}$.

Määritetään funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$ derivaattafunktio.

$f'(x) = x^2 + 1$

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3}x_0^3 + x_0 &= -\frac{4}{3} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x_0 &= -1 \end{aligned}$$

Siis

$f(-1) = -\frac{4}{3}$,

$f'(-1) = (-1)^2 + 1 = 2 \qquad f'(x) = x^2 + 1$

ja

$(f^{-1})'(-\frac{4}{3}) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{2}$.

Vastaus

$(f^{-1})'(-\frac{4}{3}) = \frac{1}{2}$

K20.

Logaritmin määritelmän mukaan

$10^x = y \Leftrightarrow x = \log_{10} y = \lg y.$

Siis funktion $f(x) = 2^x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(y) = \lg y,$
missä $y > 0.$

Funktion $f(x) = 2^x$ derivaattafunktio on $f'(x) = 10^x \cdot \ln 10.$

Sovelletaan käänteisfunktion derivointikaavaa funktioon $f^{-1}(y) = \lg y.$

$$\begin{aligned} f^{-1\prime}(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{f'(\lg y)} \\ &= \frac{1}{10^{\lg y} \ln 10} \\ &= \frac{1}{y \ln 10}, \quad \text{missä } y > 0. \end{aligned}$$

Siis $\mathrm{D}\lg y = \dfrac{1}{y \ln 10},$ kun $y > 0.$ Kun muuttujaksi vaihdetaan $x,$

saadaan $\mathrm{D}\lg x = \dfrac{1}{x \ln 10},$ missä $x > 0.$

Vastaus

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{10^{\lg y} \ln 10} = \dfrac{1}{y \ln 10},$ missä $y > 0,$ joten

$\mathrm{D}\lg x = \dfrac{1}{x \ln 10},$ missä $x > 0.$

K21.

a) Funktion ja sen käänteisfunktion kuvaajat leikkaavat toisensa suoralla $y = x$. Leikkauspisteiden x-koordinaatit (ja samalla myös y-koordinaatit) saadaan ratkaisemalla yhtälö $x = f(x)$.

$$-\mathrm{e}^{-x} + x + 3 = x \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = -\ln 3$$

Kuvaajat leikkaavat kohdassa –ln 3.

b) Määritetään funktion f derivaatta kohdassa –ln 3.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1$$
$$f'(-\ln 3) = \mathrm{e}^{-(-\ln 3)} + 1 = 4$$

Määritetään funktion $f^{-1}(x)$ derivaatta kohdassa –ln 3.

$$(f^{-1})'(-\ln 3) = \frac{1}{f'(-\ln 3)} = \frac{1}{4}$$

c) Kulma, jossa kuvaajat leikkaavat, on leikkauspisteeseen $(-\ln 3, -\ln 3)$ piirrettyjen tangenttien välinen kulma.

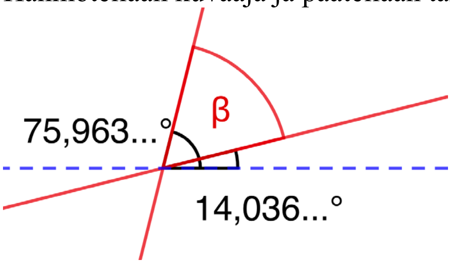
Tangenttien kulmakertoimet ovat 4 ja $\frac{1}{4}$

Lasketaan tangenttien suuntakulmat.

$$\tan\alpha_f = 4$$
$$\alpha_f = \tan^{-1}(4) = 75{,}963...^\circ$$

$$\tan\alpha_{f^{-1}} = \frac{1}{4}$$
$$\alpha_{f^{-1}} = \tan^{-1}(\tfrac{1}{4}) = 14{,}036...^\circ$$

Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään tangenttien välinen kulma.



Toinen suorista nousee $75{,}963...^\circ$:n kulmassa ja toinen nousee $14{,}036...^\circ$:n kulmassa. Lasketaan tangenttien väliin muodostuvan kulman suuruus.

$75{,}963...^\circ - 14{,}036...^\circ = 61{,}927...^\circ$

Suorien välisellä kulmalla tarkoitetaan niiden väliin muodostuvaa korkeintaan 90°:n suuruista kulmaa.

Tangenttien välisen kulman suuruus on 62°. Funktioiden f ja f^{-1} kuvaajat leikkaavat toisensa 62°:n kulmassa.

Vastaus

a) $x = -\ln 3$

b) $f'(-\ln 3) = 4$ ja $(f^{-1})'(-\ln 3) = \frac{1}{4}$

c) 62°

K22.

a)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x^2}{4x^3 + x}^{(x^3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{4 - \frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{2-0}{4-0} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x^2}{4x^2 + x}^{(x^2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{4 - \frac{1}{x}} \\
&= \frac{\infty - 1}{4-0} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) $\frac{1}{2}$

b) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo on ∞

K23.

a)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3^{2x}}{2^x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{9}{2}\right)^x$$

| Koska $\frac{9}{2} > 1$, lausekkeen $\left(\frac{9}{2}\right)^x$ arvo lähestyy lukua 0, kun x pienenee rajatta.

$$= 0$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x - 3^{2x}}{2^x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{3^{2x}}{2^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{9^x}{2^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \left(\frac{9}{2}\right)^x\right)$$

| Koska $\frac{9}{2} > 1$, lausekkeen $\left(\frac{9}{2}\right)^x$ arvo lähestyy lukua 0, kun x pienenee rajatta.

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

Vastaus
a) 0
b) 1

K24.

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}-5}{6\sqrt{x}+3}^{(\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{5}{\sqrt{x}}}{6+\frac{3}{\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{2-0}{6+0}$$

$$= \frac{1}{3}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6e^x-2}{4e^x-7}^{(e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6-\frac{2}{e^x}}{4-\frac{7}{e^x}}$$

$$= \frac{6-0}{4-0}$$

$$= \frac{3}{2}$$

Vastaus

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{2}$

K25.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-9} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{2x-9}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{9}{x}\right)} \qquad \Big|\,|x|=x,\ \text{kun}\ x>0\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{9}{x}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\left(2-\frac{9}{x}\right)}\\
&= \frac{\sqrt{1+0}}{2-0}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

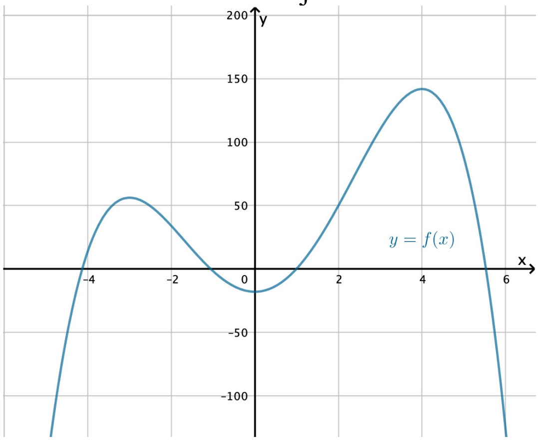
Vastaus

$\frac{1}{2}$

K26.

