6.1

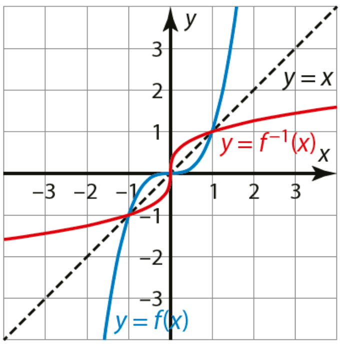
a) Käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke saadaan selville ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$
$$x^3 = y$$
$$x = \sqrt[3]{y}$$

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Kun muuttujaksi vaihdetaan x, saadaan $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

b) Piirretään funktioiden $f(x) = x^3$ ja $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ kuvaajat geometriaohjelmalla.



Funktion f määrittelyjoukko on **R** ja arvojoukko **R**.

Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on **R** ja arvojoukko **R**.

Vastaus

a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

b) Funktion f määrittelyjoukko on **R** ja arvojoukko **R**.

Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on **R** ja arvojoukko **R**.

6.2

a) Käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke saadaan selville ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

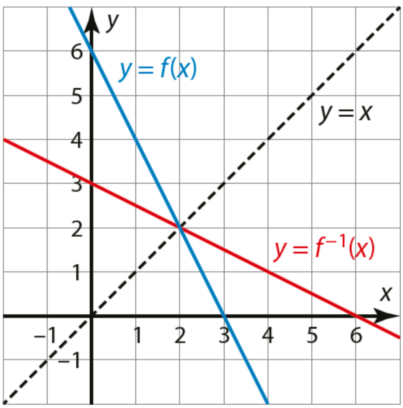
$$\begin{aligned} -2x + 6 &= y \\ -2x &= y - 6 \quad \big| : (-2) \\ x &= -\frac{1}{2}y + 3 \end{aligned}$$

Käänteisfunktion lauseke on

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{2}y + 3.$$

Kun muuttujaksi vaihdetaan x, saadaan $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 3.$

b) Piirretään funktioiden $f(x) = -2x + 6$ ja $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ geometriaohjelmalla.



Vastaus

a) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 3.$

6.3

a) Päätellään funktion f monotonisuus derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x) = -x^2 + 5$ derivaattafunktio.

$f'(x) = -2x$

Koska $f'(x) = 0$ ainoastaan kohdassa $x = 0$ ja muulloin $f'(x) < 0$, niin funktio f on aidosti vähenevä välillä $[0, \infty[$.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio. □

b) Koska funktio f on aidosti vähenevä, sen suurin arvo on $f(0) = 5$.

Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeavan paraabelin se osa, jossa $x \geq 0$.

Siis funktion f määrittelyjoukko on $[0, \infty[$ ja arvojoukko $]-\infty, 5]$. Täten käänteisfunktion määrittelyjoukko on $]-\infty, 5]$ ja arvojoukko $[0, \infty[$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ -x^2 + 5 &= y \\ x^2 &= 5 - y \\ x &= \sqrt{5 - y} \text{ tai } x = -\sqrt{5 - y} \end{aligned}$$

Koska funktion f määrittelyjoukossa $x \geq 0$, niin $x = \sqrt{5-y}$.

Siis $f^{-1}(y) = \sqrt{5-y}$.

Käänteisfunktio on määritelty, kun $y \leq 5$.

Kun vaihdetaan muuttujaksi x, saadaan

$f^{-1} :]-\infty,\ 5] \to \mathbf{R},\ f^{-1}(x) = \sqrt{5-x}$.

Vastaus

b) $f^{-1} :\ ]-\infty,\ 5] \to \mathbf{R},\ f^{-1}(x) = \sqrt{5-x}$

6.4

a) Päätellään funktion f monotonisuus derivaattafunktion merkeistä.
Määritetään funktion $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$$

Koska $2\mathrm{e}^{2x} > 0$ kaikilla x, niin funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio. $\square$

b) Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko $]0, \infty[$. Täten käänteisfunktion määrittelyjoukko on $]0, \infty[$ ja arvojoukko $\mathbf{R}$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ \mathrm{e}^{2x} &= y \\ 2x &= \ln y \quad \Big| :2 \\ x &= \frac{1}{2}\ln y \end{aligned}$$

Siis $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln y$.

Kun vaihdetaan muuttujaksi x, saadaan

$$f^{-1}:\ ]0, \infty[\to \mathbf{R},\ f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln x\,.$$

c) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\mathrm{e}^{2x}) = \frac{1}{2}\ln \mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \ln \mathrm{e} = x$

Vastaus

b) $f^{-1}:\ ]0, \infty[\to \mathbf{R},\ f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln x$

c) $f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2}\ln \mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \ln \mathrm{e} = x$

6.5

a) Käänteisfunktion f^{-1} lauseke saataisiin ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $-x^3 - x + 5 = y$. Yhtälöä ei ole kuitenkaan mahdollista ratkaista, joten käänteisfunktiolle ei saada lauseketta.

