7.1

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$(f^{-1})'(-3) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = -3$.

Määritetään funktion $f(x) = x^3 + 2x$ derivaattafunktio.

$f'(x) = 3x^2 + 2$

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= -3 \\ (x_0)^3 + 2x_0 &= -3 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x_0 &= -1 \end{aligned}$$

Siis

$f(-1) = -3$,

$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 = 5 \qquad f'(x) = 3x^2 + 2$

ja

$(f^{-1})'(-3) = \dfrac{1}{f'(-1)} = \dfrac{1}{5}$.

Vastaus

$(f^{-1})'(-3) = \dfrac{1}{5}$

7.2

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = 2$.

Määritetään funktion $f(x) = 2x + \ln x$, missä $x > 0$, derivaattafunktio.

$f'(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 2 \\ 2x_0 + \ln x_0 &= 2 \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Siis

$f(1) = 2$,

$f'(1) = 2 + \dfrac{1}{1} = 3$

$f'(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

ja

$(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3}$.

Vastaus

$(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{3}$

7.3

a) Funktion monotonisuus päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

Osoitetaan, että derivaattafunktio ei vaihda merkkiään.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 12 \\ &= 3(x^2 - 4x + 4) \\ &= 3(x-2)^2 \end{aligned}$$

Tunnistetaan muistikaava:
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$f'(x) = 0$ ainoastaan, kun $x - 2 = 0$, eli kun $x = 2$. Muulloin $f'(x) > 0$.

Siten funktio f on aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio. □

b) Käänteisfunktio ei ole derivoituva kohdissa $y_0 = f(x_0)$, joissa $f'(x_0) = 0$. a-kohdassa havaittiin, että $f'(x) = 0$ ainoastaan, kun $x = 2$.

Käänteisfunktio ei ole derivoituva kohdassa

$$\begin{aligned} y_0 &= f(2) \\ &= 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = 8. \end{aligned}$$

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 12x$

Vastaus
b) kohdassa 8

7.4

a) Funktion monotonisuus päätellään derivaattafunktion merkeistä.
Määritetään funktion $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+7$ derivaattafunktio.

$$f'(x)=x^2+6x+9$$

Osoitetaan, että derivaattafunktio ei vaihda merkkiään.

$$\begin{aligned} f'(x)&=x^2+6x+9 \\ &=(x+3)^2 \end{aligned}$$

Tunnistetaan muistikaava:
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$f'(x)=0$ ainoastaan, kun $x+3=0$, eli kun $x=-3$. Muulloin $f'(x)>0$.

Siten funktio f on aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio. □

b) Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$(f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = 7$.

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$f(x_0) = 7$$

$$\frac{1}{3}x_0^3 + 3x_0^2 + 9x_0 + 7 = 7 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x_0 = 0$$

Siis

$f(0) = 7$,

$f'(0) = 0^2 + 6 \cdot 0 + 9 = 9 \qquad f'(x) = x^2 + 6x + 9$

ja

$(f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{9}$.

c) Käänteisfunktio ei ole derivoituva kohdissa $y_0 = f(x_0)$, joissa $f'(x_0) = 0$. a-kohdassa havaittiin, että $f'(x) = 0$ ainoastaan, kun $x = -3$.

Käänteisfunktio ei ole derivoituva kohdassa

$y_0 = f(-3) \qquad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + 7$

$= \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) + 7 = -2.$

Vastaus

b) $(f^{-1})'(7) = \frac{1}{9}$

c) kohdassa -2

7.5

Neliöjuuren määritelmän mukaan

$x = \sqrt{y} \Leftrightarrow x^2 = y$ ja $x \geq 0$.

Siis funktion $f(x) = x^2$, missä $x > 0$, käänteisfunktio on $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, missä $y > 0$.

Funktion $f(x) = x^2$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2x$.

Sovelletaan käänteisfunktion derivointikaavaa funktioon $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\
&= \frac{1}{f'(\sqrt{y})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \text{missä } y > 0.
\end{aligned}
$$

Siis $\mathrm{D}\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, missä $y > 0$. Kun muuttujaksi vaihdetaan x,

saadaan $\mathrm{D}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, missä $x > 0$.

