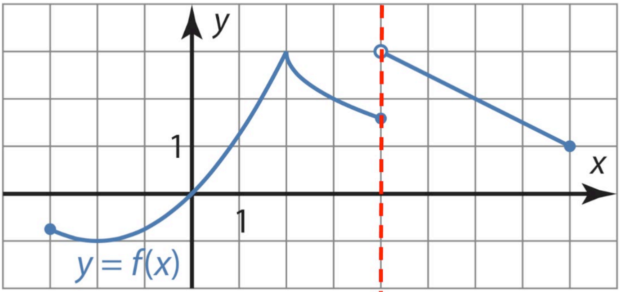
A1.

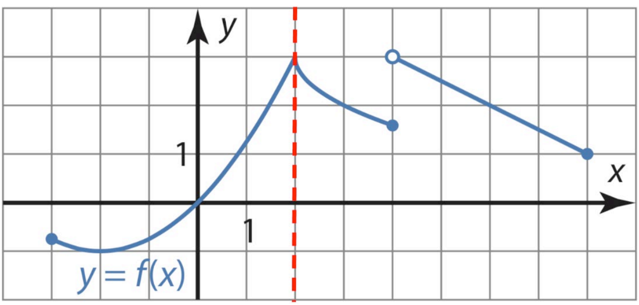
a) Funktiolla on vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa $x = 4$.
Kun muuttujan arvo lähestyy lukua 4 vasemmalta puolelta,
funktion arvo lähestyy lukua 1,6.



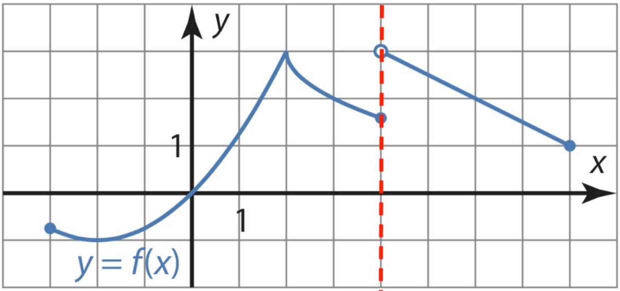
b) Funktiolla on oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa $x = 4$.
Kun muuttujan arvo lähestyy lukua 4 oikealta puolelta,
funktion arvo lähestyy lukua 3.

c) Funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 4$,
koska toispuoliset raja-arvot ovat erisuuret.

d) Funktiolla on raja-arvo kohdassa $x = 2$, koska funktion arvo lähestyy lukua 3, kun muuttujan arvo lähestyy lukua 2 kummalta puolelta tahansa.



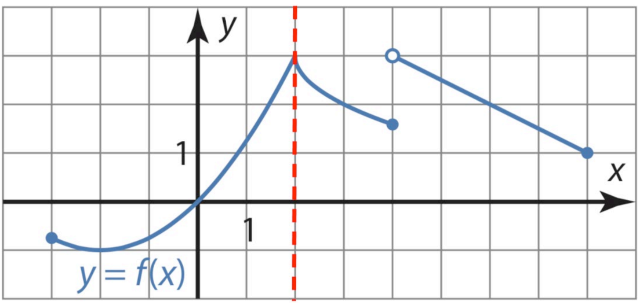
e) Funktio on vasemmalta jatkuva kohdassa 4, koska funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo ja funktion arvo kohdassa $x = 4$ ovat yhtä suuret ($\approx 1{,}6$).



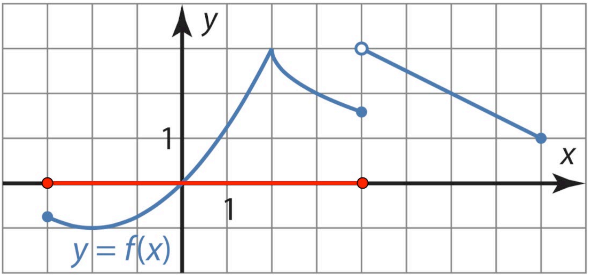
f) Funktio ei ole oikealta jatkuva kohdassa 4, koska kohdassa $x = 4$ funktion oikeanpuoleinen raja-arvo 3 on erisuuri kuin funktion arvo 1,6.

g) Funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = 4$, koska funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 4.

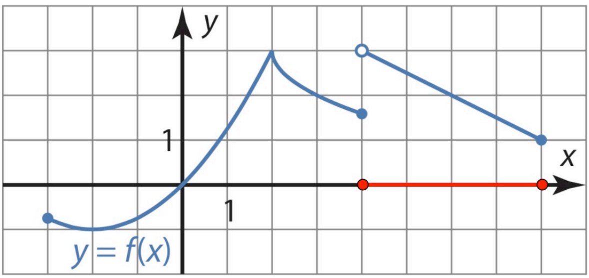
h) Funktio on jatkuva kohdassa $x = 2$, koska funktion arvo $f(2) = 3$ ja funktion raja-arvo $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ ovat yhtä suuret.