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + x^3 + 18x^2 - 18$$

Piirretään funktion kuvaaja.



Kuvaajan perusteella funktiolla on suurin arvo kohdassa 4, ja pienintä arvoa ei ole.

Perustellaan havainnot laskemalla.

Päätellään funktion kulku derivaattafunktion merkkien avulla.
Funktion f derivaattafunktio on $f'(x) = -3x^3 + 3x^2 + 36x$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$f'(x) = 0$

$-3x^3 + 3x^2 + 36x = 0$ Ratkaistaan CAS-laskimella

$x = -3$ tai $x = 0$ tai $x = 4$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -3, 0 tai 4. Määritetään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = -3x^3 + 3x^2 + 36x \\
&f'(-4) = 96 > 0 && + \\
&f'(-1) = -30 < 0 && - \\
&f'(1) = 36 > 0 && + \\
&f'(5) = -120 < 0 && -
\end{aligned}
$$

		-3		0		4	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Kulkukaavion perusteella funktion f suurin arvo saavutetaan kohdassa -3 tai kohdassa 4.

Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$
\begin{aligned}
&f(-3) = 56{,}25 \\
&f(4) = 142 \qquad \text{suurin}
\end{aligned}
$$

Funktion f suurin arvo on 142.

Määritetään laskimella funktion raja-arvo äärettömyydessä.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{3}{4}x^4 + x^3 + 18x^2 - 18\right) = -\infty$$

Koska $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, niin funktio saa mielivaltaisen pieniä arvoja, ja sillä ei ole pienintä arvoa.

Vastaus
suuri arvo 142, pienintä arvoa ei ole

K27.

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+3x+2}$$

määritetään nimittäjän nollakohdat.

$$x^2+3x+2=0$$
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-3\pm1}{2}$$
$$x=\frac{-3-1}{2}=-2 \text{ tai } x=\frac{-3+1}{2}=-1$$

Funktio f on määritelty, kun $x^2+3x+2\neq 0$ eli kun $x\neq -2$ ja $x\neq -1$
.

a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+3x+2}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{1}{x+2}\\ &= \frac{1}{-1+2}\\ &= 1\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} f(x) &= \lim_{x\to -2} \frac{x+1}{x^2+3x+2} \\ &= \frac{-2+1}{(-2)^2+3\cdot(-2)+2} \\ &= \frac{-1}{0}\end{aligned}$$

Koska osoittajan raja-arvo on $-1 \neq 0$ ja nimittäjän raja-arvo on 0, niin funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa -2.

Määritetään epäoleelliset toispuoleiset raja-arvot kohdassa –2. Nimittäjän kuvaaja $y = x^2 + 3x + 2$ on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = -1$. Kohdassa –2 nimittäjä siis vaihtaa merkkiä positiivisesta negatiiviseksi x:n kasvaessa.

$$\lim_{x\to -2-} f(x) = \lim_{x\to -2-} \frac{\overbrace{x+1}^{<0}}{\underbrace{x^2+3x+2}_{>0}} = -\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2+} \frac{\overbrace{x+1}^{<0}}{\underbrace{x^2+3x+2}_{<0}} = \infty$$

Koska toispuoliset epäoleelliset raja-arvot kohdassa -2 ovat erimerkkiset, niin funktiolla f ei ole kohdassa -2 myöskään epäoleellista raja-arvoa.

Vastaus

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$

b) ei raja-arvoa eikä epäoleellista raja-arvoa kohdassa –2

K28.

$$f(x)=\frac{4x^3}{1-x}$$

Funktio f on määritelty, kun $1-x\neq 0$ eli kun $x\neq 1$. On siis tutkittava funktion kulkua väleillä $0\leq x<1$ ja $1<x\leq 5$.
Funktion f derivaattafunktio on

$$f'(x)=\frac{-8x^3+12x^2}{(x-1)^2}.$$

Ratkaistaan derivaattafunktion väleille $0<x<1$ ja $1<x<5$ kuuluvat nollakohdat.

$$\frac{-8x^3+12x^2}{(x-1)^2}=0$$

$$x=0 \text{ tai } x=\frac{3}{2}$$

Derivaatan nollakohdista tarkasteluväleille kuuluu vain $x=\frac{3}{2}$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio, ja siksi jatkuva. Sen merkki voi muuttua vain nollakohdassa $x=\frac{3}{2}$ sekä kohdassa $x=1$, jossa funktio f ei ole määritelty. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x)=\frac{-8x^3+12x^2}{(x-1)^2}$$

$f'(0{,}5)=8>0$ $\quad +$

$f'(1{,}1)=387{,}2>0$ $\quad +$

$f'(2)=-16<0$ $\quad -$

	0		1		$\frac{3}{2}$		5
$f'(x)$		$+$		$+$		1	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	min		ei määr		max		min

Lasketaan funktion $f(x)=\dfrac{4x^3}{1-x}$ ääriarvot.

Minimiarvot:

$f(0)=0$

$f(5)=-125$

Maksimiarvo:

$f(\frac{3}{2})=-27$

Tutkitaan funktion $f(x)=\dfrac{4x^3}{1-x}$ käyttäytymistä kohdan 1 lähellä.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3}{1-x}=\frac{4}{0}\ \text{(ei määritelty)}$$

Koska osoittajan raja-arvo on $1\neq 0$ ja nimittäjän raja-arvo on 0, niin funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 1.
Lasketaan toispuoliset raja-arvot kohdassa 1..

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{\overbrace{4x^3}^{>0}}{\underbrace{1-x}_{>0}}=\infty$$

$$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{\overbrace{4x^3}^{>0}}{\underbrace{1-x}_{<0}}=-\infty.$$

Funktio $f(x) = \dfrac{4x^3}{1-x}$ on rationaalifunktio, ja siksi jatkuva. Kulkukaavion perusteella funktio f saa

välillä $[0, 1[$ kaikki arvot väliltä $[0, \infty[$,

välillä $]1, \dfrac{3}{2}]$ kaikki arvot väliltä $]-\infty, -27]$ ja

välillä $[\dfrac{3}{2}, 5]$ kaikki arvot väliltä $[-125, -27]$.