Vastaus

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, missä $y > 0$, joten $\mathrm{D}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, missä $x >$

0.

7.6

a) Funktion monotonisuus päätellään derivaattafunktion merkeistä.
Määritetään funktion $f(x) = x^3 + x + 3$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

Koska $f'(x) > 0$ kaikilla x, funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio. $\square$

b) Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella
$(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = 1$.

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1 \\ {x_0}^3 + x_0 + 3 &= 1 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x_0 &= -1 \end{aligned}$$

Siis
$f(-1) = 1$,
$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 1 = 4 \qquad f'(x) = 3x^2 + 1$
ja
$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{4}.$$

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$(f^{-1})'(-7) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = -7$.

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= -7 \\ {x_0}^3 + x_0 + 3 &= -7 \\ x_0 &= -2 \end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Siis

$f(-2) = -7$,

$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 1 = 13$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 1$

ja

$(f^{-1})'(7) = \dfrac{1}{f'(-2)} = \dfrac{1}{13}$.

Vastaus

b) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{4}$ ja $(f^{-1})'(-7) = \frac{1}{13}$

7.7

a) Funktion monotonisuus päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x)=\ln x+x-1$, missä $x>0$ derivaattafunktio.

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1$$

Koska $f'(x)>0$, kun $x>0$, funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio. □

b) Tehtävänä on määrittää sellainen x, että

$f^{-1}(0)=x$ ja $f(x)=0$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x)=0$.

$$f(x)=0$$

$$\ln x+x-1=0$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x=1$$

Koska $f(1)=0$, niin $f^{-1}(0)=1$.

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = 1$.

Siis

$f(1) = 0$,

$f'(1) = \dfrac{1}{1} + 1 = 2$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

ja

$(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2}$.

Vastaus

b) $f^{-1}(0) = 1$ ja $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{2}$

7.8

a) $f(\pi) = 2 \cdot \pi + \underbrace{\sin \pi}_{0}$

$= 2\pi$

b) a-kohdan perusteella $f(\pi) = 2\pi$, joten

$f^{-1}(2\pi) = \pi$.

c) Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$(f^{-1})'(2\pi) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = 2\pi$.

Määritetään funktion $f(x) = 2x + \sin x$ derivaattafunktio.

$f'(x) = 2 + \cos x$

Siis

$f(\pi) = 2\pi$,

$f'(\pi) = 2 + \underbrace{\cos \pi}_{-1} = 1$ $\qquad f'(x) = 2 + \cos x$

ja

$(f^{-1})'(2\pi) = \dfrac{1}{f'(\pi)} = 1.$

Vastaus

a) $f(\pi) = 2\pi$

b) $f^{-1}(2\pi) = \pi$

c) $(f^{-1})'(2\pi) = 1$

7.9

Määritetään funktion $f(x)=x^3+x+1$ käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

Pisteen x-koordinaatti on 3.

Tulee määrittää pisteen y-koordinaatti $f^{-1}(3)$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x)=3$.

$$f(x)=3$$

$$x^3+x+1=3 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x=1$$

Koska $f(1)=3$, niin $f^{-1}(3)=1$.

Tangentti piirretään funktion $f^{-1}(x)$ kuvaajan pisteeseen $(3, 1)$.

Funktion $f^{-1}(x)$ kuvaajalle kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $(f^{-1})'(3)$.

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella
$(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = 3$.

Määritetään funktion $f(x) = x^3 + x + 1$ derivaattafunktio.
$f'(x) = 3x^2 + 1$

Siis
$f(1) = 3$,
$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 1$
ja
$(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$.

Tangentti kulkee pisteen $(3, 1)$ kautta ja sen kulmakerroin on $\dfrac{1}{4}$.
Muodostetaan tangentin yhtälö.

$y - 1 = \dfrac{1}{4}(x - 3)$ $\quad$ Ratkaistaan y CAS-laskimella.

$y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}$

Funktion $f(x) = x^3 + x + 1$ käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaajalle kohtaan 3 piirretyn tangentin yhtälö on $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}$.