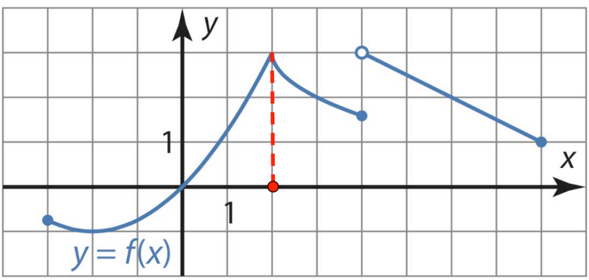
i) Funktio on jatkuva välillä $[-3, 4]$, koska se on jatkuva välin jokaisessa sisäpisteessä ja oikealta jatkuva päätepisteessä -3 ja vasemmalta jatkuva päätepisteessä 4.



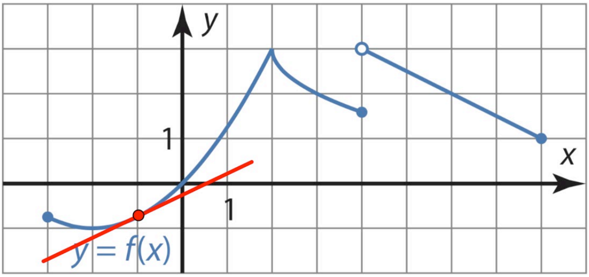
j) Funktio ei ole jatkuva välillä $[4, 8]$, koska se ei ole oikealta jatkuva välin päätepisteessä 4.



k) Funktio ei ole derivoituva kohdassa 2. Funktion kuvaajalla on kohdassa $x = 2$ terävä kärki, joten siihen ei voida piirtää yksikäsitteisellä tavalla tangenttia.



l) Funktio on derivoituva kohdassa -1, koska kohtaan $x = -1$ voidaan piirtää tangentti yksikäsitteisellä tavalla.



Vastaus

a) tosi	b) tosi	c) epätosi
d) tosi	e) tosi	f) epätosi
g) epätosi	h) tosi	i) tosi
j) epätosi	k) epätosi	l) tosi

A2.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x, & \text{kun } x\le 2 \\ x-4, & \text{kun } x>2 \end{cases}$$

a) Funktio f on jatkuva kohdassa 2, jos vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo.

Kohdassa $x=2$ on $f(x)=x^2-3x$, joten $f(2)=2^2-3\cdot 2=-2$.

Kohdan $x=2$ vasemmalla puolella on $f(x)=x^2-3x$, joten

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(x^2-3x)=2^2-3\cdot 2=-2.$$

Kohdan $x=2$ oikealla puolella on $f(x)=x-4$, joten

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x-4)=2-4=-2.$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo, funktio f on jatkuva kohdassa 2. $\square$

b) Koska funktio f on jatkuva kohdassa 2, se voi olla derivoituva kohdassa 2. Koska funktion lauseke vaihtuu kohdassa 2, määritetään toispuoliset derivaatat.

Lasketaan funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa 2.

$$f'_-(2) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$f(x) = x^2 - 3x$

$f(2) = -2$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{(2+h)^2 - 3 \cdot (2+h) - (-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{4 + 4h + h^2 - 6 - 3h + 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{h^2 + h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{\cancel{h}(h+1)}{\cancel{h}} = 0 + 1 = 1$$

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa 2.

$$f'_+(2) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$f(x) = x - 4$

$f(2) = -2$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{(2+h) - 4 - (-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} 1 = 1$$

Koska toispuoliset derivaatat ovat yhtä suuret, niin $f'(2) = 1$.
Funktio f on siis derivoituva kohdassa 2. □

Vastaus

a) on jatkuva **b)** on derivoituva

A3.

Määritetään funktion $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ derivaatta kohdassa 2 käyttäen derivaatan määritelmää.

Tapa 1

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{{}^{4)}\dfrac{1}{(2+h)^2}-{}^{(2+h)^2)}\dfrac{1}{2^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{4}{4(2+h)^2}-\dfrac{(2+h)^2}{4(2+h)^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{4-(2+h)^2}{4h(2+h)^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{4-(4+4h+h^2)}{4h(2+h)^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-4h-h^2}{4h(2+h)^2}{}^{(h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-4-h}{4(2+h)^2}=\frac{-4}{4\cdot 2^2}=-\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Tapa 2

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{{}^{4)}\dfrac{1}{x^2}-{}^{x^2)}\dfrac{1}{2^2}}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{4}{4x^2}-\dfrac{x^2}{4x^2}}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{4x^2(x-2)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-(x^2-4)}{4x^2(x-2)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}(x+2)}{4x^2\cancel{(x-2)}}=\frac{-(2+2)}{4\cdot 2^2}=-\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Vastaus

$f'(2)=-\dfrac{1}{4}$

A4.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x+25}{2x^2-4}^{(x^2}$

Supistetaan nimittäjän korkeimmalla potenssilla x^2.