Funktio f saa siis välillä $0 \le x \le 5$ kaikki arvot väleiltä $]-\infty, -27]$ ja $[0, \infty[$.

Vastaus
kaikki arvot väleiltä $]-\infty, -27]$ ja $[0, \infty[$

K29.

a)

$$
\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{6}{x^7}\ \mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{6}{x^7}\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} 6x^{-7}\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_{2}^{t} \frac{6}{-6} x^{-6} \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_{2}^{t} -\frac{1}{x^6} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t^6} + \frac{1}{2^6}\right) \\
&= 0 + \frac{1}{64} \\
&= \frac{1}{64}
\end{aligned}
$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_4^{\infty} x^3 \ \mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty} \int_4^{t} x^3 \ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_{4}^{t} \frac{x^4}{4} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^4}{4} - \frac{4^4}{4} \right) \\
&= \infty - 4^3 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Integraali hajaantuu.

Vastaus

a) $\frac{1}{16}$

b) integraali hajaantuu

K30.

Funktio $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x+1}}$ on määritelty, kun $x>-1$.

Funktion kuvaaja ja x-akseli rajaavat kysytyn pinta-alan välillä $[-1,0]$.

Funktio f saa vain positiivisia arvoja, joten kysytty pinta-ala

$$A=\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Koska f ei ole määritelty integroimisvälin kohdassa -1, kyseessä on epäoleellinen integraali.

$$A=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt[4]{x+1}}\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to-1+}\int_{t}^{0}\frac{1}{\sqrt[4]{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{t\to-1+}\int_{t}^{0}(x+1)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to-1+}\ \overset{0}{\underset{t}{/}}\frac{(x+1)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}$$

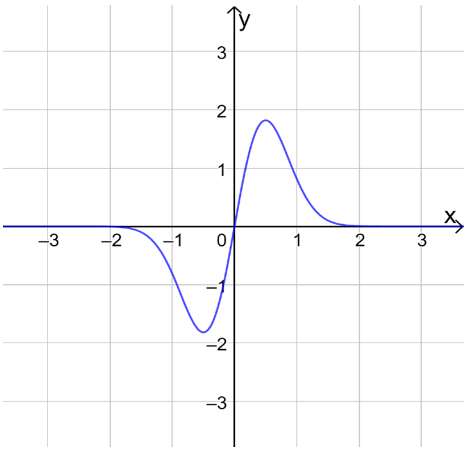
$$=\frac{4}{3}\cdot\lim_{t\to-1+}\ \overset{0}{\underset{t}{/}}(x+1)^{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\cdot\lim_{t\to-1+}\left((0+1)^{\frac{3}{4}}-(t+1)^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\cdot(1-0)=\frac{4}{3}$$

Vastaus

$\dfrac{4}{3}$

K31.



Funktio $f(x)=\dfrac{6x}{e^{2x^2}}$ on määritelty kaikilla x:n arvoilla.

Käyrä ja x-akseli rajaavat kysytyn pinta-alan välillä $]-\infty,\infty[$.

Funktio f saa negatiivisia arvoja kun $x<0$ ja
positiivisia arvoja kun $x>0$, joten kysytty pinta-ala

$$A=A_1+A_2=-\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\int_{-\infty}^{0} \frac{6x}{\mathrm{e}^{2x^2}}\ \mathrm{d}x \\
&= -\lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} \frac{6x}{\mathrm{e}^{2x^2}}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\cdot \lim_{r\to-\infty} \Big/_{r}^{0} \frac{1}{\mathrm{e}^{2x^2}} \\
&= \frac{3}{2}\cdot \lim_{r\to-\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{0}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{r}} \right) \\
&= \frac{3}{2}\cdot (1-0) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_{0}^{\infty} \frac{6x}{\mathrm{e}^{2x^2}}\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{6x}{\mathrm{e}^{2x^2}}\ \mathrm{d}x \\
&= -\frac{3}{2}\cdot \lim_{t\to\infty} \Big/_{0}^{t} \frac{1}{\mathrm{e}^{2x^2}} \\
&= -\frac{3}{2}\cdot \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2t^2}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{0}} \right) \\
&= -\frac{3}{2}(0-1) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Koska molemmat epäoleelliset integraalit suppenevat, niin

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
&= -\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\
&= \frac{6}{2} = 3
\end{aligned}
$$

Vastaus
3

K32.

Tarkastellaan integraalia $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ eri p:n arvoilla ($p > 0$).

Olkoon ensin $p \neq 1$. Tällöin

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0+} \int_t^1 x^{-p}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to 0+} \Big/_t^1 \frac{1}{-p+1} x^{-p+1}$$

$$= \lim_{t\to 0+} \Big/_t^1 \frac{1}{1-p} x^{1-p}$$

$$= \lim_{t\to 0+} \left(\frac{1^{1-p}}{1-p} - \frac{t^{1-p}}{1-p} \right)$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{1-t^{1-p}}{1-p}.$$

1) Jos $0 < p < 1$, niin $1-p > 0$ ja $\lim_{t\to 0+} t^{1-p} = 0$ joten

$$\int_t^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1-0}{1-p} = \frac{1}{1-p}\,.$$

Siis integraali $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ suppenee.

2) Jos $p > 1$, niin $1 - p < 0$ ja $\lim_{t \to 0+} t^{1-p} = \infty$, joten

$$\int_t^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\infty}{\underbrace{1-p}_{<0}} = \infty\,.$$

Siis integraali $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

3) Olkoon seuraavaksi $p = 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t \to 0+} \int_t^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t \to 0+} \Big/_{t}^{1} \ln|x| \\
&= \lim_{t \to 0+} (\ln 1 - \ln t) \\
&= 0 - (-\infty) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Siis kun $p = 1$, niin integraali $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Vastaus
$0 < p < 1$

K33.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Integroitava funktio on määritelty kaikilla x.