Tehtävänä on määrittää sellainen x, että

$f^{-1}(3) = x$ ja $f(x) = 3$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = 3$.

$$f(x) = 3$$

Yhtälöllä $f(x) = 3$ on vain yksi ratkaisu, koska f on aidosti monotoninen.

$$-x^3 - x + 5 = 3$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 1$$

Koska $f(1) = 3$, niin $f^{-1}(3) = 1$.

Tehtävänä on määrittää sellainen x, että
$f^{-1}(0) = x$ ja $f(x) = 0$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$

Yhtälöllä $f(x) = 0$ on vain yksi ratkaisu, koska f on aidosti monotoninen.

$$-x^3 - x + 5 = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\begin{aligned} x &= 1{,}5160... \\ &\approx 1{,}52 \end{aligned}$$

Koska $f(1{,}52) \approx 0$, niin $f^{-1}(0) \approx 1{,}52$.

b) Käänteisfunktion nollakohta on se muuttujan y arvo, jolla

$f^{-1}(y) = 0$ eli $f(0) = y$.

Koska

$f(0) = -0^3 - 0 + 5 = 5$,

niin

$f^{-1}(5) = 0$.

Käänteisfunktion f^{-1} nollakohta on 5.

Vastaus
a) $f^{-1}(3) = 1$ ja $f^{-1}(0) \approx 1{,}52$
b) 5

6.6

a) Päätellään funktion f monotonisuus derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + 1$$

Koska $\mathrm{e}^x + 1 > 0$ kaikilla x, niin funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio. □

b) Käänteisfunktion f^{-1} lauseke saataisiin ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $\mathrm{e}^x + x + 1 = y$. Yhtälöä ei ole kuitenkaan mahdollista ratkaista, joten käänteisfunktiolle ei saada lauseketta.

Tehtävänä on määrittää sellainen x, että

$$f^{-1}(2) = x \quad \text{ja} \quad f(x) = 2.$$

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = 2$.

$$f(x) = 2$$

Yhtälöllä $f(x) = 2$ on vain yksi ratkaisu, koska f on aidosti monotoninen.

$$\mathrm{e}^x + x + 1 = 2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 0$$

Koska $f(0) = 2$, niin $f^{-1}(2) = 0$.

c) Kohta, jossa käänteisfunktion arvo on 2, on se muuttujan y arvo, jolla
$f^{-1}(y) = 2$ eli $f(2) = y$.

Koska
$f(2) = e^2 + 2 + 1 = e^2 + 3$,

niin

$f^{-1}(e^2 + 3) = 2.$

Kohta, jossa käänteisfunktion arvo on 2, on $e^2 + 3$.

Vastaus
b) $f^{-1}(2) = 0$
c) kohdassa $e^2 + 3$

6.7

a) Käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke saadaan selville ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ \sqrt[3]{2x-4} &= y \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x &= \frac{1}{2}y^3 + 2 \end{aligned}$$

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y^3 + 2.$ Kun muuttujaksi vaihdetaan x, saadaan $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2.$

Oikea vaihtoehto on 3.

b) Käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke saadaan selville ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ \sqrt[3]{4-2x} &= y \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x &= 2 - \frac{1}{2}y^3 \\ &= \frac{4-y^3}{2} \end{aligned}$$

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \frac{4-y^3}{2}.$ Kun muuttujaksi vaihdetaan x, saadaan $f^{-1}(x) = \frac{4-x^3}{2}.$

Oikea vaihtoehto on 4.

c) Käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke saadaan selville ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

$$\sqrt[3]{2x} - 4 = y$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = \frac{(y+4)^3}{2}$$

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \frac{(y+4)^3}{2}$. Kun muuttujaksi vaihdetaan x, saadaan $f^{-1}(x) = \frac{(x+4)^3}{2}$.

Oikea vaihtoehto on 5.

d) Käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke saadaan selville ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

$$4 - \sqrt[3]{2x} = y$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(y-4)^3}{2} \\ &= \frac{1}{2}(4-y)^3 \end{aligned}$$

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(4-y)^3$. Kun muuttujaksi vaihdetaan x, saadaan $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(4-x)^3$.

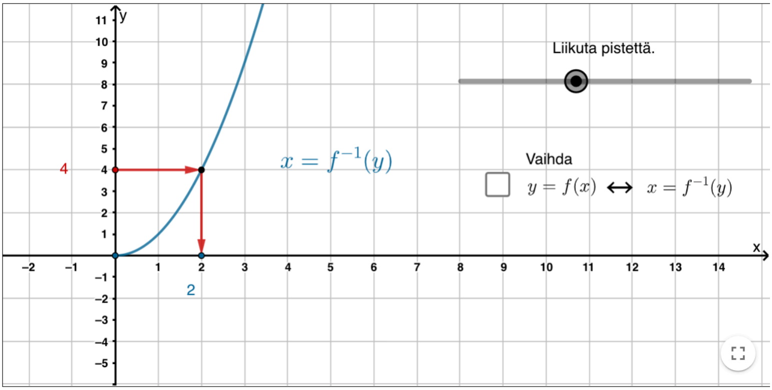
Oikea vaihtoehto on 1.