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\boxed{\dfrac{7}{x}}^{\to 0} + \boxed{\dfrac{25}{x^2}}^{\to 0}}{2 - \boxed{\dfrac{4}{x^2}}_{\to 0}} = \frac{0+0}{2-0} = 0$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3e^{2x}-2e^{x}}{6e^{2x}}^{(e^{2x}}$

Supistetaan termillä $e^{2x} = (e^x)^2$.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \boxed{\dfrac{2}{e^x}}^{\to 0}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Vastaus

a) 0

b) $\frac{1}{2}$

A5.

a)

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty}\int_0^t 1\cdot(x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x \qquad \Big|\,\text{Yhdistetyn funktion integroimissääntö} \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_0^t -(x+1)^{-1} \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_0^t -\frac{1}{x+1} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\boxed{\frac{1}{t+1}}^{\to 0} + \frac{1}{0+1}\right) = 0+1 = 1
\end{aligned}
$$

b)

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to -1} \int_{t}^{2} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to -1} \int_{t}^{2} 1\cdot (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

Yhdistetyn funktion integroimissääntö

$$= \lim_{t\to -1} \Big/_{t}^{2} -(x+1)^{-1}$$

$$= \lim_{t\to -1} \Big/_{t}^{2} -\frac{1}{x+1}$$

$$= \lim_{t\to -1} \left(-\frac{1}{2+1} + \frac{1}{t+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{0} \text{ (ei määritelty)}$$

Koska nimittäjän raja-arvo on nolla, mutta osoittajan raja-arvo ei ole nolla, raja-arvoa $\lim_{t\to -1} \frac{1}{t+1}$ ei ole olemassa.

Integraali hajaantuu.

Vastaus

a) 1

b) hajaantuu

A6.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\boxed{\sqrt{4x^2+x}}^{\to\infty} - \boxed{x}^{\to\infty}\right) = \infty - \infty \quad \text{(ei määritelty)}$$

Koska päädytään muotoon $\infty - \infty$, on lauseketta ensin sievennettävä, jotta raja-arvo voidaan päätellä.

$$\sqrt{4x^2+x} - x$$

$$= {}^{\sqrt{4x^2+x}+x)} \frac{\sqrt{4x^2+x} - x}{1}$$

$$= \frac{(\sqrt{4x^2+x} - x)(\sqrt{4x^2+x} + x)}{\sqrt{4x^2+x} + x} \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$= \frac{(4x^2+x) - x^2}{\sqrt{4x^2+x} + x}$$

$$= \frac{3x^2+x}{\sqrt{4x^2+x} + x}$$

Erotetaan x^2 tekijäksi juuren sisällä ja x osoittajassa.

$$= \frac{x(3x+1)}{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x})} + x} \qquad \sqrt{x^2} = |x| = x, \text{ kun } x > 0$$

$$= \frac{x(3x+1)}{x \cdot \sqrt{4+\frac{1}{x}} + x}$$

$$= \frac{\cancel{x}(3x+1)}{\cancel{x} \cdot (\sqrt{4+\frac{1}{x}} + 1)}$$

$$= \frac{3x+1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}} + 1}$$

Määritetään raja-arvo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\boxed{3x}^{\to\infty} + 1}{\sqrt{4 + \boxed{\frac{1}{x}}_{\to 0}} + 1} = \frac{\infty + 1}{2 + 1} = \infty$$

Raja-arvoa ei ole olemassa, epäoleellinen raja-arvo on ∞.

Vastaus
ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo ∞

A7.

a) Derivoidaan funktio $f(x) = \mathrm{e}^x + x - 3$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + 1$$

Koska $\mathrm{e}^x > 0$ kaikilla x, niin $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$ kaikilla x.
Funktio f on siis aidosti kasvava, joten sillä on käänteisfunktio.

b) Koska funktion f ja käänteisfunktion f^{-1} kuvaajat ovat peilikuvia suoran $y = x$ suhteen, kuvaajien leikkauspisteet sijaitsevat suoralla $y = x$.