Vastaus
$y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}$

7.10

a) Funktion ja sen käänteisfunktion kuvaajat leikkaavat toisensa suoralla $y = x$. Leikkauspisteiden x-koordinaatit (ja samalla myös y-koordinaatit) saadaan ratkaisemalla yhtälö $x = f(x)$.

$$x^3 + x - 8 = x$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 2$$

Kuvaajat leikkaavat toisensa pisteessä $(2, 2)$.

b) Kuvaajien välinen kulma on kyseiseen leikkauspisteeseen $(2, 2)$ piirrettyjen tangenttien välinen kulma.

Määritetään tangenttien kulmakertoimet leikkauskohdassa $x = 2$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

Funktion f kuvaajalle kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13$.

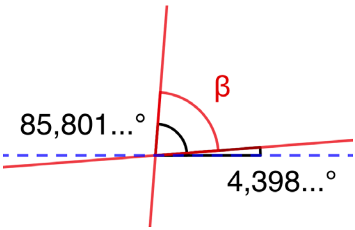
Funktion f^{-1} kuvaajalle kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{13}$.

Lasketaan tangenttien suuntakulmat.

$$\tan \alpha_f = 13$$
$$\alpha_f = \tan^{-1}(13) = 85{,}601...^\circ$$

$$\tan \alpha_{f^{-1}} = \frac{1}{13}$$
$$\alpha_{f^{-1}} = \tan^{-1}(\frac{1}{13}) = 4{,}398...^\circ$$

Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään tangenttien välinen kulma.



Toinen suorista nousee 85,601...°:n kulmassa ja toinen nousee 4,398...°:n kulmassa. Lasketaan tangenttien väliin muodostuvan kulman suuruus.

85,601...° – 4,398...° = 81,202...°

Suorien välisellä kulmalla tarkoitetaan niiden väliin muodostuvaa korkeintaan 90°:n suuruista kulmaa.

Tangenttien välisen kulman suuruus on 81°. Funktioiden f ja f^{-1} kuvaajat leikkaavat toisensa 81°:n kulmassa.

Vastaus
a) (2, 2)
b) 81°

7.11

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$(f^{-1})'(5) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = 5$.

Määritetään funktion $f(x) = -x^5 - 7x^3 - 3$ derivaattafunktio.

$f'(x) = -5x^4 - 21x^2$

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 5 \\ -x_0^5 - 7x_0 - 3 &= 5 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x_0 &= -1 \end{aligned}$$

Siis

$f(-1) = 5$,

$f'(-1) = -5 \cdot (-1)^4 - 21 \cdot (-1)^2 = -26 \quad f'(x) = -5x^4 - 21x^2$

ja

$(f^{-1})'(5) = \dfrac{1}{f'(-1)} = -\dfrac{1}{26}$.

Vastaus

$(f^{-1})'(5) = -\dfrac{1}{26}$

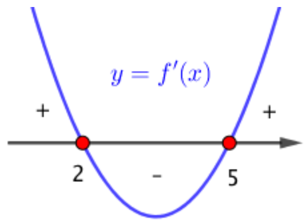
7.12

Funktion monotonisuus päätellään derivaattafunktion merkeistä.
Määritetään funktion $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 60x$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60$$

Osoitetaan, että derivaattafunktio ei vaihda merkkiään välillä [2, 5].
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$
$$6x^2 - 42x + 60 = 0$$
$$x = 2 \text{ tai } x = 5$$



Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten $f'(x) < 0$ välillä $2 < x < 5$.

Funktio f on siten aidosti vähenevä ja sen suurin arvo on $f(2) = 52$ ja pienin arvo $f(5) = 25$.

Koska funktio f on jatkuva, sen arvojoukko on [25, 52].

Funktiolla f on siis käänteisfunktio $g = f^{-1} : [25, 52] \to [2, 5]$. $\square$

Tehtävänä on määrittää sellainen x, että

$g(45) = x$ ja $f(x) = 45.$

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = 45$.

$$f(x) = 45$$

$$2x^3 - 21x^2 + 60x = 45 \text{ Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = 3$$

Koska $f(3) = 45$, niin $g(45) = 3$.