Jaetaan integraali osiin kohdassa $x = 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Lasketaan integraalit erikseen.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} x(x^2+1)^{-2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\cdot \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} \underbrace{2x}_{s'(x)} \cdot \underbrace{(x^2+1)^{-2}}_{u(s(x))}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\cdot \lim_{r\to-\infty} \Big/_{r}^{0} \underbrace{-(x^2+1)^{-1}}_{U(s(x))}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{r \to -\infty} \Big/_{r}^{0} \frac{-1}{x^2+1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{r \to -\infty} \left(\frac{-1}{0^2+1} - \frac{-1}{r^2+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{r \to -\infty} \left(-1 - \frac{-1}{r^2+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(-1 - \frac{-1}{\infty+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (-1-0) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t \to \infty} \int_0^t \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{t \to \infty} \Big/_{0}^{t} \frac{-1}{x^2+1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{r \to -\infty} \left(\frac{-1}{t^2+1} - \frac{-1}{0^2+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{r \to -\infty} \left(\frac{-1}{r^2+1} - (-1 =) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{\infty+1} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (0+1) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Koska molemmat integraalit suppenevat, niin

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Vastaus
0

K34.

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Integroitava funktio on määritelty, kun $1-x^2>0$ eli kun $-1<x<1$.

Koska integroitava funktio ei ole määritelty integroimisvälin päätepisteissä, kyseessä on epäoleellinen integraali.

Jaetaan integraali osiin kohdassa $x=0$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Lasketaan molemmat itegraalit erikseen.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to-1} \int_{r}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to-1} \int_{r}^{0} x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\cdot \lim_{r\to-1} \int_{r}^{0} \underbrace{-2x}_{s'(x)} \cdot \underbrace{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{u(s(x))}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\cdot \lim_{r\to-1} \Big/_{r}^{0} \underbrace{2\cdot(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}_{U(s(x))}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{r \to -1} \Big/_{r}^{0} 2\sqrt{1-x^2} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{r \to -1} (2\sqrt{1-0^2} - 2\sqrt{1-r^2}) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (2 - 2\sqrt{1-(-1)^2}) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (2-0) \\
&= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t \to 1} \int_0^t \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{t \to 1} \Big/_{0}^{t} 2\sqrt{1-x^2} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{t \to 1} (2\sqrt{1-t^2} - 2\sqrt{1-0^2}) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{1-1^2} - 2) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (0-2) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Koska molemmat integraalit suppenevat, niin

$$
\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -1 + 1 = 0\,.
$$

Vastaus
0

K35.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Integroitava funktio on määritelty kaikilla x.

Jaetaan integraali osiin kohdassa $x = 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} |x|\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} |x|\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Lasketaan molemmat integraalit erikseen.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} |x|\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to-\infty}\int_{r}^{0} |x|\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \big|\ |x| = -x,\ \text{kun } x < 0\\
&= \lim_{r\to-\infty}\int_{r}^{0} -x\cdot\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{r\to-\infty}\int_{r}^{0} \underbrace{-2x}_{s'(x)}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{-x^2}}_{u(s(x))}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{r\to-\infty}\Big/_{r}^{0}\ \underbrace{\mathrm{e}^{-x^2}}_{U(s(x))}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{r\to-\infty}(\mathrm{e}^{-0^2}-\mathrm{e}^{-r^2})\\
&= \frac{1}{2}\cdot(1-\mathrm{e}^{-(-\infty)^2})\\
&= \frac{1}{2}\cdot(1-\mathrm{e}^{-\infty})\\
&= \frac{1}{2}\cdot(1-0) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t |x| e^{-x^2}\,dx \qquad\qquad || \, x \,|= x, \text{ kun } x>0 \\
&= \lim_{t\to\infty}\int_0^t x\cdot e^{-x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\cdot \lim_{t\to\infty}\int_0^t \underbrace{-2x}_{s'(x)} \cdot \underbrace{e^{-x^2}}_{u(s(x))}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\cdot \lim_{t\to\infty} \mathop{/}_0^t \underbrace{e^{-x^2}}_{U(s(x))} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot \lim_{t\to\infty} (e^{-t^2} - e^{-0^2}) \\
&= -\frac{1}{2}\cdot (e^{-\infty^2} - 1) \\
&= -\frac{1}{2}\cdot (e^{-\infty} - 1) \\
&= -\frac{1}{2}\cdot (0-1) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Molemmat integraalit suppenevat, joten

$$
\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} |x| e^{-x^2}\,dx + \int_0^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1
$$

Vastaus

1

K36.

a) Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$.

Ehdon 1 mukaan tulee olla $\frac{a}{(x-4)^2} \geq 0$ kaikilla $x \leq 1$.

Siten $a \geq 0$.

Määritetään vakio a ehdon 2 avulla.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathbf{d}x + \int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{a}{(x-4)^2}\,\mathbf{d}x + \int_{1}^{\infty} 0\,\mathbf{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{a}{(x-4)^2}\,\mathbf{d}x = 1$$

Lasketaan epäoleellinen integraali CAS-laskimella.

$$\frac{a}{3} = 1$$

$$a = 3$$

Saatu ratkaisu toteuttaa ehdon $a \geq 0$, joten $a = 3$.

b) Lasketaan tapahtuman "$0 < X \leq 6$" todennäköisyys.

$$
\begin{aligned}
P(0 < X \leq 6) &= P(0 \leq X \leq 6) \\
&= \int_0^6 f(x)\,\mathbf{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{3}{(x-4)^2}\,\mathbf{d}x + \underbrace{\int_1^\infty 0\,\mathbf{d}x}_{=0} \\
&= \int_0^1 \frac{3}{(x-4)^2}\,\mathbf{d}x \\
&= \frac{1}{4} = 0,25
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) $a = 3$

b) $\frac{1}{4} = 0,25$

K37.

a) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathbf{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,\mathbf{d}x+\int_{0}^{32} x\cdot\frac{3}{40}x^{-\frac{2}{5}}\,\mathbf{d}x+\int_{32}^{\infty} x\cdot 0\,\mathbf{d}x$$

$$=\int_{0}^{32} x\cdot\frac{3}{40}x^{-\frac{2}{5}}\,\mathbf{d}x$$

Laskataan määrätty integraali CAS-laskimella.

$$=12$$

b)

$$D(X)=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathbf{d}x}$$

Sijoitetaan $\mu=12$.