Ratkaistaan funktion f kuvaajan ja suoran $y = x$ leikkauspisteet.

$$\begin{cases} y = \mathrm{e}^x + x - 3 \\ y = x \end{cases} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\begin{cases} x = \ln 3 \\ y = \ln 3 \end{cases}$$

Kuvaajien leikkapiste on $(\ln 3, \ln 3)$.

c) On määritettävä käänteisfunktion derivaatta kohdassa $\ln 3$.
Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella.

$$(f^{-1})'(\ln 3) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ missä } f(x_0) = \ln 3.$$

b-kohdan perusteella funktion f kuvaaja kulkee pisteen $(\ln 3, \ln 3)$ kautta, joten $x_0 = \ln 3$.

Siis

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(\ln 3) &= \frac{1}{f'(\ln 3)} \\ &= \frac{1}{e^{\ln 3} + 1} \\ &= \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Käänteisfunktion kuvaajalle leikkauspisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin on $\frac{1}{4}$.

Vastaus
b) $(\ln 3, \ln 3)$
c) $\frac{1}{4}$

A8.

$f(x) = \{$[unknown template]

a) Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$.

Ehdon 1 mukaan tulee olla $\frac{1}{5}(x+1)(a-x) \geq 0$ kaikilla $-1 \leq x \leq 2$.
Välillä $-1 \leq x \leq 2$ on $x+1 \geq 0$ ja $a-x \geq a-2$. Siten tulee olla $a \geq 2$.

Määritetään vakio a ehdon 2 avulla.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{-1} 0\mathrm{d}x}_{=0} + \int_{-1}^{2} \frac{1}{5}(x+1)(a-x)\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{2}^{\infty} 0\mathrm{d}x}_{=0} = 1$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{5}(x+1)(a-x)\mathrm{d}x = 1 \qquad \text{CAS-laskimella}$$

$$\frac{9}{10}a - \frac{9}{10} = 1 \qquad \text{CAS-laskimella}$$

$$a = \frac{19}{9}$$

Saatu ratkaisu toteuttaa ehdon $a \geq 2$, joten $a = \frac{19}{9}$.

b) Lasketaan tapahtuman "$X > 0$" todennäköisyys.

$$P(X > 0) = \int_0^\infty f(x)\ \mathbf{d}x$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{5}(x+1)(\frac{19}{9} - x)\ \mathbf{d}x + \underbrace{\int_2^\infty 0\ \mathbf{d}x}_{=0}$$

$$= \frac{34}{45} \approx 0{,}756$$

Vastaus

a) $a = \dfrac{19}{9}$

b) $\dfrac{34}{45} \approx 0{,}756$

A9.

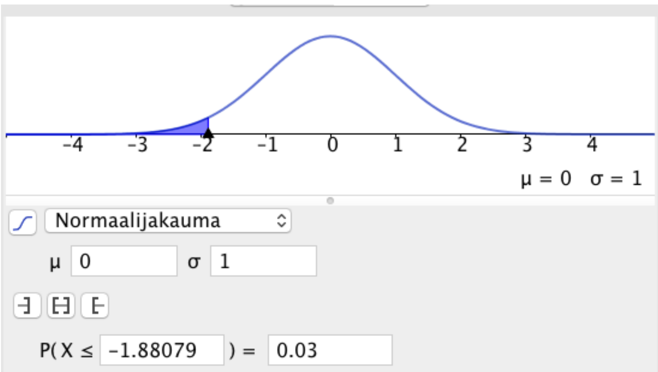
Tehtävänä on määrittää sokeripaketin massan X odotusarvo μ, kun keskihajonta $\sigma = 25$ (g).

Olkoon arvoa $x = 1000$ (g) vastaava normitettu arvo z.

Tulee olla $P(X < 1000) = P(Z < z) = 0{,}030$.

Satunnaismuuttuja $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että
$P(Z < z) = 0{,}030$, kun $z \approx -1{,}88079$.



Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan μ.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad z \approx -1{,}88079,\ x = 1000,\ \sigma = 25$$

$$-1{,}88079 = \frac{1000-\mu}{25} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\sigma \approx 1047$$

Odotusarvoksi pitäisi säätää 1047 g.

Vastaus
1047 g

A10.

a) Ilmaistaan funktio ilman itseisarvomerkkejä.

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x},\ \text{kun}\ \ x<0\\ \dfrac{x}{1+x},\ \text{kun}\ \ x\geq 0\end{cases}$$

Määritetään derivaattafunktio CAS-laskimella.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2},\ \text{kun}\ \ x<0\\ \dfrac{1}{(x+1)^2},\ \text{kun}\ \ x>0\end{cases}$$

Kun $x<0$, $f'(x)=\dfrac{1}{(\underbrace{x-1}_{<-1})^2}>0$.

Kun $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{(\underbrace{x+1}_{>1})^2}>0$.

Siten funktio f on aidosti kasvava välillä $x<0$ ja välillä $x>0$. Koska funktio f on jatkuva kohdassa $x=0$, funktio f on aidosti kasvava koko reaalilukujen joukossa.