Vastaus

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 1

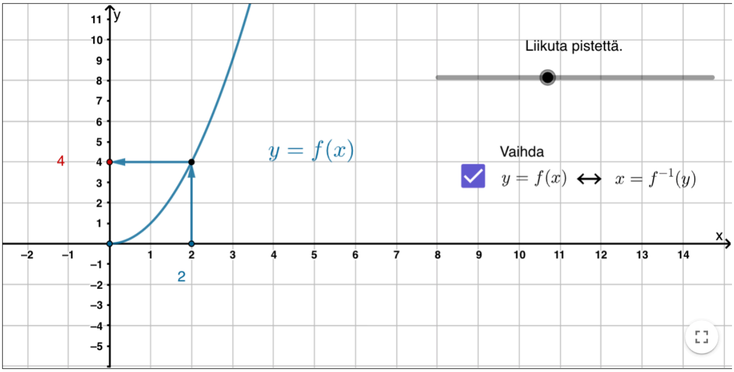
6.8

a) Määritetään kuvaajan perusteella käänteisfunktion arvot.



$$f^{-1}(0) = 0,$$
$$f^{-1}(1) = 1,$$
$$f^{-1}(2) \approx 1{,}4 \text{ ja}$$
$$f^{-1}(4) = 2$$

b) Määritetään kuvaajan perusteella yhdistetyn funktion arvot.



$f^{-1}(f(2)) = 2$ ja $f(f^{-1}(3)) = 3$

c) Funktion f arvojoukko on $[0, \infty[$, joten käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on $[0, \infty[$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= y \\
x^2 &= y \\
x &= \sqrt{y} \text{ tai } x = -\sqrt{y}
\end{aligned}
$$

Koska nyt $x \geq 0$, niin $x = \sqrt{y}$.

Käänteisfunktion on lauseke on $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Vastaus

a) $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(1) = 1$, $f^{-1}(2) \approx 1{,}4$ ja $f^{-1}(4) = 2$

b) $f^{-1}(f(2)) = 2$ ja $f(f^{-1}(3)) = 3$

c) määrittelyjoukko $[0, \infty[$ ja lauseke $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

6.9

a) Tulee osoittaa, että

1) funktioilla $f(x)=\frac{x}{3}+6$ ja $g(x)=3x-18$ on käänteisfunktiot ja

2) $f(g(x))=g(f(x))=x$.

1) Määritetään funktioiden $f(x)=\frac{x}{3}+6$ ja $g(x)=3x-18$

derivaattafunktiot.

$f'(x)=\frac{1}{3}$ ja $g'(x)=3$

Koska $f'(x)>0$ kaikilla x ja $g'(x)>0$ kaikilla *x,* niin funktiot f ja g ovat aidosti kasvavia.

Siten funktioilla f ja g on käänteisfunktiot.

2) $f(g(x))=f(3x-18)=\frac{3x-18}{3}+6=x$

ja

$g(f(x))=g(\frac{x}{3}+6)=3(\frac{x}{3}+6)-18=x$

Koska funktiot f ja g ovat molemmat aidosti kasvavia ja $f(g(x))=g(f(x))=x$, funktiot f ja g ovat toistensa käänteisfunktioita. □

b) Tulee osoittaa, että

1) funktioilla $f(x)=\sqrt[5]{3-x}$ ja $g(x)=3-x^5$ on käänteisfunktiot ja

2) $f(g(x))=g(f(x))=x$.

1) Määritetään funktioiden $f(x)=\sqrt[5]{3-x}$ ja $g(x)=3-x^5$ derivaattafunktiot.

$$f'(x)=-\frac{1}{5\sqrt[5]{(3-x)^4}} \quad \text{ja} \quad g'(x)=-5x^4$$

Koska $f'(x)<0$ kaikilla $x\neq 3$, ja $g'(x)=0$ ainoastaan kohdassa $x=0$ ja muulloin $g'(x)<0$, niin funktiot f ja g ovat aidosti väheneviä.

Siten funktioilla f ja g on käänteisfunktiot.

2) $f(g(x))=f(3-x^5)=\sqrt[5]{3-(3-x^5)}=x$

ja

$g(f(x))=g(\sqrt[5]{3-x})=3-(\sqrt[5]{3-x})^5=x$

Koska funktiot f ja g ovat molemmat aidosti väheneviä ja $f(g(x))=g(f(x))=x$, funktiot f ja g ovat toistensa käänteisfunktioita. □

6.10

a) Päätellään funktion f monotonisuus derivaattafunktion merkeistä.
Määritetään funktion $f(x) = x^2 - 2x$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2x - 2$$

Koska $f'(x) = 0$ ainoastaan kohdassa $x = 1$ ja muulloin $f'(x) > 0$, niin funktio f on aidosti kasvava välillä $[1, \infty[$.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio. □

b) Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$
$$x^2 - 2x = y \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = 1 + \sqrt{y+1} \quad \text{tai} \quad x = 1 - \sqrt{y+1}$$