$$=\sqrt{\int_{-\infty}^{0}(x-12)^2\cdot 0\,\mathbf{d}x+\int_{0}^{32}(x-12)^2\cdot\frac{3}{40}x^{-\frac{2}{5}}\,\mathbf{d}x+\int_{32}^{\infty}(x-12)^2\cdot 0\,\mathbf{d}x}$$

$$=\sqrt{\int_{0}^{32}(x-12)^2\cdot\frac{3}{40}x^{-\frac{2}{5}}\,\mathbf{d}x}$$

$$=\sqrt{\frac{1200}{13}}=\frac{20\sqrt{39}}{13}\approx 9{,}61$$

Vastaus

a) 12

b) $\frac{20\sqrt{39}}{13}$ $(\approx 9{,}61)$

K38.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x\le 0\\ \frac{3}{40}x^{-\frac{2}{5}}, & \text{kun } 0<x\le 32\\ 0, & \text{kun } x>32\end{cases}$$

a) Kertymäfunktion arvo kohdassa t on $F(t)=P(X\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x.$

1) Kun $t\le 0$, niin

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x\\ &=\int_{-\infty}^{t} 0\mathbf{d}x=0.\end{aligned}$$

2) Kun $0<x\le 32$, niin

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x\\ &=\int_{-\infty}^{0} 0\mathbf{d}x+\int_{0}^{t}\frac{3}{40}x^{-\frac{2}{5}}\mathbf{d}x\\ &=0+\frac{t^{\frac{3}{5}}}{8}\\ &=\frac{t^{\frac{3}{5}}}{8}.\end{aligned}$$

Lasketaan CAS-laskimella.

3) Kun $x > 32$, niin

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathbf{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\mathbf{d}x + \int_{0}^{32} \frac{3}{40}x^{-\frac{2}{5}}\mathbf{d}x + \int_{32}^{t} 0\mathbf{d}x$$
$$= \int_{0}^{32} \frac{3}{40}x^{-\frac{2}{5}}\mathbf{d}x$$ Lasketaan CAS-laskimella.
$$= 1.$$

Kertymäfunktio on

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t \le 0 \\ \frac{t^{\frac{3}{5}}}{8}, & \text{kun } 0 < t \le 32 \\ 1, & \text{kun } t > 32 \end{cases}$$

eli

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 0 \\ \frac{x^{\frac{3}{5}}}{8}, & \text{kun } 0 < x \le 32 \\ 1, & \text{kun } x > 32. \end{cases}$$

b) $P(0 \le X < 16) = F(16) - F(0)$
$$= \frac{16^{\frac{3}{5}}}{8} - 0$$
$$= \frac{4^{\frac{1}{5}}}{2} \approx 0{,}660$$

Vastaus

a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ \dfrac{x^{\frac{3}{5}}}{8}, & \text{kun } 0 < x \leq 32 \\ 1, & \text{kun } x > 32 \end{cases}$

b) $\dfrac{4^{\frac{1}{5}}}{2} \approx 0{,}660$

K39.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^4}, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Tiheysfunktio $f(x) = F'(x)$ kaikissa niissä kohdissa, joissa F on derivoituva.

Derivoidaan kertymäfunktio.

Kun $x < 1$, niin $f(x) = \mathrm{D}\,0 = 0.$

Kun $x > 1$, niin $f(x) = \mathrm{D}(1 - \dfrac{1}{x^4}) = \dfrac{4}{x^5}.$

Arvolla rajakohdassa $x = 1$ ei ole merkitystä. Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ \dfrac{4}{x^5}, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

b) Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, \mathbf{d}x$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\, \mathbf{d}x}_{=0} + \int_{1}^{\infty} x \cdot \frac{4}{x^5}\, \mathbf{d}x$$

$$= \frac{4}{3}$$

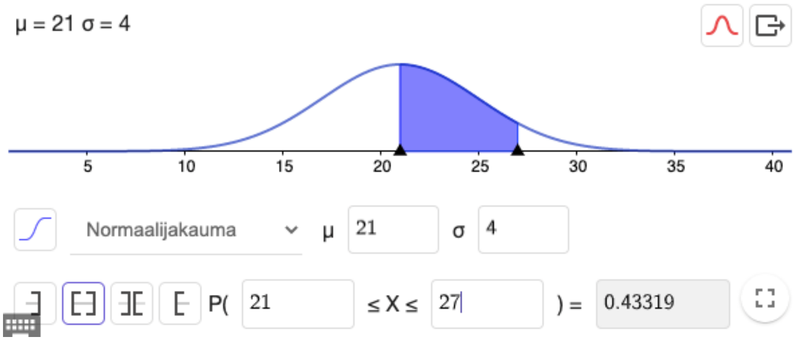
Vastaus

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ \dfrac{4}{x^5}, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$

b) $E(x) = \dfrac{4}{3}$

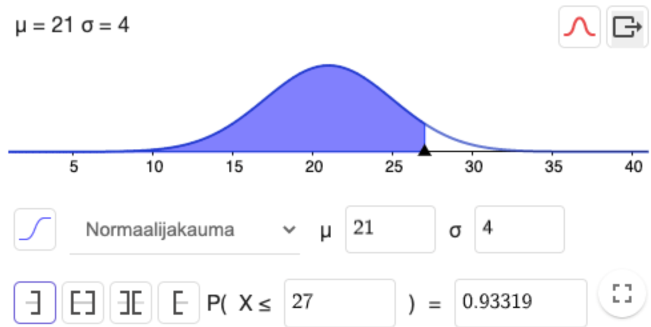
K40.

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



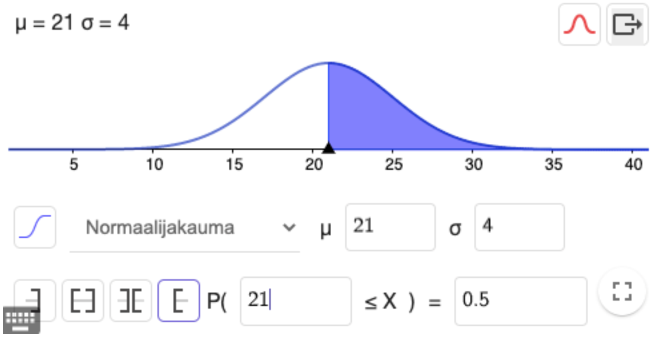
$P(21 \leq X \leq 27) \approx 0,43$

b)