Lasketaan raja-arvot.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-x}^{(x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=-1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}^{(x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+1}=1$$

Koska funktio f on jatkuva ja aidosti kasvava, se saa kaikki arvot avoimelta väliltä]–1, 1[.

b) Kun $x<0$,

$$f(x)=y$$

$$\frac{x}{1-x}=y$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x=\frac{y}{1+y}.$$

Siten $f^{-1}(y)=\dfrac{y}{1+y}$, kun $-1<y<0$.

Kun $x\geq 0$,

$$f(x)=y$$

$$\frac{x}{1+x}=y$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x=\frac{y}{1-y}.$$

Siten $f^{-1}(y)=\dfrac{y}{1-y}$, kun $0\leq y<1$.

Funktion lauseke voidaan ilmaista itseisarvomerkkiä käyttäen.

$f^{-1}(y)=\dfrac{y}{1-|y|}$, missä $-1<y<1$

Kun muuttujaksi vaihdetaan x saadaan

$f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$, missä $-1<x<1$

Vastaus

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$, missä $-1 < x < 1$

B1.

a) Ratkaistaan, milloin funktio $4-3x$ on epänegatiivinen.

$$\begin{aligned} 4-3x &\geq 0 && \left| -4 \right. \\ -3x &\geq -4 && \left| :(-3) \right. \\ x &\leq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Ilmaistaan funktion f ilman itseisarvomerkkejä.

$$f(x)=|4-3x|=\begin{cases} 4-3x, & \text{kun } x\leq \frac{4}{3} \\ -4+3x, & \text{kun } x>\frac{4}{3} \end{cases}$$

b) Lasketaan toispuoliset raja-arvot kohdassa $\frac{4}{3}$.

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}-} f(x)=\lim_{x\to\frac{4}{3}-}(4-3x)=4-3\cdot\frac{4}{3}=0$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}+} f(x)=\lim_{x\to\frac{4}{3}+}(-4+3x)=-4+3\cdot\frac{4}{3}=0$$

c) Funktio f on jatkuva kohdassa $\frac{4}{3}$, koska funktion arvo ja toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret tässä kohdassa.

$$f(\frac{4}{3}) = 4 - 3 \cdot \frac{4}{3} = 0$$
$$\lim_{x \to \frac{4}{3}-} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to \frac{4}{3}+} f(x) = 0$$

Vastaus

a) $f(x) = \begin{cases} 4 - 3x, & \text{kun } x \leq \frac{4}{3} \\ -4 + 3x, & \text{kun } x > \frac{4}{3} \end{cases}$

b) $\lim_{x \to \frac{4}{3}-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to \frac{4}{3}+} f(x) = 0$

c) on jatkuva

B2.

Määritetään funktion $f(x)=x^2-1$ derivaattafunktio käyttäen derivaatan määritelmää.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{((x+h)^2-1)-(x^2-1)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2-1)-(x^2-1)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-1-x^2+1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}\\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h)=2x
\end{aligned}
$$

Vastaus

$f'(x)=2x$

B3.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{kun } x \leq 1 \\ -x^2 + a, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

1) Jotta funktio f voi olla derivoituva kohdassa 1, tulee sen olla jatkuva kohdassa 1.

Funktio f on jatkuva kohdassa 1, jos funktion vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo.

Kohdassa $x = 1$ on $f(x) = ax + b$, joten $f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$.

Kohdan $x = 1$ vasemmalla puolella on $f(x) = ax + b$, joten $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} (ax + b) = a + b$.

Kohdan $x = 1$ oikealla puolella on $f(x) = -x^2 + a$, joten $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (-x^2 + a) = -1 + a = a - 1$.

Funktio f on siis jatkuva kohdassa 1, kun

$$\begin{aligned} a + b &= a - 1 \quad \Big| -a \\ b &= -1. \end{aligned}$$

2) Määritetään seuraavaksi vakio a niin, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} ax-1, & \text{kun } x \le 1 \\ -x^2+a, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

on derivoituva kohdassa 1.

Funktio f on derivoituva kohdassa 1, jos toispuoliset derivaatat ovat yhtä suuret.

Laskentaan funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa 1.

$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$f(x) = ax-1$, kun $x < 1$

$f(1) = a-1$

$$= \lim_{x \to 1-} \frac{ax-1-(a-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1-} \frac{ax-a}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1-} \frac{a\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1-} a = a$$

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa 1.

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$f(x) = -x^2 + a$

$f(1) = a - 1$

$$= \lim_{x \to 1+} \frac{-x^2 + a - (a-1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1+} \frac{-x^2 + 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1+} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1+} \frac{-(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1+} -(x+1) = -2$$

Funktio f on siis derivoituva kohdassa 1, kun $a = -2$.