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella
$(f^{-1})'(45) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = 45.$

Siis
$f(3) = 45,$
$f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 42 \cdot 3 + 60 = -12 \qquad f'(x) = 6x^2 - 42x + 60$
ja
$(f^{-1})'(45) = \dfrac{1}{f'(3)} = -\dfrac{1}{12}$

Vastaus
$g(45) = 3$ ja $g'(45) = -\dfrac{1}{12}.$

7.13

a) Funktion monotonisuus päätellään derivaattafunktion merkeistä.
Määritetään funktion $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x$$

Osoitetaan, että derivaattafunktio ei vaihda merkkiään.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^x + (x^2 + 1)e^x && \text{Erotetaan yhteinen tekijä } e^x. \\ &= (x^2 + 2x + 1)e^x && \text{Tunnistetaan muistikaava:} \\ &= (x + 1)^2 e^x && (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ ainoastaan, kun $x + 1 = 0$, eli kun $x = -1$. Muulloin $f'(x) > 0$.

Siten funktio f on aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio. □

b) Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = 1$.

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1 \\ (x_0{}^2 + 1)e^x &= 1 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

Siis

$f(0) = 1$,

$f'(0) = (0+1)^2 e^0 = 1$ $\qquad f'(x) = (x+1)^2 e^x$

ja

$(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{1} = 1.$

c) Käänteisfunktio ei ole derivoituva kohdissa $y_0 = f(x_0)$, joissa $f'(x_0) = 0$. a-kohdassa havaittiin, että $f'(x) = 0$ ainoastaan, kun $x = -1$.

Käänteisfunktio ei ole derivoituva kohdassa

$$\begin{aligned} y_0 &= f(-1) \qquad f(x) = (x^2+1)e^x \\ &= ((-1)^2+1)^2 e^{-1} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{e} \end{aligned}$$

Vastaus

b)

c) kohdassa $\dfrac{2}{e}$

7.14

Logaritmin määritelmän mukaan

$2^x = y \Leftrightarrow x = \log_2 y.$

Siis funktion $f(x) = 2^x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(y) = \log_2 y$, missä $y > 0$.

Funktion $f(x) = 2^x$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2.$

Sovelletaan käänteisfunktion derivointikaavaa funktioon $f^{-1}(y) = \log_2 y.$

$$
\begin{aligned}
f^{-1\prime}(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\
&= \frac{1}{f'(\log_2 y)} \\
&= \frac{1}{2^{\log_2 y} \ln 2} \\
&= \frac{1}{y \ln 2}, \quad \text{missä } y > 0.
\end{aligned}
$$

Siis $\mathrm{D} \log_2 y = \dfrac{1}{y \ln 2}$, kun $y > 0$. Kun muuttujaksi vaihdetaan x,

saadaan $\mathrm{D} \log_2 x = \dfrac{1}{x \ln 2}$, missä $x > 0$.

Vastaus

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{2^{\log_2 y} \ln 2} = \dfrac{1}{y \ln 2}$, missä $y > 0$, joten

$\mathrm{D} \log_2 x = \dfrac{1}{x \ln 2}$, missä $x > 0$.

7.15

a) Funktion $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ missä } f(x_0) = 0.$$

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ \sin x_0 &= 0 \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

Määritetään funktion $f(x) = \sin x$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = \cos x$$

Siis
$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \cos 0 = 1$$
ja
$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

b) Funktion $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{missä} \quad f(x_0) = \frac{1}{2}.$$

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{1}{2} \\ \sin x_0 &= \frac{1}{2} \\ x_0 &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Siis

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ja

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

c) Funktion $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{missä} \quad f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin x_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_0 &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Siis

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ja

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.$$

Vastaus

a) 1

b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{2}$

7.16

a) Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ missä } f(x_0) = 0.$$

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ \cos x_0 &= 0 \\ x_0 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Määritetään funktion $f(x) = \cos x$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = -\sin x$$

Siis

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$f'(\tfrac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

ja

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{-1} = -1.$$

b) Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$$(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{missä} \quad f(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x_0 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_0 &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Siis

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

ja

$$(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$$

c) Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$$(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{missä} \quad f(x_0) = -\frac{1}{2}.$$

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= -\frac{1}{2} \\ \cos x_0 &= -\frac{1}{2} \\ x_0 &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Siis

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ja

$$(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Vastaus

a) -1

b) -2

c) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

7.17

Määritetään funktion $f(x) = \ln x + 2x + 3$ käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

Pisteen x-koordinaatti on 5.