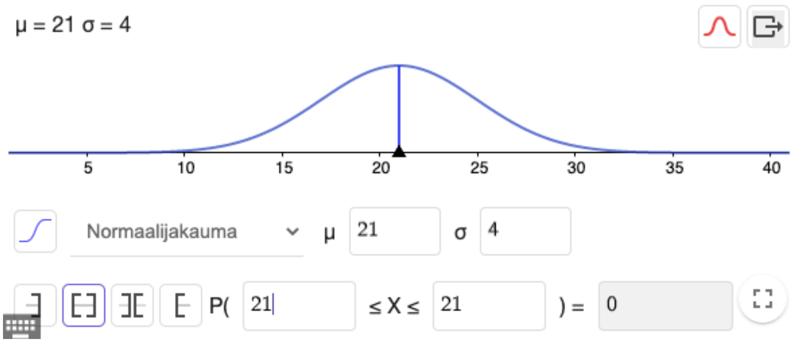
$P(X \leq 27) \approx 0,93$

c)



$P(X \geq 21) \approx 0{,}50$

d)



$P(X = 21) = 0$

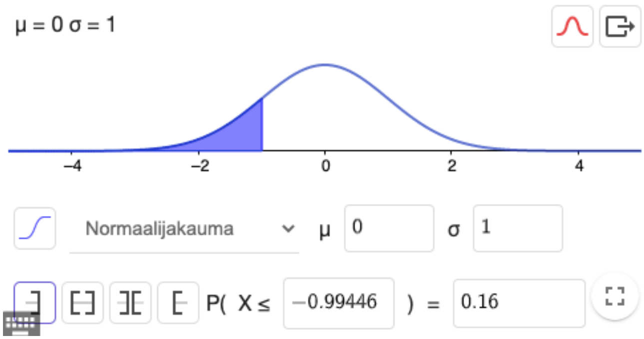
Vastaus

a) 0,43
b) 0,93
c) 0,50
d) 0,00

K41.

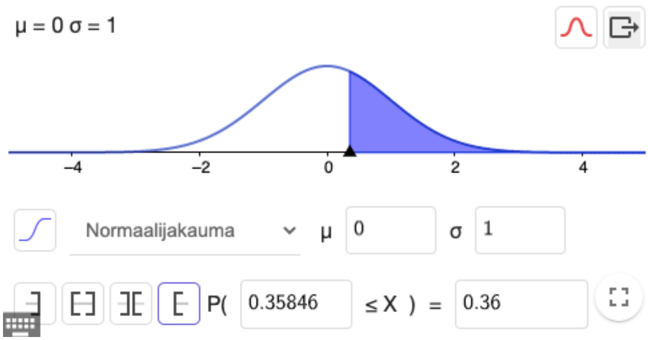
a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

Satunnaismuuttuja Z noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.



$P(X \le a) = 0{,}16$, kun $a \approx -0{,}99$

b)

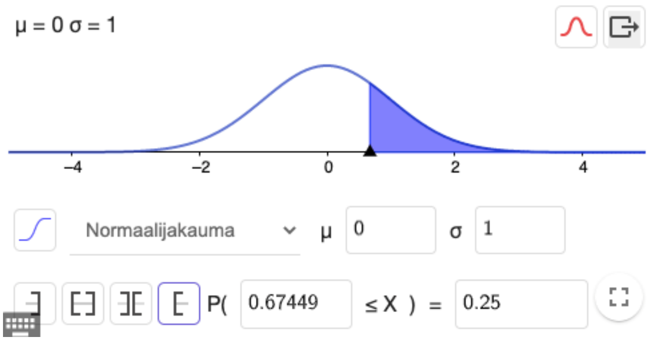


$P(X \ge a) = 0{,}36$, kun $a \approx 0{,}36$

c) Määritettävän välin ala- ja ylärajan tulee sijaita symmetrisesti keskiarvon molemmin puolin.

Välillä tulee olla 50 % jakaumasta, joten sekä välin alapuolella että yläpuolella on 25 % jakaumasta.

Määritetään välin yläraja a.



$P(X > a) = 0,25$, kun $a \approx 0,67$

Vastaus
a) –0,99
b) 0,36
c) 0,67

K42.

a) Satunnaismuuttujan X odotusarvo on 12 ja keskihajonta 3.
Siis $\mu = 12$ ja $\sigma = 3$.

Lasketaan arvoa $x = 9$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{9-12}{3} = -1$$

Oikea vaihtoehto on 2.

b) Lasketaan arvoa $x = 12$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{12-12}{3} = 0$$

Oikea vaihtoehto on 3.

c) Lasketaan arvoa $x = 18$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{18-12}{3} = 2$$

Oikea vaihtoehto on 5.

Vastaus
a) 2
b) 3
c) 5

K43.

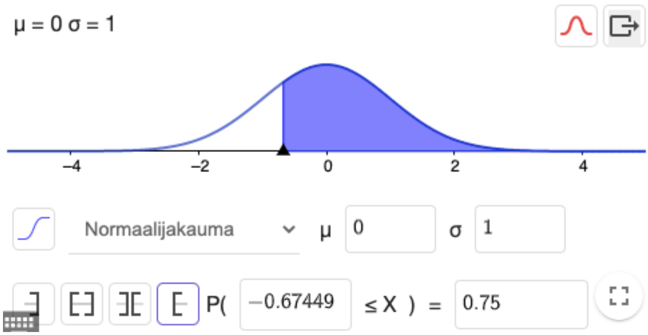
Tehtävänä on määrittää satunnaismuuttujan X keskihajonta σ, kun odotusarvo $\mu = 30$.

Olkoon arvoa $x = 35$ vastaava normitettu arvo z.

Tulee olla $P(X \geq 35) = P(Z \geq z) = 0,75$.

Satunnaismuuttuja $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että $P(Z \geq z) = 0,75,$ kun $z \approx -0,67449.$



Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan σ.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad z \approx -0,67449,\ x = 35,\ \mu = 30$$

$$-0,67449 = \frac{30-35}{\sigma} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

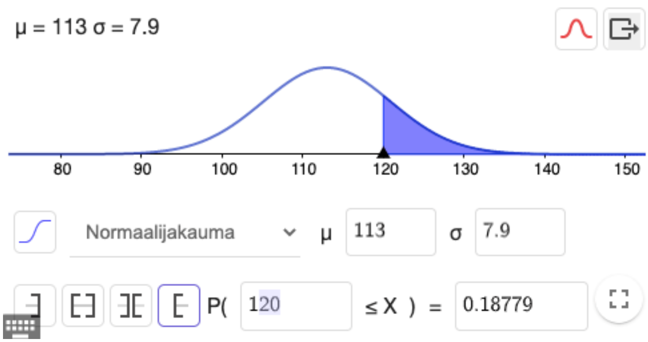
$$\sigma \approx 7,4$$

Vastaus
7,4

K44.

a) Merkitään satunnaisesti valitun auton nopeutta kirjaimella X.
Nopeuksien keskiarvo on 113,0 km/h ja keskihajonta 7,9 km/h.
Siis $\mu = 113{,}0$ ja $\sigma = 7{,}9$.