Vastaus

$a = -2$ ja $b = -1$

B4.

a) Määritetään käänteisfunktion lauseke ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ x^2 + 2 &= y \\ x^2 &= y - 2 \\ x &= \sqrt{y-2} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{y-2} \end{aligned}$$

Koska funktion f määrittelyjoukossa $x \geq 0$, niin $x = \sqrt{y-2}$.
Käänteisfunktion lauseke on siis $f^{-1}(y) = \sqrt{y-2}$.

Määritetään seuraavaksi funktion f arvojoukko.

Funktion $f(x) = x^2 + 2$ määrittelyjoukko on $[0, \infty[$.
Derivaattafunktio $f'(x) = 2x > 0$, kun $x > 0$,
ja $f'(x) = 2x = 0$ vain yksittäisessä kohdassa $x = 0$.
Funktio f on siis aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$.

Funktion f pienin arvo on siis $f(0) = 0^2 + 2 = 2$.
Funktio saa mielivaltaisen suuria arvoja, koska
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (x^2 + 2) = \infty^2 + 2 = \infty$.

Funktion f arvojoukkko on $A_f = [2, \infty[$.
Täten käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on $[2, \infty[$ ja arvojoukko $[0, \infty[$.

Kun vaihdetaan muuttujaksi x, saadaan

$$f^{-1} : [2, \infty[\to \mathbf{R}, \; f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}.$$

b) $f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x-2})$

$$= \left(\sqrt{x-2}\right)^2 + 2$$

$$= x - 2 + 2$$

$$= x$$

Vastaus

a) $f^{-1} : [2, \infty[\to \mathbf{R},\ f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$

B5.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+2x}{2x^3-x}^{(x^3}$

Supistetaan nimittäjän korkeimmalla potenssilla x^3.

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\boxed{\frac{2}{x^2}}^{\to 0}}{2-\boxed{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}$$

$$=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-2^{3x}}{3^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^x}{3^x}-\frac{2^{3x}}{3^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{(2^3)^x}{3^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\left(\frac{8}{3}\right)^x\right)$$

b) $=1-\infty=-\infty$

Raja-arvoa ei ole olemassa. Epäoleellinen raja-arvo on $-\infty$.

Vastaus

a) $\dfrac{1}{2}$

b) ei raja-arvoa, epäoleellinen raja-arvo $-\infty$

B6.

a)

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_0^t 1\cdot(x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

| Yhdistetyn funktion integrointisääntö

$$= \lim_{t\to\infty} \Big/_0^t\, 2(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \Big/_0^t\, 2\sqrt{x+1}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\boxed{2\sqrt{x+1}}^{\to\infty} - 2\sqrt{0+1}\right)$$

$$= \infty - 2 = \infty$$

Epäoleellinen integraali hajaantuu.

b)

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to -} \int_{t}^{0} \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to -1} \int_{t}^{0} 1\cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Yhdistetyn funktion integrointisääntö

$$= \lim_{t\to -1} \Big/_{t}^{0}\, 2(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{t\to -1} \Big/_{t}^{0}\, 2\sqrt{x+1}$$

$$= \lim_{t\to -1} \left(2\sqrt{0+1} - 2\sqrt{t+1}\right)$$

$$= 2 - 2\sqrt{-1+1} = 2$$

Vastaus

a) hajaantuu

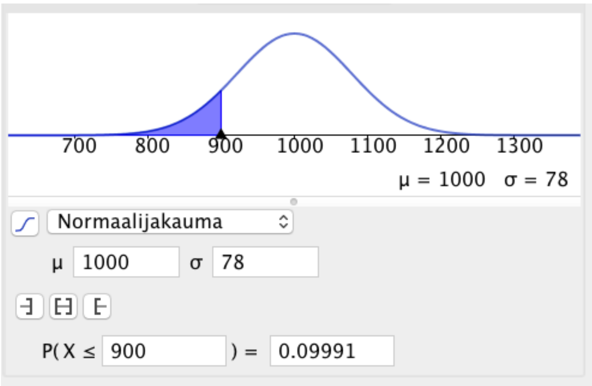
b) 2

B7.

a) Merkitään satunnaisesti valitun jauhopussin painoa grammoina kirjaimella X. Pakkausten painon odotusarvo on 1000 g ja keskihajonta 78 g.

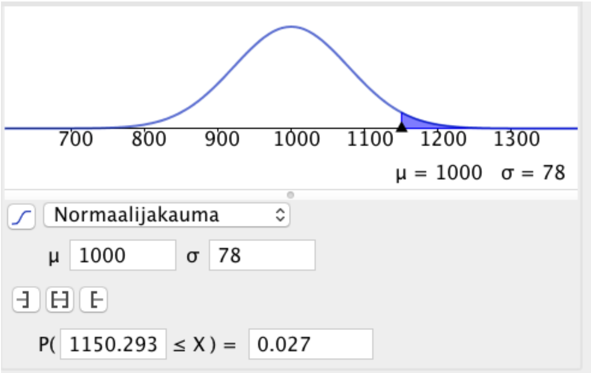
Siis $\mu = 1000$ ja $\sigma = 78$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valittu pakkaus painaa alle 900g.