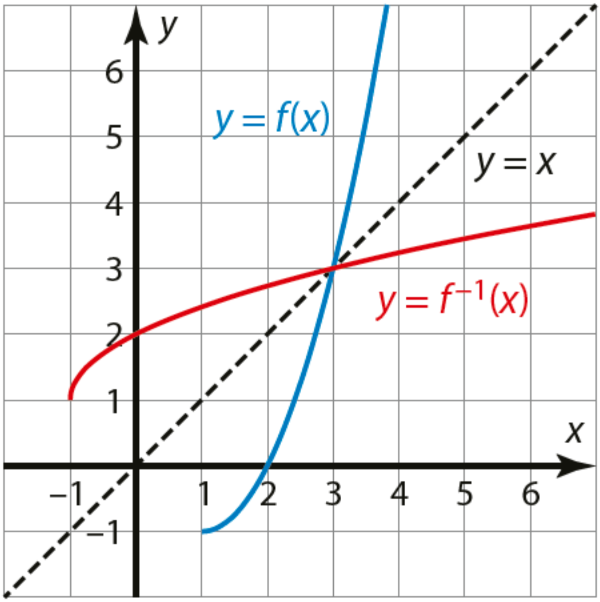
Koska funktion f määrittelyjoukossa $x \geq 1$,
niin $x = 1 + \sqrt{y+1}$.

Siis $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y+1}$.

Kun vaihdetaan muuttujaksi x, saadaan

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}.$$

c) Piirretään funktioiden $f(x)=x^2-2x$ ja $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x+1}$ kuvaajat geometriaohjelmalla.



Vastaus

b) $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x+1}$.

6.11

a) Käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke saadaan selville ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $f(x)=y$.

$$f(x)=y$$

$$\frac{x^2-2}{x^2+2}=y \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x=\sqrt{\frac{-2(y+1)}{y-1}} \text{ tai } x=-\sqrt{\frac{-2(y+1)}{y-1}}$$

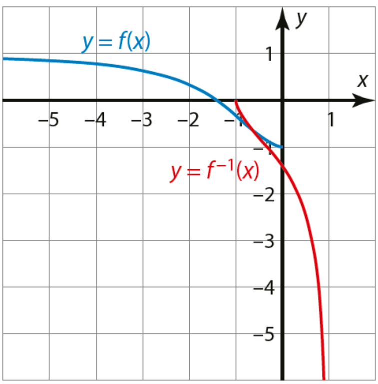
Koska funktion f määrittelyjoukossa on $x\leq 0$, niin

$x=-\sqrt{\frac{-2(y+1)}{y-1}}$. Käänteisfunktion lauseke on

$$f^{-1}(y)=-\sqrt{\frac{-2(y+1)}{y-1}}.$$

Kun muuttujaksi vaihdetaan x, saadaan $f^{-1}(x)=-\sqrt{\frac{-2(x+1)}{x-1}}$.

b) Piirretään funktioiden $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+2}$ ja $f^{-1}(x)=-\sqrt{\frac{-2(x+1)}{x-1}}$ kuvaajat geometriaohjelmalla.



c) Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on $[-1,\ 1[$.

Vastaus

a) $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{-2(x+1)}{x-1}}$

c) $[-1,\ 1[$

6.12

a) Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$
$$e^{x-1} = y \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = \ln y + 1$$

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \ln y + 1$.

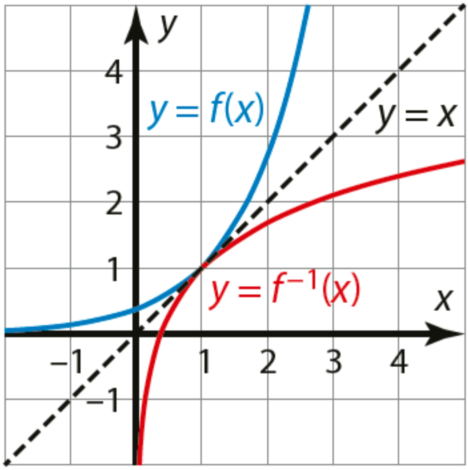
Kun vaihdetaan muuttuja, saadaan $f^{-1}(x) = \ln x + 1$.

b) Funktion $f(x) = e^{x-1}$ arvojoukko on $A_f =]0, \infty[$.

c) Käänteisfunktion $f^{-1}(x) = \ln x + 1$ määrittelyjoukko on $M_{f^{-1}} =]0, \infty[$.

d) $f^{-1} :]0, \infty[\to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \ln x + 1$

e) Piirretään funktioiden $f(x)=\mathbf{e}^{x-1}$ ja $f^{-1}(x)=\ln x+1$ kuvaajat geometriaohjelmalla.