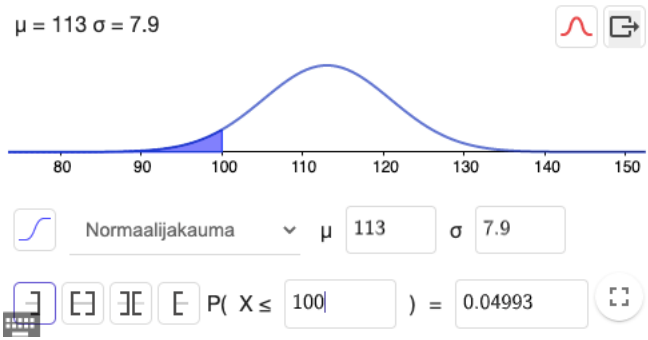
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun auton nopeus on yli 120 km/h.



Saadaan $P(X > 120) \approx 0{,}19$.

19 % autoilijoista ajoi yli 120 km/h.

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun auton nopeus on alle 100 km/h.



Saadaan $P(X < 100) \approx 0{,}05$.

5 % autoilijoista ajoi alle 100 km/h.

Vastaus

a) 19 %

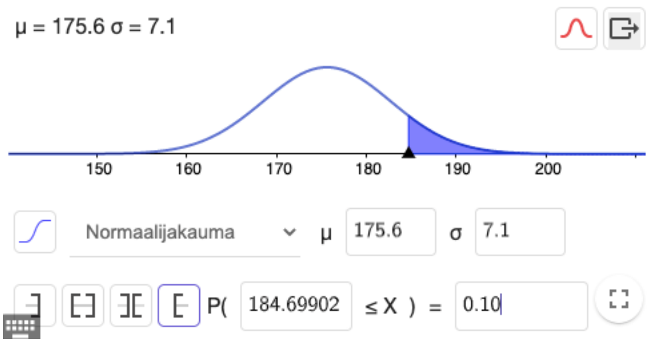
b) 5 %

K45.

a) Merkitään satunnaisesti valitun 16-vuotiaan pojan pituutta senttimetreinä kirjaimella X.

Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 175{,}6$ ja keskihajonta $\sigma = 7{,}1$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen pituus a, että $P(X > a) = 0{,}10$.

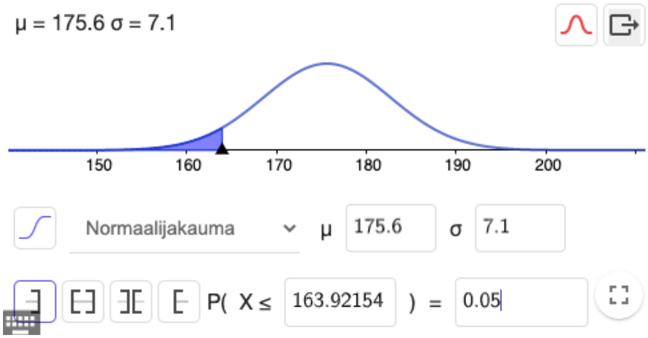


$P(X > a) = 0{,}10$, kun $a \approx 184{,}7$.

Pisimmät 10 % pojista ovat yli 184,7 cm pitkiä.

b) Jos odotusarvon suhteen symmetrisellä välillä on $90\ \%$ pojista, niin sekä välin alapuolella että yläpuolella on $5\ \%$ pojista.

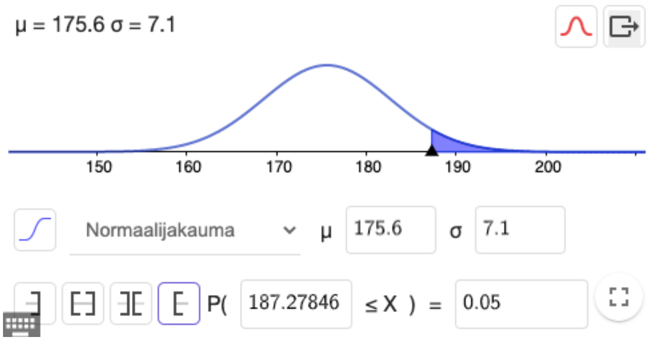
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla pituusvälin alaraja a.



$P(X < a) = 0{,}05,$ kun $a \approx 163{,}9.$

Välin alaraja on 163,9 cm.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla pituusvälin yläraja b.



$P(X > b) = 0{,}05,$ kun $b \approx 187{,}3.$

Välin alaraja on 187,3 cm. Pituusväli on siis 163,9–187,3 cm.

Vastaus

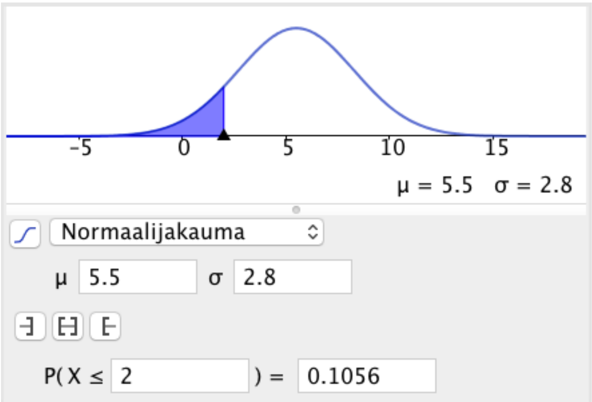
a) yli 184,7 cm

b) 163,9–187,3 cm.

K46.

a) Olkoon satunnaismuuttuja X television kestoikä. Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 5{,}5$ vuotta ja keskihajonta $\sigma = 2{,}8$ vuotta.

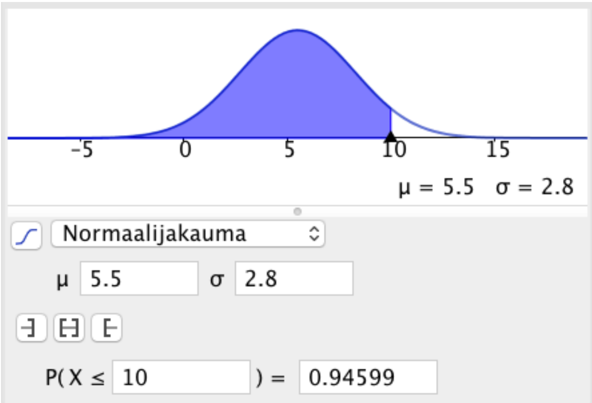
Määritetään, millä todennäköisyydellä televisio hajoaa alle kahdessa vuodessa.