Saadaan $P(X < 900) \approx 0{,}0999$.

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen satunnaismuuttujan arvo a, että $P(X > a) = 0,027$



Saadaan $a \approx 1150$ (g).

Hylkäämisraja on 1150 g.

Vastaus
a) 0,0999
b) 1150 g

B8.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x<0\\ ae^{-2x}, & \text{kun } x\geq 0\end{cases}$$

a) Koska f on tiheysfunktio, on oltava

1) $f(x)\geq 0$ kaikilla $x\in \mathbf{R}$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathbf{d}x=1$.

Ehdon 1 mukaan tulee olla $ae^{-2x}\geq 0$ kaikilla $x\geq 0$.
Siten tulee olla $a\geq 0$.

Määritetään vakio a ehdon 2 avulla.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x}_{=0}+\int_{0}^{\infty} ae^{-2x}\mathrm{d}x=1$$

$$\int_{0}^{\infty} ae^{-2x}\mathrm{d}x=1$$

Lasketaan CAS-laskimella.

$$\frac{a}{2}=1$$

$$a=2$$

Saatu ratkaisu toteuttaa ehdon $a\geq 0$, joten $a=2$.

b) Lasketaan tapahtuman "$X \geq 1$" todennäköisyys.

$$P(X \geq 1) = \int_1^\infty f(x)\,\mathbf{d}x$$

$$= \int_1^\infty 2e^{-2x}\,\mathbf{d}x \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.}$$

$$= e^{-2} \approx 0{,}135$$

c) Ratkaistaan vakio k.

$$P(X \geq k) = \frac{1}{2}$$

$$\int_k^\infty f(x)\,\mathbf{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\int_k^\infty 2e^{-2x}\,\mathbf{d}x = \frac{1}{2} \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.}$$

$$e^{-2k} = \frac{1}{2} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$k = \frac{\ln 2}{2}$$

Vastaus

a) $a = 2$

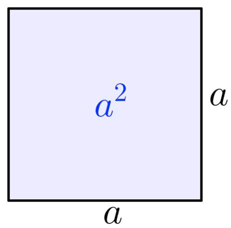
b) $e^{-2} \approx 0{,}135$

c) $k = \dfrac{\ln 2}{2}$

B9.

a) Neliön sivun pituus a arvotaan väliltä $[0, 3]$.
Neliön pinta-ala on a^2.

$$a^2 \leq 4$$
$$0 \leq a \leq 2$$



Satunnaisluvun a valinnalle suotuisa väli on $[0, 2]$ ja koko mahdollinen väli on $[0, 3]$.

Olkoon satunnaismuuttuja X: "neliön pinta-ala".

$$P(X \leq 4) = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$$

b) Muodostetaan lauseke funktiolle $F(t) = P(X \leq t)$.

Neliön pinta-ala on vähintään 0 ja enintään $3^2 = 9$.
Näin ollen $F(t) = 0$, kun $t < 0$, ja $F(t) = 1$, kun $t > 9$.

Tarkastellaan tilannetta $0 \leq t \leq 9$. Tapahtuma "$X \leq t$" toteutuu, kun neliön pinta-ala on korkeintaan t. Tällöin neliön sivun pituus on korkeintaan $\sqrt{t}$. Suotuisa satunnaisluvun väli on siis $[0, \sqrt{t}\,]$ ja koko väli on $[0, 3]$.

$$P(X \leq t) = \frac{\sqrt{t}}{3}$$

Kertymäfunktion lauseke on siis

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0 \\ \dfrac{\sqrt{t}}{3}, & \text{kun } 0 \le t \le 9 \\ 1, & \text{kun } t > 9 \end{cases}$$

eli

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{3}, & \text{kun } 0 \le x \le 9 \\ 1, & \text{kun } x > 9. \end{cases}$$

c) Tiheysfunktio $f(x) = F'(x)$ kaikissa niissä kohdissa, joissa F on derivoituva.

Derivoidaan kertymäfunktio.

Kun $x < 0$ tai $x > 9$, niin $f(x) = \mathrm{D}0 = \mathrm{D}1 = 0.$

Kun $0 < x < 9,$ niin $f(x) = \mathrm{D}\dfrac{\sqrt{x}}{3} = \dfrac{1}{6\sqrt{x}}$.