Vastaus

a) $f^{-1}(x)=\ln x+1$

b) $A_f =]0,\ \infty[$

c) $M_{f^{-1}} =]0,\ \infty[$

d) $f^{-1}:\ ]0,\ \infty[\to \mathbf{R},\ f^{-1}(x)=\ln x+1$

6.13

a) Päätellään funktion f monotonisuus derivaattafunktion merkeistä.
Määritetään funktion $f(x)=\frac{2}{3}x-4$ derivaattafunktio.

$$f'(x)=\frac{2}{3}$$

Koska $\frac{2}{3}>0$, niin funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio. □

b) Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko $\mathbf{R}$. Täten käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko $\mathbf{R}$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x)=y$.

$$\begin{aligned} f(x)&=y \\ \frac{2}{3}x-4&=y && \left|+4\right. \\ \frac{2}{3}x&=y+4 && \left|\cdot 3\right. \\ 2x&=3y+12 && \left|:2\right. \\ x&=\frac{3}{2}y+6 \end{aligned}$$

Siis $f^{-1}(y)=\frac{3}{2}y+6$.

Kun vaihdetaan muuttujaksi x, saadaan

$f^{-1}:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f^{-1}(x)=\frac{3}{2}x+6$.

c)

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\frac{2}{3}x - 4) = \frac{3}{2}(\frac{2}{3}x - 4) + 6 = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}\cdot 4 + 6 = x$$

Vastaus

b) $f^{-1}(x):\ \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + 6$

c) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\frac{2}{3}x - 4) = \frac{3}{2}(\frac{2}{3}x - 4) + 6 = x$

6.14

a) Päätellään funktion f monotonisuus derivaattafunktion merkeistä.
Määritetään funktion $f(x)=x^5+x+2$ derivaattafunktio.

$$f'(x)=5x^4+x$$

Koska $f'(x)=0$ ainoastaan kohdassa $x=0$ ja muulloin $f'(x)>0$, niin funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio. □

b) Käänteisfunktion f^{-1} lauseke saataisiin ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $x^5+x+2=y$. Yhtälöä ei ole kuitenkaan mahdollista ratkaista, joten käänteisfunktiolle ei saada lauseketta.

Tehtävänä on määrittää sellainen x, että
$f^{-1}(0)=x$ ja $f(x)=0$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x)=0$.

$$f(x)=0$$

Yhtälöllä $f(x)=0$ on vain yksi ratkaisu, koska f on aidosti monotoninen.

$$x^5+x+2=0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x=-1$$

Koska $f(-1)=0$, niin $f^{-1}(0)=-1$.

Tehtävänä on määrittää sellainen x, että

$f^{-1}(3) = x$ ja $f(x) = 3$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = 3$.

$$f(x) = 3$$

Yhtälöllä $f(x) = 3$ on vain yksi ratkaisu, koska f on aidosti monotoninen.

$$x^5 + x + 2 = 3$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\begin{aligned} x &= 0{,}7548... \\ &\approx 0{,}75 \end{aligned}$$

Koska $f(0{,}75) \approx 3$, niin $f^{-1}(3) \approx 0{,}75$.

b) Käänteisfunktion nollakohta on se muuttujan y arvo, jolla

$f^{-1}(y) = 0$ eli $f(0) = y$.

Koska

$$f(0) = 0^5 + 0 + 2 = 2,$$

niin

$$f^{-1}(2) = 0.$$

Käänteisfunktion f^{-1} nollakohta on 2.

Vastaus

b) $f^{-1}(0) = -1$ ja $f^{-1}(3) \approx 0{,}75$

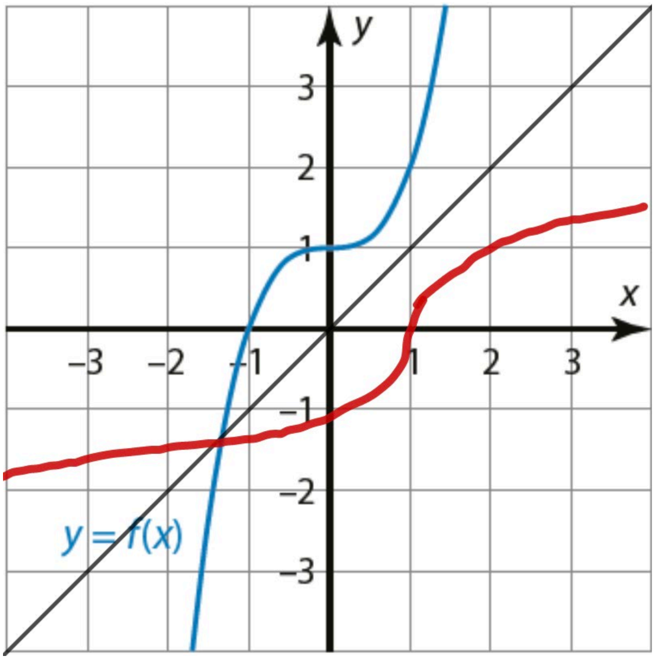
c) 2

6.15

Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

Hyödynnetään tietoa, että funktioiden f ja f^{-1} kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen. Jos funktion kuvaajalla on piste (a, b), niin käänteisfunktion kuvaajalla on piste (b, a).

Piirretään kuvakaappauksen päälle suoraa $y = x$ vastaava suora käyttäen Suora kahden pisteen kautta -toimintoa. Hahmotellaan käänteisfunktion kuvaaja Kynä-toiminnolla.