Tulee määrittää pisteen y-koordinaatti $f^{-1}(5)$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = 5$.

$$f(x) = 5$$

$$\ln x + 2x + 3 = 5 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = 1$$

Koska $f(1) = 5$, niin $f^{-1}(5) = 1$.

Tangentti piirretään funktion $f^{-1}(x)$ kuvaajan pisteeseen $(5, 1)$.

Funktion $f^{-1}(x)$ kuvaajalle kohtaan $x = 5$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $(f^{-1})'(5)$.

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$(f^{-1})'(5) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = 5$.

Määritetään funktion $f(x) = \ln x + 2x + 3$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2$$

Siis

$f(1) = 5$,

$f'(1) = \dfrac{1}{1} + 2 = 3$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{x} + 2$

ja

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}.$$

Tangentti kulkee pisteen $(5, 1)$ kautta ja sen kulmakerroin on $\dfrac{1}{3}$.

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$y - 1 = \dfrac{1}{3}(x - 5)$ $\qquad$ Ratkaistaan y CAS-laskimella.

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

Funktion $f(x) = \ln x + 2x + 3$ käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaajalle kohtaan 5 piirretyn tangentin yhtälö on $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$.

Vastaus

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

7.18

a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$f(x) = x^3 - 3x - 1$ Derivoidaan CAS-laskimella.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

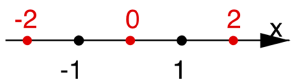
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$3x^2 - 3 = 0$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -1,\ \text{tai}\ \ x = 1$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio f' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -1 ja 1.

Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.



$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(-2) = 9 > 0 \ +$

$f'(0) = -3 < 0 \ -$

$f'(3) = 9 > 0 \quad +$

	-1	1	
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

Kulkukaavion perusteella funktio f on aidosti kasvava välillä $x \leq -1$ ja välillä $x \geq 1$. Funktio f on aidosti vähenevä välillä $-1 \leq x \leq 1$.

Funktio f on aidosti monotoninen väleillä $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 1$ ja $x \geq 1$.

b) Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ missä } \; f(x_0) = -1.$$

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$f(x_0) = 0$$

$$x_0{}^3 - 3x_0 - 1 = -1 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x_0 = -\sqrt{3} \;\text{ tai }\; x_0 = 0 \;\text{ tai }\; x_0 = \sqrt{3}$$

Lasketaan käänteisfunktion derivaatta kohdassa -1 eri väleillä.

Väli $x \leq -1$:

$$f(-\sqrt{3}) = -1$$

$$f'(-\sqrt{3}) = 3 \cdot (-\sqrt{3})^2 - 3 = 6$$

ja

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(-\sqrt{3})} = \frac{1}{6}.$$

Väli $-1 \leq x \leq 1$:

$$f(0) = -1$$

$$f'(0) = 3 \cdot (0)^2 - 3 = -3$$

ja

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{3}.$$

Väli $x \geq 1$:

$$f(\sqrt{3}) = -1$$
$$f'(\sqrt{3}) = 3 \cdot (\sqrt{3})^2 - 3 = 6$$
ja
$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(\sqrt{3})} = \frac{1}{6}.$$

Vastaus

a) $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 1$ ja $x \geq 1$

b) $x \leq -1$: $(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{6}$, $-1 \leq x \leq 1$: $(f^{-1})'(-1) = -\frac{1}{3}$, $x \geq 1$: $(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{6}$

7.19

a) Funktion monotonisuus päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x) = \ln x + x + 1$, missä $x > 0$, derivaattafunktio.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

Koska $f'(x) > 0$, kun $x > 0$, funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio $g = f^{-1}$. □

b) Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella
$(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0) = 2$.

Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 2 \\ \ln x_0 + x_0 + 1 &= 2 \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Siis
$f(1) = 2$,

$f'(1) = \dfrac{1}{1} + 1 = 2$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

ja

$$g'(2) = (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

c) Funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajat leikkaavat toisensa suoralla $y = x$. Leikkauspisteiden x-koordinaatit (ja samalla myös y-koordinaatit) saadaan ratkaisemalla yhtälö $x = f(x)$.

$$\begin{aligned} x &= f(x) \\ x &= \ln x + x + 1 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x &= \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

Kuvaajat leikkaavat toisensa pisteessä $(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1})$.

d) Kuvaajien välinen kulma on leikkauspisteeseen $(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1})$ piirrettyjen tangenttien välinen kulma.