$P(X \leq 2) \approx 0{,}11$

b) Tapahtuman ”ainakin yksi toimii kymmenen vuoden kuluttua” vastatapahtuma on ”yksikään ei toimi kymmenen vuoden kuluttua”.

Lasketaan todennäköisyys, että televisio toimii korkeintaan kymmenen vuotta.



$P(X \leq 10) \approx 0{,}94599$

Lasketaan todennäköisyys, että ainakin yksi televisio toimii kymmnen vuoden kuluttua.

$P(12 \text{ televisiosta ainakin yksi toimii } 10 \text{ vuoden kuluttua})$

$= 1 - P(12 \text{ televisiosta yksikään ei toimi } 10 \text{ vuoden kuluttua})$

$= 1 - 0{,}94599^{12}$

$\approx 0{,}49$

Vastaus
a) 0,11
b) 0,49

K47.

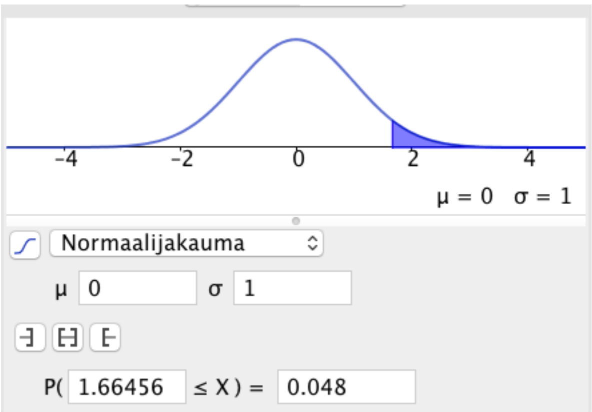
Tehtävänä on määrittää pelaajan pituuden X odotusarvo μ, kun keskihajonta $\sigma = 4{,}8$ (cm).

Verrataan satunnaismuuttujan X jakaumaa normitettuun normaalijakaumaan.

Olkoon arvoa $x = 200$ (cm) vastaava normitettu arvo z.

Tulee olla $P(X > 200) = P(Z > z) = 0{,}0480$.
Satunnaismuuttuja $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että



Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan μ.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$1{,}66456 = \frac{200 - \mu}{4{,}8}$$

$$\mu \approx 192 \quad \text{(cm)}$$

Pituuksien keskiarvo on 192 cm.

Vastaus
192 cm

K48.

Olkoon satunnaismuuttuja Y oikeiden veikkausten lukumäärä 500:ssa veikkauksessa.

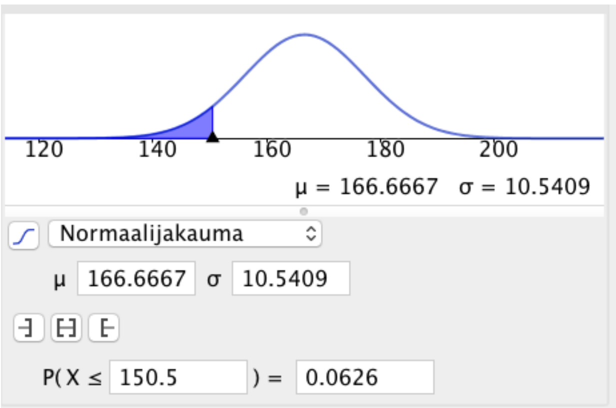
Kyseessä on toistokoe ja satunnaismuuttuja noudattaa binomijakaumaa. Toistojen lukumäärä $n = 500$ ja todennäköisyys veikata oikein $p = \frac{1}{3}$.

Odotusarvo $\mu = 500 \cdot \frac{1}{3} = \frac{500}{3} \approx 166{,}6667$.

Keskihajonta $\sigma = \sqrt{500 \cdot \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3})} = \frac{10 \cdot \sqrt{10}}{3} \approx 10{,}5409$.

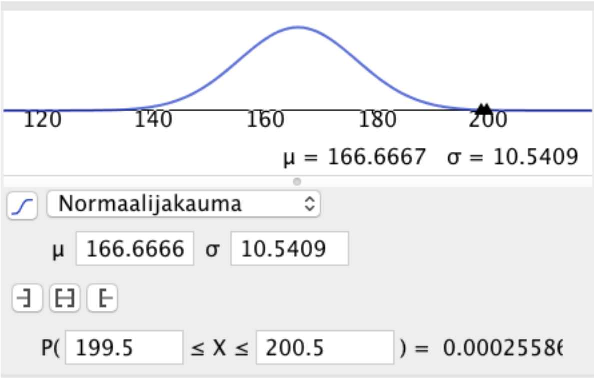
Koska $Y \sim \mathrm{Bin}(500, \frac{1}{3})$, niin satunnaismuuttujan Y todennäköisyyksiä voidaan arvioida satunnaismuuttujan $X \sim \mathrm{N}(166{,}6667,\ 10{,}5409)$ avulla.

a) Määritetään todennäköisyys, että veikkaamalla saadaan korkeintaan 150 ottelun tulos oikein.



$P(Y \leq 150) = P(X \leq 150{,}5) \approx 0{,}063$

b) Määritetään todennäköisyys, että veikkaamalla saadaan tasan 200 ottelun tulos oikein.



$$P(Y = 200) = P(199{,}5 \leq X \leq 200{,}5) \approx 0{,}00026$$

Vastaus

a) 0,063

b) 0,00026

K49.

a) Käytetään hyväksi jakauman symmetriaa odotusarvon 0 suhteen.

$$\begin{aligned} P(Z \leq -1{,}19) &= P(Z \geq 1{,}19) \\ &= 1 - P(Z < 1{,}19) \\ &= 1 - \Phi(1{,}19) \\ &= 1 - 0{,}8830 \\ &\approx 0{,}1170 \end{aligned}$$

d) Ratkaistaan tehtävä vastatapahtuman avulla.

Tehtävänä on määrittää sellainen normitettu arvo a, että
$P(Z < a) = 1 - 0{,}27 = 0{,}73.$

Taulukon perusteella $a \approx 0{,}61.$

Vastaus
a) 0,1170
b) $a \approx 0{,}61$