6.16

a) Päätellään funktion f monotonisuus derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion $f(x) = x^2 - 2$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2x$$

Koska $f'(x) = 0$ ainoastaan kohdassa $x = 0$ ja muulloin $f'(x) < 0$, niin funktio f on aidosti vähenevä välillä $]\infty, 0]$.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio. □

b) Koska funktio f on aidosti vähenevä, sen pienin arvo on $f(0) = -2$.

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeavan paraabelin se osa, jossa $x \leq 0$.

Siis funktion f määrittelyjoukko on $]-\infty, 0]$ ja arvojoukko $[-2, \infty[$.

Täten käänteisfunktion määrittelyjoukko on $[-2, \infty[$ ja arvojoukko $]-\infty, 0]$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ x^2 - 2 &= y \\ x^2 &= y + 2 \\ x &= \sqrt{y+2} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{y+2} \end{aligned}$$

Koska funktion f määrittelyjoukossa $x \leq 0$, niin $x = -\sqrt{y+2}$.

Siis $f^{-1}(y) = -\sqrt{y+2}$.

Käänteisfunktio on määritelty, kun $y \geq -2$.

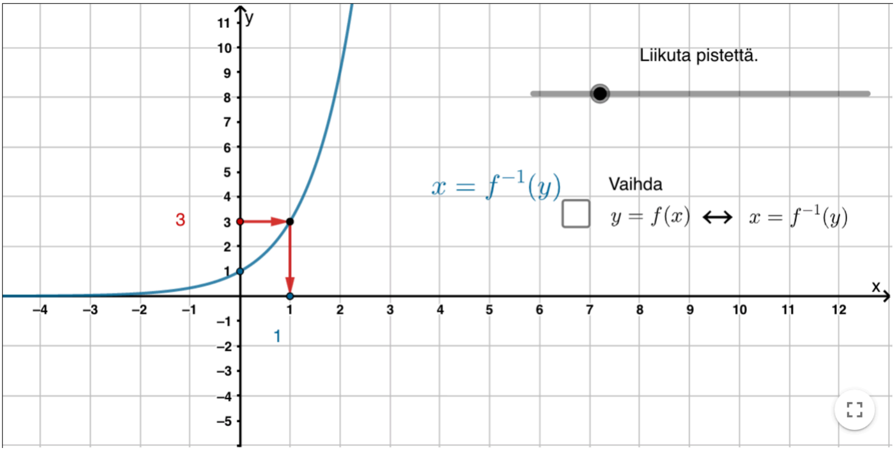
Kun vaihdetaan muuttujaksi x, saadaan

Vastaus

b) $f^{-1}: [-2, \infty[\to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+2}$

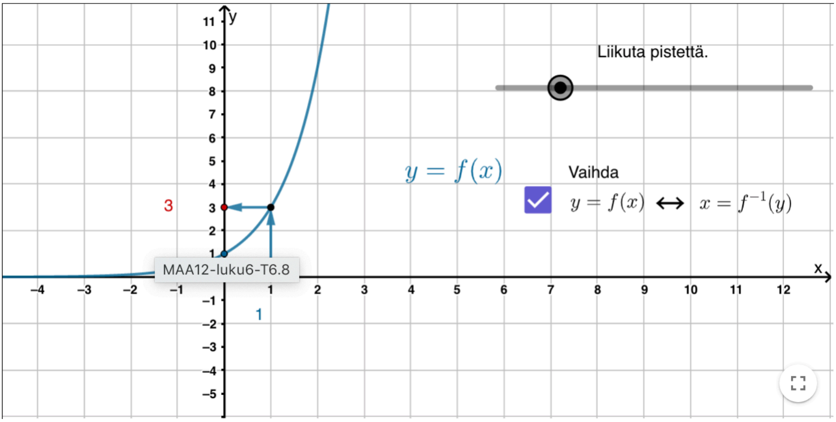
6.17

a) Määritetään kuvaajan perusteella käänteisfunktion arvot.



$$f^{-1}(1) = 0,$$
$$f^{-1}(3) = 1 \text{ ja}$$
$$f^{-1}(4) \approx 1{,}3$$

b) Määritetään kuvaajan perusteella yhdistetyn funktion arvot.



$f^{-1}(f(1)) = 1$ ja $f(f^{-1}(2)) = 2$

c) Funktion f arvojoukko on $]0, \infty[$, joten käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on $]0, \infty[$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= y \\
3^x &= y \\
x &= \log_3 y
\end{aligned}
$$

Käänteisfunktion on lauseke on $f^{-1}(y) = \log_3 y$.

Vastaus

a) $f^{-1}(1) = 0$, $f^{-1}(3) = 1$ ja $f^{-1}(4) \approx 1{,}3$

b) $f^{-1}(f(1)) = 1$ ja $f(f^{-1}(2)) = 2$

c) määrittelyjoukko $]0, \infty[$ ja lauseke $f^{-1}(y) = \log_3 y$

6.18

a) Tulee osoittaa, että

1) funktioilla $f(x) = -2x^3 + 6$ ja $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{6-x}{2}}$ on kääntеisfunktiot ja

2) $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

1) Määritetään funktioiden $f(x) = -2x^3 + 6$ ja $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{6-x}{2}}$ derivaattafunktiot.

$$f'(x) = -6x^2 \quad \text{ja} \quad g'(x) = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{(6-x)^2}}$$

Koska $f'(x) = 0$ ainoastaan kohdassa $x = 0$ ja muulloin $f'(x) < 0$, niin funktion f on aidosti vähenevä.

