17.1

a) Todennäköisyys voidaan lukea suoraan normaalijakauman taulukosta.

$$P(Z \leq 1{,}34) = \Phi(1{,}34) \approx 0{,}9099$$

b) Päätellään todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$P(Z \geq 1{,}34) = 1 - P(Z < 1{,}34) \approx 1 - 0{,}9099 = 0{,}0901$$

c) Käytetään hyväksi jakauman symmetriaa odotusarvon 0 suhteen.

$$\begin{aligned} P(Z \leq -1{,}06) &= P(Z \geq 1{,}06) \\ &= 1 - P(Z < 1{,}06) \\ &= 1 - \Phi(1{,}06) \\ &= 1 - 0{,}8554 \\ &\approx 0{,}1446 \end{aligned}$$

d) Päätellään todennäköisyys a- ja c-kohtien tulosten avulla.

$$\begin{aligned} P(-1{,}06 \leq Z \leq 1{,}34) &= P(Z \leq 1{,}34) - P(Z \leq -1{,}06) \\ &= 0{,}9099 - 0{,}1446 \\ &\approx 0{,}7653 \end{aligned}$$

Vastaus
a) 0,9099
b) 0,0901
c) 0,1446
d) 0,7653

17.2

a) Olkoon satunnaismuuttuja X: "satunnaisesti valitun 14-vuotiaan suomalaisen tytön pituus senttimetreinä". Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 162,4$ ja keskihajonta $\sigma = 6,1$.

Lasketaan arvoa $x = 168,0$ (cm) vastaava normitettu arvo z.

$$z = \frac{168,0 - 162,4}{6,1} \approx 0,92 \qquad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Määritetään todennäköisyys $P(X \leq 168,0) \approx P(Z \leq 0,92)$, missä satunnaismuuttuja Z noudattaa normitettua normaalijakaumaa.

$$P(X \leq 168,0) \approx P(Z \leq 0,92) = \Phi(0,92) \approx 0,82$$

14-vuotiaista tytöistä 82 % on alle 168,0 cm pitkiä
ja 18 % yli 168,0 cm pitkiä.

b) Lasketaan arvoa $x = 155,0$ (cm) vastaava normitettu arvo z.

$$z = \frac{155,0 - 162,4}{6,1} \approx -1,21 \qquad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

On määritettävä todennäköisyys $P(X < 155,0) \approx P(Z < -1,21)$. Käytetään hyväksi normitetun normaalijakauman symmetriaa 0:n suhteen.

$$\begin{aligned} P(Z < -1,21) &= P(Z > 1,21) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,21) \\ &= 1 - \Phi(1,21) \\ &= 1 - 0,8869 \\ &\approx 0,11 \end{aligned}$$

14-vuotiaista tytöistä 11 % on alle 155,0 cm pitkiä.

c) Päätellään todennäköisyys a- ja b-kohtien tulosten avulla.

$$\begin{aligned} P(155 \le X \le 168{,}0) &= P(X \le 168{,}0) - P(X < 155{,}0) \\ &\approx 0{,}82 - 0{,}11 \\ &= 0{,}71 \end{aligned}$$

14-vuotiaista tytöistä 71 % on 155,0–168,0 cm pitkiä.

Vastaus

a) normitettu arvo 0,92:
82 %:lla alle 168,0 cm:
18 %:lla yli 168,0 cm

b) normitettu arvo –1,21; 11 %:lla

c) 71 %:lla

17.3

Olkoon satunnaismuuttuja X: "satunnaisesti valitun kuhan pituus senttimetreinä". Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 47{,}4$ ja keskihajonta $\sigma = 5{,}9$.

Lasketaan arvoa $x = 42$ (cm) vastaava normitettu arvo z.

$$z = \frac{42 - 47{,}4}{5{,}9} \approx -0{,}92 \qquad\qquad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

On määritettävä todennäköisyys $P(X > 42) \approx P(Z > -0{,}92)$. Käytetään hyväksi normitetun normaalijakauman symmetriaa 0:n suhteen.

$$\begin{aligned} P(Z > -0{,}92) &= P(Z < 0{,}92) \\ &= \Phi(0{,}92) \\ &\approx 0{,}82 \end{aligned}$$

82 % kuhista ylittää pyynnin alamitan 42 cm.