Arvoilla rajakohdissa $x = 0$ ja $x = 9$ ei ole merkitystä. Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 0 \\ \dfrac{1}{6\sqrt{x}}, & \text{kun } 0 < x \le 9 \\ 0, & \text{kun } x > 9. \end{cases}$$

d) Koska tiheysfunktion arvot eroavat nollasta välillä $0 < x \leq 9$, voidaan odotusarvon määritelmässä esiintyvä integraali rajoittaa tälle välille.

Lasketaan odotusarvo.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{9} x \cdot \frac{1}{6\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= 3
\end{aligned}$$

Pinta-alan odotusarvo on 3.

Vastaus

a) $\frac{2}{3} \approx 0{,}667$

b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{3}, & \text{kun } 0 \leq x \leq 9 \\ 1, & \text{kun } x > 9. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ \frac{1}{6\sqrt{x}}, & \text{kun } 0 < x \leq 9 \\ 0, & \text{kun } x > 9. \end{cases}$

d) 3

B10.

Funktiolla $f:]0, \infty[\to \mathbf{R}$ on ominaisuus:

$f(xy) = f(x) + f(y)$ kaikilla $x > 0$ ja $y > 0$.

a) Valitaan $x = 1$ ja $y = 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(xy) &= f(x) + f(y) \\ f(1 \cdot 1) &= f(1) + f(1) \\ f(1) &= f(1) + f(1) \qquad \Big| - f(1) \\ 0 &= f(1) \end{aligned}$$

Siis $f(1) = 0$.

b) Oletetaan, että funktio f on jatkuva kohdassa 1.

Tehtävänä on osoittaa, että funktio f on jatkuva koko määrittelyjoukossan $]0, \infty[$.

Koska funktio f on jatkuva kohdassa 1, niin $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0$.

Olkoon a mielivaltainen positiivinen luku. Määritetään funktion f raja-arvo kohdassa a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a \cdot \frac{x}{a})$$

$x = \cancel{a} \cdot \frac{x}{\cancel{a}}$ kaikilla $a > 0$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \to a} \left(f(a) + f(\frac{x}{a}) \right) \\ &= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} f(\frac{x}{a}) \\ &= f(a) + f(1) \\ &= f(a) + 0 \\ &= f(a) \end{aligned}$$

Koska $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, niin f on jatkuva kohdassa a.
Koska a oli mielivaltainen positiivinen luku, niin f on jatkuva koko määrittelyjoukossaan $]0, \infty[$. $\square$

c) Oletetaan, että funktio f on derivoituva kohdassa 1.

Tehtävänä on osoittaa, että funktio f on derivoituva koko määrittelyjoukossaan $]0, \infty[$ ja $f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x}$.

Olkoon a mielivaltainen positiivinen luku. Määritetään funktion f erotusosamäärä kohdassa a.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a \cdot \frac{x}{a}) - f(a)}{x - a}$$

$$= \frac{\cancel{f(a)} + f(\frac{x}{a}) \cancel{- f(a)}}{x - a}$$

$$= \frac{f(\frac{x}{a})}{x - a}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo kohdassa a.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(\frac{x}{a})}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(\frac{x}{a})}{a(\frac{x}{a}-1)}$$

Erotetaan nimittäjästä tekijäksi a.

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{a}\cdot\frac{f(\frac{x}{a})}{\frac{x}{a}-1}$$

Siirretään vakio $\frac{1}{a}$ raja-arvon eteen.

$$=\frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(\frac{x}{a})}{\frac{x}{a}-1}$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(\frac{x}{a})-0}{\frac{x}{a}-1}$$

$f(1)=0$

$$=\frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(\frac{x}{a})-f(1)}{\frac{x}{a}-1}$$

Kun $x\to a$, niin $\frac{x}{a}\to 1$

$$=\frac{1}{a}\cdot\lim_{\frac{x}{a}\to 1}\frac{f(\frac{x}{a})-f(1)}{\frac{x}{a}-1}$$

Merkitään $\frac{x}{a}=k$.

$$=\frac{1}{a}\cdot\underbrace{\lim_{k\to 1}\frac{f(k)-f(1)}{k-1}}_{f'(1)}=\frac{1}{a}\cdot f'(1)$$

Siis $f'(a)=\frac{1}{a}f'(1)$ jokaisella $a>0$

eli $f'(x)=\frac{1}{x}f'(1)$ jokaisella $x>0$.

Väite on näin todistettu. $\square$

d) Esimerkiksi vakiofunktiolla $f(x) = 0$ on vaadittu ominaisuus:

$$f(xy) = 0 \quad \text{ja toisaalta} \quad f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0\,.$$

Myös mikä tahansa logaritmifunktio käy esimerkiksi.
Vaikkapa $f(x) = \ln x$:

$$f(xy) = \ln xy = \ln x + \ln y = f(x) + f(y) \quad \text{kaikilla } x, y > 0.$$