Koska $g'(x) < 0$ kaikilla $x \neq 6$, niin funktio g on aidosti vähenevä.

Siten funktioilla f ja g on käänteisfunktiot.

2) $f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{\dfrac{6-x}{2}}\right) = -2 \cdot \left(\sqrt[3]{\dfrac{6-x}{2}}\right)^3 + 6 = x$

ja

$g(f(x)) = g(-2x^3 + 6) = \sqrt[3]{\dfrac{6-(-2x^3+6)}{2}} = x$

Koska funktiot f ja g ovat molemmat aidosti väheneviä ja $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, funktiot f ja g ovat toistensa käänteisfunktioita. $\square$

b) Tulee osoittaa, että

1) funktioilla $f(x) = x^2 - 2x + 3,$ missä $x \geq 1,$ ja
$g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ on käänteisfunktiot ja

2) $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

1) Määritetään funktioiden $f(x) = x^2 - 2x + 3,$ missä $x \geq 1,$ ja
$g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ derivaattafunktiot.

$$f'(x) = 2x - 2 \quad \text{ja} \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

Koska $f'(x) = 0$ ainoastaan, kun $x = 1$ ja muulloin $\boldsymbol{f'(x) > 0}$, niin funktio f on aidosti kasvava määrittelyjoukossaan.

Koska $\mathbf{g'(x) > 0}$, kun $x > 2$, niin funktio g on aidosti kasvava määrittelyjoukossaan.

Siten funktioilla f ja g on käänteisfunktiot.

2) $f(g(x)) = f(1 + \sqrt{x-2}) = (1 + \sqrt{x-2})^2 - 2(1 + \sqrt{x-2}) + 3 = x$

ja

$g(f(x)) = g(x^2 - 2x + 3) = 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 3 - 2} = x$

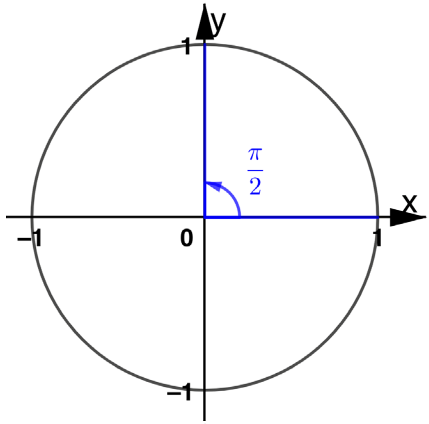
Koska funktiot f ja g ovat molemmat aidosti kasvavia määrittelyjoukossaan, ja $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, funktiot f ja g ovat toistensa käänteisfunktioita. □

6.19

Funktion $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

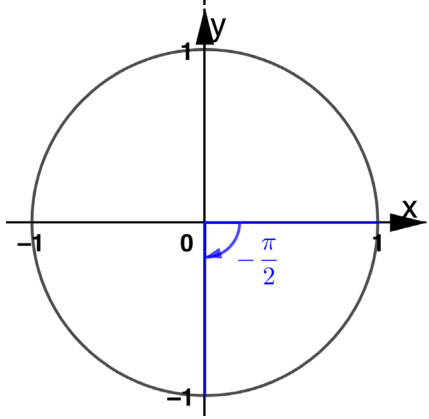
a) Koska $\sin\frac{\pi}{2} = 1$,

niin $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.



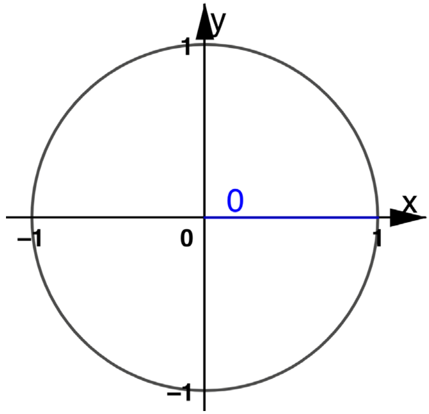
b) Koska $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$,

niin $\mathbf{\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}}$.



c) Koska $\sin 0 = 0$,

niin $\arcsin 0 = 0$.



Vastaus

a) $\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}$

b) $-\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}$

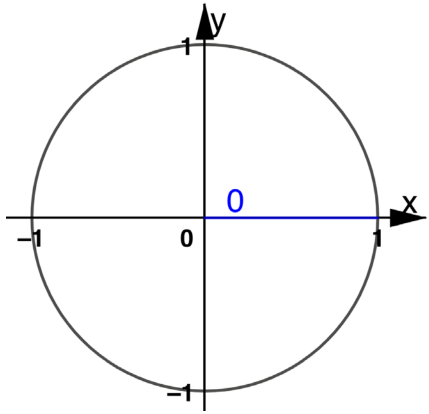
c) 0

6.20

Funktion $f(x) = \cos x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arccos x$.