Funktion f kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on

$$f'(\mathrm{e}^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-1}} + 1 = \mathrm{e} + 1.$$

Käänteisfunktion g kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on

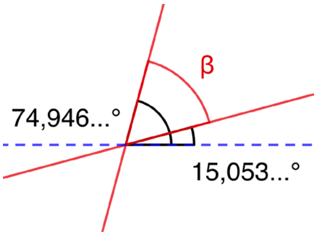
$$g'(\mathrm{e}^{-1}) = (f^{-1})'(\mathrm{e}^{-1}) = \frac{1}{f'(\mathrm{e}^{-1})} = \frac{1}{\mathrm{e}+1}.$$

Lasketaan tangenttien suuntakulmat.

$$\begin{aligned} \tan \alpha_f &= \mathrm{e} + 1 \\ \alpha_f &= \tan^{-1}(\mathrm{e}+1) = 74{,}946\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha_g &= \frac{1}{\mathrm{e}+1} \\ \alpha_g &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{e}+1}\right) = 15{,}053\ldots \end{aligned}$$

Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään tangenttien välinen kulma.



Toinen suorista nousee $74{,}946...°$:n kulmassa ja toinen nousee $15{,}053...°$:n kulmassa. Lasketaan tangenttien väliin muodostuvan kulman suuruus.

$74{,}946...° - 15{,}053...° = 59{,}893...°$

Suorien välisellä kulmalla tarkoitetaan niiden väliin muodostuvaa korkeintaan $90°$:n suuruista kulmaa.

Tangenttien välisen kulman suuruus on $59{,}9°$. Funktioiden f ja f^{-1} kuvaajat leikkaavat toisensa $59{,}9°$:n kulmassa.

Vastaus

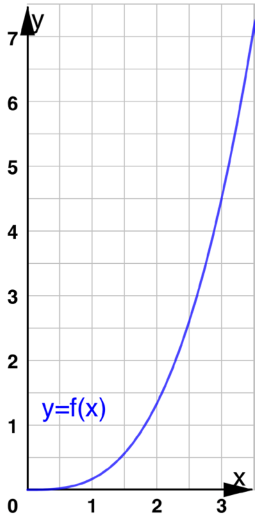
b) $g'(2) = \frac{1}{2}$

c) $(\mathrm{e}^{-1},\ \mathrm{e}^{-1})$

d) $59{,}9°$

7.20

a) Piirretään kuvaajat.



b) Määritetään funktion $f(x)=\frac{1}{6}x^3$ derivaattafunktio.

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^2$$

Lasketaan $f'(2)$.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(2)^2=2$$

Lasketaan $f(2)=\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{4}{3}$.

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella
$(f^{-1})(f(2))=(f^{-1})'(\frac{4}{3})=\frac{1}{f'(x_0)}$, missä $f(x_0)=\frac{4}{3}$.
Ratkaistaan käänteisfunktion derivaatan lausekkeessa esiintyvä muuttuja x_0.

$$\begin{aligned} f(x_0)&=\frac{4}{3} \\ \frac{1}{6}{x_0}^3&=\frac{4}{3} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x_0&=2 \end{aligned}$$

Siis
$f(2)=\frac{4}{3}$,
$f'(2)=2$
ja
$(f^{-1})'(\frac{4}{3})=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2}$.
Eli $(f^{-1})(f(2))=\frac{1}{2}$.

c) $f'(x)$ on xy-koordinaatistossa funktion f kuvaajalle kohtaan x piirretyn tangentin kulmakerroin. $(f^{-1})'(y)$ on yx-koordinaatistossa funktion f^{-1} kuvaajalle kohtaan $y=f(x)$ piirretyn tangentin kulmakerroin. Nämä kulmakertoimet ovat toistensa käänteislukuja.

Vastaus

b) $f'(2)=2$ ja $(f^{-1})'(f(2))=\frac{1}{2}$