Vastaus
82 %

17.4

a) On määritettävä sellainen normitettu arvo a, että $P(Z \leq a) = 0,75$.

Etsitään taulukosta lukua 0,75 lähinnä oleva todennäköisyys ja sitä vastaava a:n arvo.

$a \approx 0,67$

b) Käytetään hyväksi normaalijakauman symmetriaa.

Taulukon mukaan $P(Z \leq z) = 0,80$, kun $z \approx 0,84$.

Symmetrian nojalla $P(Z \leq a) = 0,20$, kun $a \approx -0,84$.

Vastaus
a) $a \approx 0,67$
b) $a \approx -0,84$

17.5

a) Olkoon satunnaismuuttuja X: "satunnaisesti valitun soveltuvuuskokeen tulos pisteinä". Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 60$ ja keskihajonta $\sigma = 8,0$.

On määritettävä sellainen hyväksymisraja, että kokeessa hylätään 50 %.

Normaalijakauman symmetrian perusteella hyväksymisrajan tulee olla 60 pistettä.

b) On määritettävä sellainen pistemäärä x ja sitä vastaava normitettu arvo z, että

$P(X \leq x) = P(Z \leq z) = 0,65.$

Taulukon mukaan $P(Z \leq z) = 0,65,$ kun $z \approx 0,39.$

Ratkaistaan normitusyhtälöstä pistemäärä x.

$$
\begin{aligned}
\frac{x-60}{8,0} &= 0,39 && \big| \cdot 8,0 \\
x - 60 &= 8,0 \cdot 0,39 && \big| + 60 \\
x &= 8,0 \cdot 0,39 + 60 \\
&\approx 63
\end{aligned}
$$

Hyväksymisrajan tulee olla 63 pistettä.

c) On määritettävä sellainen pistemäärä x
ja sitä vastaava normitettu arvo z, että

$$P(X \leq x) = P(Z \leq z) = 0{,}10.$$

Käytetään hyväksi normaalijakauman symmetriaa.

Taulukon mukaan $P(Z \leq z) = 0{,}90,$ kun $z \approx 1{,}28.$

Symmetrian perusteella $P(Z \leq z) = 0{,}10,$ kun $z \approx -1{,}28.$

Ratkaistaan normitusyhtälöstä pistemäärä x.

$$\begin{aligned}
\frac{x-60}{8{,}0} &= -1{,}28 && \bigg| \cdot 8{,}0 \\
x - 60 &= 8{,}0 \cdot (-1{,}28) && \bigg| + 60 \\
x &= 8{,}0 \cdot (-1{,}28) + 60 \\
&\approx 50
\end{aligned}$$

Hyväksymisrajan tulee olla 50 pistettä.

Vastaus
a) 60 pistettä
b) 63 pistettä
c) 50 pistettä

17.6

Matin koulumatkan kesto X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 17$ minuuttia ja keskihajonta $\sigma = 3$ minuuttia.

On määritettävä sellainen koulumatkan kesto, että vain 5 % koulumatkoista sitä pidempiä eli toisin sanoen 95 % ovat sitä lyhyempiä.

On määritettävä sellainen koulumatkan kesto x ja sitä vastaava normitettu arvo z, että $P(X \leq x) = P(Z \leq z) = 0{,}95.$

Taulukon perusteella $z \approx 1{,}65.$

Ratkaistaan normitusyhtälöstä muuttuja x.

$$\begin{aligned} \frac{x-17}{3} &= 1{,}65 && \Big| \cdot 3 \\ x - 17 &= 3 \cdot 1{,}65 && \Big| +17 \\ x &= 3 \cdot 1{,}65 + 17 \\ &\approx 22 \end{aligned}$$

Matin on lähdettävä kotoa 22 minuuttia ennen koulun alkua.