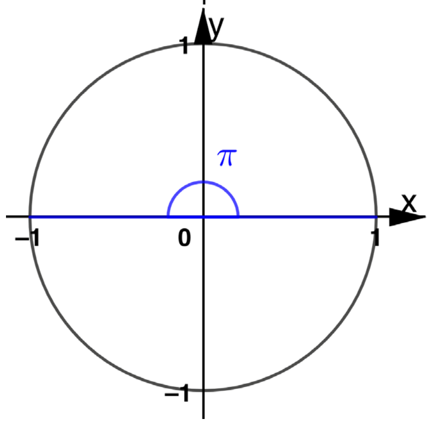
a) Koska $\cos 0 = 1$,

niin $\arccos 1 = 0$.



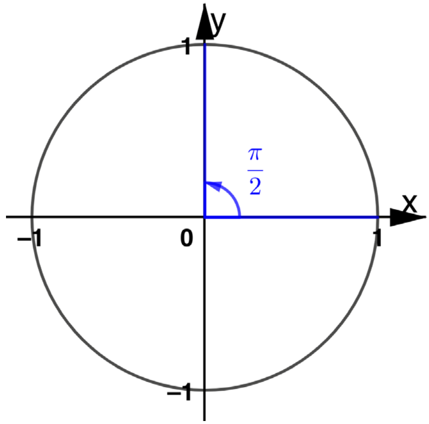
b) Koska $\cos \pi = -1$,

niin $\arccos(-1) = \pi$.



c) Koska $\cos\frac{\pi}{2} = 0$,

niin $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.



Vastaus
a) 0
b) π
c) $\frac{\pi}{2}$

6.21

a) Päätellään derivaattafunktion merkkien avulla, millä origon sisältävällä välillä funktio f on monotoninen.

Määritetään funktion $f(x) = xe^{2x-1}$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x-1} + x \cdot e^{2x-1} \cdot 2 = (2x+1)e^{2x-1}$$

Derivaattafunktio $f'(x) = (2x+1)e^{2x-1}$ saa positiivisia arvoja, kun

$$\begin{aligned} 2x+1 &> 0 \\ x &> -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Koska $(2x+1)e^{2x-1} \geq 0$, kun $x \geq -\frac{1}{2}$,
niin funktio f on aidosti kasvava välillä $[-\frac{1}{2}, \infty[$.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio välillä $I = [-\frac{1}{2}, \infty[$.

b) Funktioiden $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ kuvaajat leikkaavat toisensa suoralla $y = x$. Leikkauspisteiden x-koordinaatit (ja samalla myös y-koordinaatit) saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = x$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \\
xe^{2x-1} &= x \quad \Big| -x \\
xe^{2x-1} - x &= 0 \\
x(e^{2x-1} - 1) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x = 0 \text{ tai } e^{2x-1} - 1 &= 0 \\
e^{2x-1} &= 1 \\
e^{2x-1} &= e^0 \\
2x - 1 &= 0 \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Kuvaajat leikkaavat toisensa pisteissä $(0, 0)$ ja $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Vastaus

a) $I = [-\frac{1}{2}, \infty[$

b) $(0, 0)$ ja $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

6.22

Käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke saadaan selville ratkaisemalla muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= y \\
\frac{x+2}{x-3} &= y \qquad \Big| \cdot (x-3) \\
x+2 &= y(x-3) \\
x+2 &= yx - 3y \quad \Big| -yx-2 \\
x - yx &= -3y-2 \\
x(1-y) &= -3y-2 \,\Big|: (1-y) {\color{red}(\neq 0)} \\
x &= \frac{-3y-2}{1-y} \\
&= \frac{-1\cdot(3y+2)}{-1\cdot(y-1)} \\
&= \frac{3y+2}{y-1}
\end{aligned}
$$

Siis $x = \dfrac{3y+2}{y-1}$, missä $y \neq 1$.

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \dfrac{3y+2}{y-1}$. Kun vaihdetaan muuttujaksi x, saadaan $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$.

Lasketaan yhdistetyn funktion arvo, kun $x > 3$.

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$$

$$= \frac{3\left(\frac{x+2}{x-3}\right)+2}{\frac{x+2}{x-3}-1}$$ Lavennetaan samannimisiksi.

$$= \frac{\frac{3x+6}{x-3}+\frac{2(x-3)}{x-3}}{\frac{x+2}{x-3}-\frac{1(x-3)}{x-3}}$$

$$= \frac{\frac{3x+6+2x-6}{x-3}}{\frac{x+2-x+3}{x-3}}$$

$$= \frac{\frac{5x}{x-3}}{\frac{5}{x-3}}$$

$$= \frac{5x}{x-3} : \frac{5}{x-3}$$

$$= \frac{5x}{x-3} \cdot \frac{x-3}{5}$$

$$= x$$

Vastaus

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$