Vastaus
22 minuuttia

17.7

Normitetun normaalijakauman symmetrian perusteella

$P(0 \le Z \le a) = 0,30.$

Siten $P(Z \le a) = 0,50 + 0,30 = 0,80.$

Taulukon perusteella $P(Z \le a) = 0,80,$ kun $a \approx 0,84$.

Vastaus
$a \approx 0,84$

17.8

Älykkyystestin tulos X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 100$ ja keskihajonta $\sigma = 15$.

Normaalijakauman symmetrian perusteella normaalin älykkyyden ylärajan alapuolella on 90 % väestöstä.

On määritettävä sellainen älykkyystestin pistemäärä x_1 ja sitä vastaava normitettu arvo z_1, että $P(X \leq x_1) = P(Z \leq z_1) = 0{,}90$.

Taulukon perusteella $z_1 \approx 1{,}29$.

Ratkaistaan normitusyhtälöstä muuttuja x_1.

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 - 100}{15} &= 1{,}29 && \Big| \cdot 15 \\
x - 100 &= 15 \cdot 1{,}29 && \Big| + 100 \\
x &= 15 \cdot 1{,}29 + 100 \\
&\approx 119{,}35
\end{aligned}$$

Normaaliälykkyyden yläraja on 120 pistettä.

Normaalijakauman symmetrian perusteella normaalin älykkyyden alarajaa x_2 vastaa normitettu arvo $z_2 = -1{,}29$.

Ratkaistaan normitusyhtälöstä muuttuja x_2.

$$\begin{aligned}
\frac{x_2 - 100}{15} &= -1{,}29 && \Big| \cdot 15 \\
x - 100 &= 15 \cdot (-1{,}29) && \Big| + 100 \\
x &= 15 \cdot (-1{,}29) + 100 \\
&\approx 80{,}65
\end{aligned}$$

Normaaliälykkyyden alaraja on 80 pistettä.

Vastaus
80 pistettä tai vähemmän ja 120 pistettä tai enemmän saaneet

17.9

Tehtävänä on määrittää kahvipaketin massan X odotusarvo μ, kun keskihajonta $\sigma = 10$ (g).

Olkoon arvoa $x = 500$ (g) vastaava normitettu arvo z.

Tulee olla $P(X < 500) = P(Z < z) = 0{,}02$.

Käytetään hyväksi normitetun normaalijakauman symmetriaa.

Taulukon perusteella $P(Z < z) = 0{,}98$, kun $z \approx 2{,}05$.

Symmetrian perusteella $P(Z < z) = 0{,}02$, kun $z \approx -2{,}05$.

Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan μ.

$$\begin{aligned}
\frac{500-\mu}{10} &= -2{,}05 && \left|\cdot 10\right. \\
500-\mu &= -2{,}05\cdot 10 && \left|-500\right. \\
-\mu &= -2{,}05\cdot 10 - 500 && \left|\cdot(-1)\right. \\
\mu &= 2{,}05\cdot 10 + 500 \\
&\approx 521
\end{aligned}$$

Odotusarvoksi pitäisi säätää 521 g.

Vastaus
521 g

17.10

Tehtävänä on määrittää 7-vuotiaiden poikien pituuden X odotusarvo μ ja keskihajonta σ.

Puolet pojista ovat alle 125 cm pitkiä.

Normaalijakauman symmetrian perusteella pituuden odotusarvo $\mu = 125$ (cm).

Pisimmät 7 % pojista ovat yli 132 cm pitkiä, joten 97 % pojista ovat tätä lyhyempiä.

Olkoon arvoa $x = 132$ (cm) vastaava normitettu arvo z.

Tulee olla $P(X \leq 132) = P(Z \leq z) = 0{,}93$.

Taulukon perusteella $z \approx 1{,}48$.

Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan σ.

$$\frac{132-125}{\sigma} = 1{,}48$$

$$\frac{7}{\sigma} = 1{,}48 \qquad \left| \cdot \sigma \right.$$

$$7 = 1{,}48\sigma \qquad \left| : 1{,}48 \right.$$

$$\sigma = \frac{7}{1{,}48} \approx 5$$

Keskihajonta on 5 cm.

Vastaus
odotusarvo 125 cm, keskihajonta 5 cm